EXTENSIÓN DE ALGUNOS RESULTADOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS A FUNCIONES ARMÓNICAS

Jose Esteban Méndez Díaz

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA
2020

EXTENSIÓN DE ALGUNOS RESULTADOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS A FUNCIONES ARMÓNICAS

Jose Esteban Méndez Díaz

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de

Matemático

Asesor:

Dr. Luis Enrique Benítez Babilonia

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA

2020

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Los jurados abajo firmantes certifican que han leído y que aprueban el trabajo de grado titulado: **EXTENSIÓN DE ALGUNOS RESULTADOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS A FUNCIONES ARMÓNICAS**, el cual es presentado por el estudiante **Jose Esteban Méndez Díaz**.

Fecha: Junio de 2020

Asesor: ______________________________
Dr. Luis Enrique Benítez Babilonia

Jurado: ______________________________
Profesor Jorge Armando Reyes Vázquez

Jurado: ______________________________
Profesor Sergio Miguel Aviléz Ortíz

A mis padres Abel Méndez y Estelia Díaz
A mis hermanos y mi novia
A mis amigos más cercanos
y en memoria de Duván Zumaqué

Índice general

Resumen

En el estudio del conjunto de los números complejos y las funciones definidas en el, se define la diferenciabilidad en el sentido complejo de manera similar a la diferenciabilidad conocida en $\mathbb{R}$. Las funciones que son diferenciables en este sentido sobre un dominio Ω las llamaremos funciones analíticas en Ω, denotemos este conjunto por $H(\Omega)$. Además, dado que una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ puede ser escrita como $f = u + iv$ con u y v también definidas en Ω, diremos que f es armónica en Ω si las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de Laplace, es decir, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ y $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Notaremos el conjunto de funciones armónicas en Ω por $A(\Omega)$. Basados en estudios previos podemos afirmar que $H(\Omega) \subset A(\Omega)$, en este punto nos surge la pregunta ¿Se pueden extender resultados ya existentes para $H(\Omega)$ a $A(\Omega)$? La respuesta es afirmativa en algunos casos y en este trabajo mostraremos una parte de ellos como el Principio del argumento y definiremos las clases S_H y S_H^0 las cuales son análogas en el caso armónico a una clase bien conocida en el caso analático S.

Abstract

In the study of the set of complex numbers the functions defined in it, the differentiability in the complex sense is defined in a similar way to the known differentiability in $\mathbb{R}$, to the functions that are differentiable in this sense on a domain Ω we will call them analytic functions in Ω, note this set by $H(\Omega)$. Also, since a function $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ can be written as $f = u + iv$ with u and v also in defined in Ω, we will say that f is harmonic in Ω if the functions u and v satisfy the equations of Laplace, that is $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ y $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. We will notice the set of harmonic functions in Ω by $A(\Omega)$. Based on previous studies we can affirm that $H(\Omega) \subset A(\Omega)$, at this point the question arises, can the results be extended now to $H(\Omega)$ to $A(\Omega)$? The answer is affirmative in some cases and in this we will work we will show some as The argument principle and we will define the classes S_H and S_H^0 which are analogous in the harmonic case to a class well known in the analytic case S.

Agradecimientos

Quisiera agradecerle a mis padres, por su apoyo inmensurable durante todo este recorrido,tanto económico como emocional, por formar lo que soy hoy día.
También, quiero darle gracias a la Universidad de Córdoba, al plantel de profesores del Departamento de Matemáticas y Estadística que influyeron en mi formación académica, en especial al profesor Luis Benítez, por su confianza y rigurosa asesoría en el desarrollo de este trabajo, y también por sus enseñanzas en todas las clases que me dió.
Y a mis amigos dentro y fuera de la universidad, a mi novia María Isabel Quintero que me da un apoyo fundamental para mí.

Introducción

En la matématica, más preciso en el álgebra, surge la necesidad de resolver ecuaciones del siguiente tipo

$$x^2 + 1 = 0,$$

la cual no tiene solución en la recta real, pero se definió el número imaginario "i" como una solución de dicha ecuación y, a partir de él, el conjunto de los números complejos $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Años más tarde, el reconocido matemático Carl Gauss demostró en su tesis doctoral el bien conocido Teorema Fundamental del Álgebra en 1799, el cual enuncia que todo polinomio con coeficientes en los complejos tiene raices en $\mathbb{C}$. Este hecho da una gran importancia a este nuevo conjunto generando interés entre los matemáticos de la época ya que en él se puede, por ejemplo, definir una topología generada por la métrica usual de $\mathbb{C}$ dada por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, si $z = x + iy$. Además, dado que el concepto de *función* es muy general, se pueden crear funciones a partir de conjuntos cualesquiera, en particular se definen funciones de variable compleja que son funciones $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y con ello el estudio de continuidad, diferenciabilidad y otros conceptos del análisis real, para este tipo de funciones.

En el intento de emular el análisis hecho para $\mathbb{R}$, se define las funciones analíticas como aquellas que son diferenciable en el sentido complejo en todos los puntos dentro de Ω. Más claro, diremos que una función es analítica en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, si en cada punto z_0 de Ω se tiene que el siguiente limite existe:

$$f'(z_0) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

La definición de función analítica es más completa que la diferenciabilidad real, por ejemplo las funciones analíticas en Ω siempre son de clase C^∞ [7]; pero para el caso real esto no necesariamente se cumple. Este es uno de tantos resultados que diferencian el análisis complejo del análisis real. En este documento denotaremos a $H(\Omega)$ como el conjunto de funciones analíticas sobre Ω con valores en $\mathbb{C}$. También usaremos $\partial\Omega$ para denotar la frontera de Ω. Además, si los elementos de $H(\Omega)$ satisfacen la condición de inyectividad, entonces nos referiremos a ellos como funciones analíticas univalentes o “mapeos conformes” en el sentido de la “igualdad” o “conservación” de ángulos [7].

Cabe resaltar que una función f de variable compleja puede ser escrita de esta forma $f = u + iv$ donde u y v son funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, es decir, funciones real-valuadas. Una condición necesaria para que f sea analítica son las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y, v_x = -u_y. \tag{0.1}$$

A continuación definiremos dos operadores muy convenientes, ellos son:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{0.3}$$

para $z = x + iy$. Estos operadores diferenciales satisfacen algunas propiedades de derivadas. Teniendo estos operadores, para una función $f = u + iv$, el Jacobiano de f es definido como $J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$. Compilando todo esto, Hans Lewy establece su teorema para funciones conformes, el cual indica que si f es conforme, entonces $J_f > 0$.

Uno de los teoremas que se van a generalizar en este proyecto es el Principio del Argumento, en el cual, usando la definición del cambio total del argumento se demuestra que el número de ceros de f contados de acuerdo a su multiplicidad coincide con el índice de f respecto al 0, denotado por $I(f \circ \gamma, 0)$.

También, el análisis complejo juega un papel fundamental en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales en las ingenierías, biología, ciencias físico-matemáticas como por ejemplo el flujo de calor y e isotermos, ver [18] pág 382. En particular, la teoría de funciones analíticas es una herramienta fundamental en la solución de problemas con condiciones en la frontera para la ecuación de Laplace. Esto es debido a la conexión que poseen las funciones analíticas de variable compleja con las funciones armónicas de la variable real. Las funciones armónicas son fundamentales en las matemáticas aplicadas. Por ejemplo, las temperaturas $T(x, y)$ en placas delgadas que se encuentran en el plano xy suelen ser armónicas. En la física, una función $V(x, y)$ es armónica cuando denota un potencial electrostático que varía solo con x e y en el interior de una región del espacio tridimensional libre de cargas. Lo dicho anteriormente, nos lleva a presentar una definición sobre el concepto de funciones armónicas de la siguiente forma:

Una función de valores reales $u(x, y)$ se dice armónica en $D \subseteq \mathbb{R}^2$, si satisface la ecuación de Laplace, esto es,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Además, para una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, al usar la notación $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $z = x + iy$, se puede extender este concepto a funciones de variable compleja de la siguiente manera. La función f se dice armónica en Ω, si las dos funciones coordenadas u y v son armónicas en Ω. También, denotaremos por $A(\Omega)$ al conjunto de funciones armónicas en Ω con valores en $\mathbb{C}$.

Podemos ver que las funciones armónicas en el plano no necesariamente satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Un ejemplo de ello es $f(z) = Log(|z|)$. En consecuencia, las funciones armónicas no necesariamente son analíticas o conformes pero las funciones análiticas en Ω, son armónicas en Ω, pues satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto quiere decir que $H(\Omega) \subset A(\Omega)$ precisamente esto es lo que generó el interés de producir este escrito.

A mediados de la década de los 80, más preciso, en 1984, se publicó un artículo de gran importancia, James Clunie y Terry Shel-Small [1] recopilaron muchos de los resultados para funciones conformes, mostrando que tienen análogos para mapeos armónicos (P. Duren, 2004[3]). A partir de aquí, nos centraremos en lo hecho en el artículo de Clunie y Shell-Small y definiremos dos clases que serán fundamentales en el futuro. Primero, notemos el disco unitario por $\mathbb{D}$, este conjunto es $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Una función armónica f definida en $\mathbb{D}$ puede ser expandida en series, así,

$f = \overline{g} + h$ donde $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_{-n} z^n$ y $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Entonces notamos por S_H la clase de funciones armónicas univalentes en $\mathbb{D}$ que satisfacen $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. También usaremos la subclase de S_H normalizada porque satisfacen $a_{-1} = 0$ y la notaremos por S_H^0, estas clases surgen como análogas a la clase S de Schwarz la cual definiremos más adelante. Cabe resaltar que el objetivo de este trabajo es recopilar algunos teoremas de funciones analíticas que tengan su similar para funciones armónicas pues, existen algunos teoremas que se satisfacen para funciones analíticas pero que no se pueden extender para funciones armónicas, un ejemplo de ello es el Teorema de Caratheodory, ver [1] pág 8.

En el capítulo 1 introduciremos definiciones, lemas y teoremas esenciales del análisis complejo, que son necesarias para demostrar los teoremas principales de este escrito. En el capítulo 2 haremos una construcción detallada de definiciones y resultados con el fin de usarlas en la extensión del Principio del argumento a funciones armónicas. En el capítulo 3 tenemos como resultado principal un teorema válido para las clases S_H, S_H^0 y S, que equivalentemente es una extensión de un resultado de funcione analíticas a funciones armónicas.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se mostrarán resultados importantes que se usarán posteriormente en este trabajo relacionados a funciones analíticas, como el Teorema del mapeo de Riemman, el Teorema Residuo y la representación en series de potencia de una función analítica, también recordaremos la definición de una función armónica que es la definición más importante en nuestro escrito pues, todo lo que haremos es en torno a la familia de funciones armónicas en Ω notada por $A(\Omega)$ y se mostrarán unos hechos básicos pero fundamentales.

1.1. Funciones Analíticas

En esta sección hablaremos un poco sobre el análisis complejo y mostramos algunos resultados fundamentales para este trabajo.

Definición 1.1.1 (Derivada en el sentido complejo)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in A$ y $f : A \to \mathbb{C}$. Se dice que f es complejo-diferenciable en z_0 si el siguiente límite existe

$$f'(z_0) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En tal caso, dicho límite será denotado por $f'(z_0)$ o $\frac{df}{dz}(z_0)$ y se llamará la derivada compleja de f en z_0.

Definición 1.1.2 (Función Analítica)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : A \to \mathbb{C}$. Se dice que f es analítica en A si f es complejo-diferenciable en todo $z \in A$.

Denotaremos por $H(A)$ al conjunto de funciones analíticas en A con valores en $\mathbb{C}$. Dada esta definición se puede ver que la diferenciabilidad compleja hereda las reglas de derivación de la diferenciabilidad real que conocemos, para ver esto introduciremos el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1 (Reglas de derivación)**.** Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f, g : U \to \mathbb{C}$ analíticas en U entonces también lo son $f+g$, $f-g$, fg y f/g, esta última siempre que $g(z) \neq 0$ para cada $z \in U$. Además, se tiene:

1. $f'(z) + g'(z) = (f+g)'(z)$.
2. $f'(z) - g'(z) = (f-g)'(z)$
3. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$
4. $(f/g)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g(z)^2}$

Demostración. Ver [7], pag 64. □

Al igual que estas reglas, también se hereda la regla de la cadena.

Teorema 1.1.2. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ analítica en U y $g : V \to \mathbb{C}$ analítica en V y $f(U) \subset V$ entonces, $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ es analítica en U y $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.

Demostración. Ver [7], pag 66. □

Teorema 1.1.3. Una condición necesaria para que una función $f = u + iv$ sea analítica en un abierto A es que u, v satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y. \tag{1.1}$$

Demostración. Ver [7], pag 70.

□

1.1.1. Representación en series de una función analítica

En esta sección como su nombre lo indica, mostraremos que toda función analítica en un abierto tiene una representación en series de potencia. Para esto recordemos la definición de series de potencia.

Definición 1.1.3. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo y $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ una sucesión. Definimos una serie de potencia como la siguiente suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.2}$$

Definición 1.1.4. Sean $f_n : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones de variable compleja. Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalmente a la función límite f en U si $\{f_n\}$ converge puntualmente a f y si $\{f_n\}$ converge uniformemente en todo compacto $K \subset U$.

Ahora, introduciremos resultados generales para series de potencia.

Teorema 1.1.4. Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencia, entonces existe $R \geq 0$ tal que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge normalmente en $D(z_0, R)$ y diverge en $\overline{D(z_0, R)}^c$.

A dicho $R \geq 0$ lo llamaremos radio de convergencia de la serie de potencia en cuestión.

Proposición 1.1.5. Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencia. Entonces:

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existe, entonces coincide con R el radio de convergencia de la serie.
2. Si $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe , entonces $R = \frac{1}{\rho}$ con $R = \infty$ si $\rho = 0$.

Demostración. Ver [13] Pág 260. □

Teorema 1.1.6 (Teorema de Taylor)**.** Sea $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en U donde U es abierto. Considere $z_0 \in U$ y $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset U$, entonces se tiene que $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ para todo $z \in D(z_0, r)$ con convergencia normal y absoluta.

Demostración. Ver [7], pag 263. □

Usando el Teorema anterior podemos concluir que una función analítica se puede representar localmente como una serie de potencia.

Definición 1.1.5 (Serie de Laurent)**.** Para $z_0 \in \mathbb{C}$ una serie de Laurent centrada en z_0 será una serie bi-infinita de la forma $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ con $a_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Las funciones analíticas también se pueden representar en series de Laurent.

Teorema 1.1.7. Sea f analítica en un anillo $D = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\}$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Entonces $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ para todo $z \in D$, donde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$ y $r \in (a, b)$.

Demostración. Ver [7], pag 270. $\square$

Podemos notar que las funciones analíticas las podemos representar en series de Taylor en discos y las podemos representar en series de Laurent en anillos.

1.1.2. Teorema del residuo

En este punto, enunciaremos el Teorema del residuo, un teorema fundametal en el analísis complejo y que usamos más adelante para demostrar el principio del argumento para funciones analíticas. Para enunciar este teorema, daremos unas definiciones esenciales.

Definición 1.1.6 (Curva)**.** Se define una curva o camino como una función continua $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$.

Observación 1. Sea $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva:

1. Se dice que una curva es cerrada si $\lambda(0) = \lambda(1)$.

2. Si λ es inyectiva en $(0, 1)$, se dice que la curva es simple.

3. Si λ es inyectiva en $(0, 1)$ y $\lambda(0) = \lambda(1)$ se dice que la curva es cerrada y simple, también es conocida como curva de Jordan.

4. Se dice que la curva λ es suave a trozos si existe una partición $P_n = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$ tal que $\lambda|_{I_j}$ es de clase $C^1(I_j)$ con $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ para cada $j = 1, 2, \cdots, n$.

5. Denotaremos $|\lambda| = \{w \in \mathbb{C}\, | w = \lambda(t) \quad \text{para algún} \quad t \in [0,1]\}$ a la trayectoria de la curva λ.

Definición 1.1.7 (Índice)**.** Considere $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva suave a trozos y $z_0 \in |\lambda|^c$. Se define el índice o número de vueltas de λ respecto a z_0 como:

$$I(\lambda, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\lambda \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Observación 2. Dada una curva $\lambda : [0,1] \to \mathbb{C}$ suave a trozos y $z_0 \in |\lambda|^c$ se puede ver que $I(\lambda, z_0) \in \mathbb{Z}$, ver [7], pág 153-154.

Se define también, lo que son curvas homotópicas a otras curvas y curvas homotópicas a un punto.

Definición 1.1.8. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abieto, $\lambda_1 : [0,1] \to U$ y $\lambda_2 : [0,1] \to U$ curvas. Diremos que λ_1 es homotópica a λ_2 en U y será denotado por $\lambda_1 \sim \lambda_2$, si existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ tal que:

1. Si $t \in [0,1]$, entonces $H(0,t) = \lambda_1(t)$.

2. Si $s \in [0,1]$, entonces $H(1,s) = \lambda_2(s)$.

Definición 1.1.9. Sea $U \subset \mathbb{C}$ y considere $\lambda_1 : [0,1] \to U$, $\lambda_2 : [0,1] \to U$ curvas cerradas en U. Diremos que λ_1 y λ_2 son homotópicas como curvas cerradas en U y se denota por $\lambda_1 \sim \lambda_2$ si existe una función $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ continua en $[0,1] \times [0,1]$ tal que:

1. $H(0,t) = \lambda_1(t)$, para cada $t \in [0,1]$.

2. $H(1,t) = \lambda_2(t)$, para cada $t \in [0,1]$.

3. $H(s,0) = H(s,1)$, para todo $s \in [0,1]$.

En este caso, la función H se le conoce como Homotopía de curvas cerradas. Ahora, si $z_0 \in U$ y se considera $\lambda_0(t) = z_0$ para todo $t \in [0,1]$ entonces λ_0 es una curva cerrada en U. En tal caso, si $\lambda_1 \sim \lambda_0$ diremos que λ_1 es homotópica a un punto en U. Usaremos la notación $\lambda_1 \sim z_0$ en este caso. En este escrito denotaremos de la misma manera homotopías de curvas generales y homotopías de curvas cerradas, dependerá del contexto cual estaremos usando, aunque generlmente será homotopía de curvas cerradas. En este punto podremos definir lo que se conoce como conjuntos simplemente conexos.

Definición 1.1.10. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, se dice que Ω es simplemente conexo si cada curva cerrada $\gamma \subset \Omega$ es homotópica a un punto de Ω.

Teorema 1.1.8. (Caracterización de abiertos simplemente conexos). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El conjunto Ω es simplemente conexo.
2. El conjunto $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
3. Para cada $f \in H(\Omega)$ existe $F \in H(\Omega)$ tal que $F' = f$.
4. Para cada $f \in H(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in H(\Omega)$ tal que $e^g = f$.
5. Para cada $f \in H(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in H(\Omega)$ tal que $g^2 = f$.
6. Existe un homeomorfismo entre Ω y $\mathbb{D}$.

Demostración. Véase [2], [16]. □

A continuación daremos paso a la definición de lo que son singularidades aisladas.

Definición 1.1.11. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f : U \to \mathbb{C}$. Diremos que f tiene una singularidad aislada en z_0 si f es analítica en $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} \subset U$ para algún $r > 0$.

Ejemplo 1. Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{1}{z}$. Entonces $z_0 = 0$ es una singularidad aislada de f, sin embargo $z_0 \notin \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Así, si tenemos que z_0 es una singularidad aislada de f, entonces f es analítica en $D = \{z \in \mathbb{C} : \rho_i < |z - z_0| < \rho_e\} \subset U$ con $\rho_i = 0$ y $\rho_e = r$, luego, por Teorema 1.1.7 tenemos que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Con esto podemos diferenciar tipos de singularidades aisladas:

1. Una singularidad aislada se dice removible si $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

2. Una singularidad aislada se dice esencial si existe una cantidad infinita de $n's$ tales que $b_n \neq 0$.

3. Una singularidad aislada se dice un polo si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{n_0} \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > n_0$. En este caso se dice que z_0 es un polo de orden $n_{0.}$

4. Si $n_0 = 1$ se dice que la singularidad aislada es un polo simple.

5. $b_1 = Res(f, z_0)$ es llamado el residuo de f en $z_{0.}$

6. La función f se dice meromorfa en A si f no tiene singularidades escenciales en A, esto es, las singularidades aisladas de f son polos o removibles.

Dicho todo esto podemos enunciar el conocido teorema del residuo.

Teorema 1.1.9. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un dominio y $z_1, z_2, \ldots, z_m \in A$ distintos y $f : A \to \mathbb{C}$ analítica en $A \backslash \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ con singularidades aisladas en cada z_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Considere λ una curva suave a trozos tal que $\lambda([0, 1]) \subset A$ y $\lambda \sim 0$. Si $z_j \notin \lambda([0, 1])$, para todo $j = 1, 2, \ldots, m$. Entonces:

$$\int_{\lambda} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j)I(\lambda, z_j) \tag{1.3}$$

Demostración. Ver [7], pag 323. □

1.1.3. Teorema del mapeo de Riemann y Teorema de extensión de Caratheodory

Para esta sección queremos enunciar dos teoremas importantes en el analísis complejo, los cuales son el Teorema del mapeo de Riemann y el Teorema de extensión de Caratheodory, en los cuales no prufundizaremos mucho pero serán de ayuda en algunos resultados posteriores. El Teorema del mapeo de Riemann nos indica que cualquier dominio simplemente conexo (ver 1.1.10) y estrictamente contenido en el plano complejo puede ser transformado mediante un mapeo conforme en cualquier otro dominio con las mismas características, en particular, el disco unitario.

Teorema 1.1.10 (Teorema del mapeo de Riemann)**.** Sea D un dominio simplemente conexo(ver 1.1.10) el cual no es todo el plano y sea $a \in D$. Entonces existe una única función analítica $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con las propiedades

i. $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$,

ii. La función f es uno a uno,

iii. La imagen directa bajo f de D es $\mathbb{D}$, es decir $f(D) = \mathbb{D}$.

Demostración. Véase [14], Pág. 17. □

El Teorema de extensión de Caratheodory, básicamente nos muestra que si tenemos una función conforme $f : \mathbb{D} \to D$, podemos “extender"la función f continuamente a $\partial\mathbb{D}$ si y solamente si D es un dominio de Jordan(Definiremos este término posteriormente), es decir,f envía $\mathbb{D}$ hacía D y $\partial\mathbb{D}$ hacía ∂D.

Teorema 1.1.11 (Teorema de extensión de Caratheodory)**.** Sea $f : \mathbb{D} \to D$ una función conforme. Entonces, f puede ser extendida a un homemorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ a $\overline{D}$ si y solo si D es un dominio de Jordan.

Demostración. Ver [7], Pág 445. □

1.2. Funciones Armónicas

Definición 1.2.1. Una función de valores reales $u(x, y)$ se dice armónica en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, si satisface la ecuación de Laplace, esto es,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Denotaremos $A_{\mathbb{R}}(\Omega)$ como el conjunto de funciones armónicas real valuadas. Sabiendo que una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ envía Ω en $\mathbb{C}$, para algún $z = x + iy \in \Omega$ se tiene que $f(z) = u + iv$. Entonces, toda función de un subconjunto de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ puede ser escrita de la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dicho esto, podemos definir armonicidad de funciones de valores complejos de la siguiente manera.

Definición 1.2.2. La función f se dice armónica en Ω, si las dos funciones coordenadas u y v son armónicas en Ω.

También denotaremos por $A(\Omega)$ al conjunto de funciones armónicas en Ω con valores en $\mathbb{C}$.

Teorema 1.2.1. Si la función $f = u + iv$ es analítica en Ω, entonces $u = \mathbf{Re}(f)$ y $v = \mathbf{Im}(f)$ son funciones armónicas en Ω.

Demostración. Como f es analítica, entonces f es de clase $C^\infty(\Omega)$, esto implica que $u, v \in C^\infty(\Omega)$, en particular $u \in C^2(\Omega)$. Además, por ser f analítica verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Derivando se obtiene

$$u_{xx} = v_{yx} \quad \text{y} \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Luego, como $v \in C^2(\Omega)$, entonces se tiene la igualdad $v_{xy} = v_{yx}$. Por lo tanto

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Para el caso de v la prueba es completamente análoga. $\square$

El resultado anterior puede considerarse como una propiedad local de las funciones analíticas.

Observación 3. Una implicación directa del teorema anterior es que toda función analítica en Ω es armónica en Ω, esto es, $H(\Omega) \subset A(\Omega)$. Más adelante se mostrará que el recíproco no es necesariamente cierto, para ello se introducirán algunos conceptos.

Introduciremos a continuación el concepto de armónicas conjugadas

Definición 1.2.3. Sea $u \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$. Si existe $v \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$ tal que $f = u+iv$ es analítica, se dice que v es una función armónica conjugada de u en Ω.

En vista de la definición anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $u \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$, si v_1 y v_2 son dos funciones armónicas conjugadas de u, entonces $v_1 - v_2$ es constante.

Demostración. Ver [13], pag 6. $\square$

Con esto mostraremos ahora que $A(\Omega) \not\subseteq H(\Omega)$.

Ejemplo 2. La función $f(z) = \log|z|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pues es localmente la parte real de cualquier determinación analítica de $Log(z)$. Veamos que $\log|z|$ no tiene armónica conjugada en Ω. Consideremos el abierto

$$\Gamma = \mathbb{C} \diagdown \{z \in \mathbb{C} : \mathbf{Im}(z) = 0 \quad y \quad \mathbf{Re}(z) \leqslant 0\}.$$

Entonces por definición de log tenemos

$$Log(z) = log|z| + iArg(z).$$

Si $log|z|$ tuviera una armónica conjugada, digamos $v \in \Omega$, tendríamos que $Arg(z)$ y v son armónicas conjugadas de u en Ω y por tanto en este abierto su diferencia sería una constante, es decir, $v(z) = Arg(z) + k$. Esto implica que v sería discontinua en los puntos de la recta donde z toma valores reales negativos, que está contenida en Ω, lo cuál es una contradicción dado que por hipótesis inicial v es armónica en Ω. Por tanto, $log|z|$ no poseé armónica conjugada Ω. Por lo tanto $A(\Omega) \not\subseteq H(\Omega)$.

Entonces, podemos buscar condiciones que garanticen la existencia de armónicas conjugadas.

Teorema 1.2.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces toda función armónica $u \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$ tiene una función armónica conjugada en Ω.

Demostración. Sea $u \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$. Entonces la función $f = u_x - iu_y$ es analítica en Ω. Por un lado, es de clase $C^1(\Omega)$ pues u es de clase $C^2(\Omega)$ ya que es armónica y por otro lado, cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann pues $u_{xx} = -u_{yy} = (-u_y)_y$ por ser u armónica y $(u_x)_y = u_{xy} = u_{yx} = (u_y)_x$ por la igualdad de las derivadas cruzadas se sigue que $u \in C^2(\Omega)$.

Ahora bien, del **Teorema 1.1.3** se deduce la existencia de una función analítica $F = U + iV$ tal que $F' = f = u_x - iu_y$. Aplicando a F las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos que $U_x - iU_y = u_x - iu_y$, es decir, $(U - u)_x = 0$ y $(U - u)_y = 0$. Dicho de otra forma, $U = u + k$ en Ω, donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.

Definiendo finalmente $g = F - k$ se tiene que el $\mathbf{Re}(g) = u$ e $\mathbf{Im}(g) = V$. Por tanto V es la armónica conjugada de u. □

El recíproco de esta proposición es también cierto, pero necesitaremos algunos resultados antes de estar en condiciones de demostrarlo. También podemos dar un resultado similar y lo enunciaremos en el siguiente corolario.

Corolario 1.2.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo y $v \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$. Entonces existe u tal que $u + iv$ es analítica.

Demostración. Por el teorema anterior existe $u^{'}$ tal que $f = v + iu^{'}$ es analítica. Entonces, por Teorema 1.1.1 parte 3 se puede concluir que $F = if = u^{'} + iv$ es analítica. Considere $u = u^{'}$ y obetenemos el resultado. □

Teorema 1.2.5. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces u es armónica si y sólo si u es localmente la parte real de una función analítica.

Demostración. Sabemos que u es armónica si y sólo si lo es localmente, es decir, si lo es en $D(a, r)$ para cada $a \in \Omega$. Pero en cada disco, u tiene armónica conjugada ya que es un abierto simplemente conexo, por tanto, en dicho disco es la parte real de una función analítica. Recíprocamente, si en cada disco es la parte real de una función analítica, claramente es armónica. □

Corolario 1.2.6. Toda función armónica es de clase C^{∞}.

Demostración. Esta prueba es inmediata, dado que las funciones armónicas son localmente partes reales de funciones analíticas. □

Teorema 1.2.7. Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos, $f \in H(\Omega_1)$, $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $u \in A(\Omega_2)$. Entonces, $u \circ f \in A(\Omega_1)$. Es decir, la composición de una función analítica con una función armónica es una función armónica.

Demostración. Veremos que $u \circ f$ es armónica en $D(a, \delta)$ para cada $a \in \Omega$. Fijemos a y sea $b = f(a)$ y $r > 0$ tal que $D(b, r) \subset \Omega_2$. Como u es armónica, existe $g \in H(D(b, r))$ tal que $\mathbf{Re}g(z) = u(z)$. Aplicando ahora la continuidad de f, existe $\delta > 0$ tal que $f(D(a, \delta)) \subset D(b, r)$. Concluimos entonces que $g \circ f|_{D(a,\delta)} \in H(D(a, \delta))$ y además $\mathbf{Re}(g \circ f|_{D(a,\delta)}) = u \circ f|_{D(a,\delta)}$, con lo cual $u \circ f$ es armónica. □

Ahora, podemos finalmente dar una nueva caracterización de los abiertos simplemente conexos.

Teorema 1.2.8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. La siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Ω es simplemente conexo.
2. Toda función armónica u en Ω tiene una función armónica conjugada en Ω.

Demostración. Ver [13], pag 11. □

Veamos también que en un dominio simplemente conexo, las funciones armónicas pueden ser representadas como sumas de series, para ello daremos la definición de anti-analiticidad.

Definición 1.2.4 (función anti-analítica)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es anti-analítica en D si $\overline{f}$ es analítica en D.

Teorema 1.2.9. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ armónica en Ω. Entonces, $f = \phi + \overline{\varphi}$, donde ϕ, φ son analíticas en Ω. Es decir, toda función armónica se puede escribir como la suma de una función analítica y una función anti-analítica.

Demostración. Como $f = u + iv$ es armónica en Ω, entonces u, v son armónicas de valores reales en Ω. Luego por Teorema 1.2.8 y por el Corolario 1.2.4 , existen $u^{'}, v^{'}$ tales que $u + iv', u^{'} + iv$ son analíticas. Considere las funciones $\phi = \frac{u+u^{'}}{2} + i\frac{v+v^{'}}{2}$ y $\varphi = \frac{u-u^{'}}{2} + i\frac{v^{'}-v}{2}$, usando el Teorema 1.1.1 se tiene que ϕ, φ son analíticas en Ω. Ahora, note que:

$$\begin{aligned}
\phi + \overline{\varphi} &= \left(\frac{u+u'}{2} + \frac{v+v'}{2}\right) + \overline{\left(\frac{u-u'}{2} + i\frac{v'-v}{2}\right)} \\
&= \left(\frac{u+u'}{2} + i\frac{v+v'}{2}\right) + \left(\frac{u-u'}{2} - i\frac{v'-v}{2}\right) \\
&= \left(\frac{u+u'}{2} + \frac{u-u'}{2}\right) + i\left(\frac{v+v'}{2} + \frac{v-v'}{2}\right) \\
&= \left(\frac{u+u'+u-u'}{2}\right) + i\left(\frac{v+v'+v-v'}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2u}{2}\right) + i\left(\frac{2v}{2}\right) \\
&= u + iv \\
&= f.
\end{aligned}$$

Así, f es suma de una función analítica y una función anti-analítica. □

En vista del teorema anterior, si tenemos una función f armónica en Ω y usando también el Teorema de Taylor 1.1.6 podemos ver que en $B(z_0, \delta) \subset \Omega$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_n (\overline{z} - \overline{z_0})^n \tag{1.4}$$

Esta representación es única y es llamada representación canónica de f.

A continuación, presentaremos la definicón de preservación de sentido o de orientación de funciones armónicas, cabe destacar que esta definición es importante para el Principio del argumento para funciones armónicas, precisamente las funciones armónicas que satisfacen el principio del argumento son funciones que preservan sentido.

Definición 1.2.5. Dado un dominio D y una función f armónica en D llamaremos el Jacobiano de f al valor $J(f) = |\partial_z f|^2 - |\partial_{\overline{z}} f|^2$.

Definición 1.2.6. Dado un dominio D y una función f armónica y localmente univalente en D, decimos que f preserva sentido cuando $J(f) > 0$ y que reversa sentido cuando $J(f) < 0$.

Observación 4. 1. En la anterior definición vemos que hace falta el caso en que $J(f) = 0$, pero este caso no puede pasar, pues el Teorema de Lewy garantiza que, bajo las condiciones dadas en dicha definición $J(f) \neq 0$. Ver [10], Pág 689.

2. Las funciones armónicas de $\mathbb{D}$ que preservan sentido también surgen como soluciones de la **Ecuación de Beltrami**, es decir, soluciones a ecuaciones diferenciales parciales elípticas lineales de la forma

$$\overline{\partial_{\overline{z}} f(z)} = \omega(z)\partial_z f(z),$$

donde ω es una función analítica en $\mathbb{D}$. La función ω es llamada la dilatación de f. Además, $\omega(z) < 1$.

Podemos definir el orden de un cero de f mediante la representación canónica $f = h + \overline{g}$. Sea $f : D \to \mathbb{C}$ donde D es un dominio simplemente conexo y f preserva sentido, y sea $z_0 \in D$ tal que $f(z_0) = 0$, luego existe $\delta > 0$ tal que $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, para cada $z \in D(z_0, \delta)$, donde $h(z) = a_0 + \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ y $g(z) = \sum\limits_{k=m}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$. Como f preserva sentido entonces $\overline{\partial_{\overline{z}} f(z)} = \omega(z)\partial_z f(z)$, así $g' = \omega h'$, de esto se sigue que $|g'(z_0)| < |\omega(z_0)||h'(z_0)|$, luego $|mb_m| < |na_n|$ de aquí tenemos que $m > n$ o $m = n$ y $|b_n| < |a_n|$(ver [3], Pág 7.) En cualquier caso decimos que z_0 es un cero de f de orden n.

Teorema 1.2.10. Sea $f : D \to \mathbb{C}$, donde D es un dominio simplemente conexo, f preserva sentido y z_0 es un cero de f de orden n. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $z \in D(z_0, \delta)$, entonces $f(z) = a_n(z - z_0)^n\{1 + \varphi(z)\}$, donde $|\varphi(z)| < 1$.

Demostración. Ver [3], Pág 7. □

Observación 5. 1. Una consecuencia inmediata del Teorema anterior es que los ceros de las funciones que preservan sentido son aislados. Pues, si f preserva sentido y z_0 es un cero de f de orden n, tenemos que $f(z) = (z - z_0)^n(1 + \varphi(z))$, en algún disco $D(z_0, \delta)$. Entonces para z que satisface $0 < |z - z_0| < \delta$ tenemos que $|f(z)| = |z - z_0|^n|1 + \varphi(z)|$. Cómo $|\varphi(z)| < 1$, entonces, $|\varphi(z) + 1| > 0$, así $|f(z)| = |z - z_0|^n|1 + \varphi(z)| > 0$, entonces $f(z) \neq 0$ para todo z que satisface $0 < |z - z_0| < \delta$. Por tanto, los ceros de f son aislados.

2. La hipótesis de que f preserve sentido es esencial. Consideremos $f(z) = z + \overline{z}$, para $z = x + iy$ tenemos que $f(z) = (x + iy) + (x - iy) = 2x$. Los ceros de esta

función son de la forma $z = iy$, fijando un cero, digamos $z_0 = iy_0$ para cada $r > 0$ existe $z = i(y_0 + \frac{r}{2}) \in D(z_0, r)$ y $f(z) = 0$, esto es, existe una función que no preserva sentindo en la cual los ceros de esa función no están aislados.

1.3. Clases S_H y S_H^0

En esta sección se definirán dos clases de gran importancia, pues estudiandolas encontramos algunos resultados muy convenientes para este trabajo. Estas clases fueron definidas con el objetivo que sean generalizaciones de la clase S de Schwarz. Enunciemos el lema de Schwarz.

Lema 1.3.1 (Lema de Schwarz)**.** Sea $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ analítica tal que $f(0) = 0$. Entonces:

1. $|f'(0)| \leq 1$.

2. $|f(z)| \leq |z|$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

3. Si existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $z_0 \neq 0$ y $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces existe $c \in \partial\mathbb{D}$ tal que $f(z) = cz$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

4. Si $|f'(0)| = 1$, entonces existe $c \in \partial\mathbb{D}$ tal que $f(z) = cz$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Ver [7] Pág 173. □

A continuación definiremos la clase S de Schwarz.

Definición 1.3.1. Definimos la clase S de Schwarz como el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analíticas y univalentes en $\mathbb{D}$ que satisfacen las siguientes $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Esto es, la expansión en series de f tiene la forma $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Esta clase S de funciones analíticas ha sido bastante estudiada en el análisis complejo, la cual tiene unas clases análogas S_H y S_H^0 de funciones armónicas que definiremos a continuación. Estas clases tienen propiedades similares, en este trabajo mostraremos una de ellas.

En la anterior sección vimos que una función armónica f tiene una representación en series en un disco $D(z_0, \delta)$. En particular, una función f definida en $\mathbb{D}$ y armónica puede ser escrita como $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, donde $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$. Similarmente, para $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ tenemos la representación

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Así, se tiene $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$. Conociendo esto, recordemos la definición de las clases S_H y S_H^0.

Definición 1.3.2. Definiremos la clase S_H como la clase de todas las funciones $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ armónicas y univalentes en $\mathbb{D}$ que satisfacen las condiciones $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. De igual manera, definimos $S_H^0 = \{f \in S_H | a_{-1} = 0\}$.

De la anterior definición podemos concluir que $S_H^0 \subset S_H$, estas nuevas clases surgen como generalizaciones de la clase S de Schwarz.

Teorema 1.3.2. Si $f \in S_H$, entonces tenemos las siguientes afirmaciones :

1. $f(0) = 0$ y $\left|\frac{\partial f}{\partial z}(0)\right| = 1$

2. $|a_{-1}| < 1$

Demostración. 1. Como $f \in S_H$ entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$, así tenemos que $f(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (0)^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (0)^n} = a_0$. Luego, dado que $f \in S_H$ se obtiene $a_0 = 0$ y por tanto $f(0) = 0$. Ahora, notemos que $\frac{\partial f}{\partial z} = h'$. Por otro lado, $h'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(0) &= h'(0) \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (0)^{n-1} \\ &= a_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Dado que $f \in S_H$ tenemos que $0 < J(f) = |\partial_z f|^2 - |\partial_{\bar{z}} f|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$. Entonces $|g'(z)|^2 < |h'(z)|^2$. De otra parte, sabemos que $h'(z) = a_1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ y $g'(z) = b_1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} n b_n z^{n-1}$, luego:

$$\begin{aligned} |a_{-1}|^2 &= |b_1|^2 \\ &= (|b_1| + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (0)^{n-1})^2 \\ &= |g'(0)|^2 \\ &< |h'(0)|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así, $|a_{-1}|^2 < 1$ y en consecuencia $|a_{-1}| < 1$.

$\square$

Teorema 1.3.3. Si $f \in S$, entonces $f \in S_H^0$.

Demostración. Como $f \in S$ tenemos que f es univalente, $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Por Teorema 1.2.1 se tiene que f es armónica. Dado que f es analítica, entonces $a_{-1} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0) = 0$. Por lo tanto $f \in S_H^0$

$\square$

Observación 6. Del Teorema anterior podemos inferir que los resultados de S_H^0 que podamos extender a S_H, son resultados que se cumplen para algunas funciones analíticas los podemos extender a funciones armónicas, como el que veremos en el Capítulo 3.

Capítulo 2

El principio del Argumento para funciones armónicas

En este capítulo haremos una extensión hacía el conjunto de funciones armónicas del conocido teorema "el principio del argumento." Históricamente, según el libro de Frank Smithies (Cauchy and the Creation of Complex Function Theory, Cambridge University Press, 1997, p. 177), Augustin-Louis Cauchy presentó un teorema similar al anterior el 27 de noviembre de 1831, durante su exilio autoimpuesto en Turín (entonces capital del Reino de Piamonte-Cerdeña) lejos de Francia. Sin embargo, según este libro, solo se mencionaron ceros, no polos, similarmente será demostración mostrada en este trabajo. Este teorema de Cauchy solo se publicó muchos años después, en 1874, en forma manuscrita y, por lo tanto, es bastante difícil de leer. Cauchy publicó un artículo con una discusión sobre ceros y polos en 1855, dos años antes de su muerte.

El principio del argumento clásico para funciones análiticas tiene varias aplicaciones, directamente el teorema de Rouché usa el principio del argumento en su demostración. El principio del argumento se puede utilizar para ubicar eficientemente ceros o polos de funciones meromórfas en una computadora. Incluso con errores de redondeo, la expresión

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

arrojará resultados cercanos a un entero; al determinar estos enteros para diferentes contornos γ se puede obtener información sobre la ubicación de los ceros y los polos.

Algunas pruebas numéricas de la hipótesis de Riemann utilizan esta técnica para obtener un límite superior para el número de ceros de la función $\zeta(s)$ de Riemann dentro de un rectángulo que intersecta la línea crítica, es decir, los números complejos con parte real $\frac{1}{2}$, ver [17].

2.1. El Principio del argumento

En esta sección recordaremos el principio del argumento clásico para funciones analíticas e introduciremos algunos conceptos y resultados necesarios para su generalización al conjunto de funciones armónicas.

Definición 2.1.1 (Dominio de Jordan)**.** Sea D un dominio simplemente conexo que no sea todo $\mathbb{C}$, se dice que D es un dominio de Jordan si ∂D es una curva de Jordan, es decir, es simple y cerrada.

Teorema 2.1.1. Sea D es un dominio de Jordan y $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ una función armónica en D, continua en ∂D que preserva sentido y no se anula en ∂D . Entonces el número de ceros distintos de f en D es finito.

Demostración. Sea $A = \{z \in D | f(z) = 0\}$. Supongamos que A es infinito, luego A tiene un subconjunto infinito numerable, digamos $B = \{z_n | z_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$. Como D es un dominio de Jordan, entonces D es acotado, así existe $R > 0$ tal que $D \subseteq D(0, R)$. Dado que los ceros de f en D están asilados, para cada $z_n \in B$ existe $r_n > 0$ tal que si $z \in D(z_n, r_n) \setminus \{z_n\}$ entonces $f(z) \neq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $\delta_n = \sup\{r > 0 | f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(z_n, r)) \setminus \{z_n\} \quad \text{y} \quad D(z_n, r) \subseteq D\} \geq r_n > 0$. Podemos notar que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D(z_n, \delta_n) \subseteq D \subseteq \ D(0, R)$, así:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \leq R. \tag{2.1}$$

Por otro lado, veamos que $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\delta_n\} > 0$. Como $\delta_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\delta_n\} \geq 0$. Supongamos que $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\delta_n\} = 0$, entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_N < \epsilon$, luego $D(z_N, \delta_N) \subset D(z_N, \epsilon)$. Ahora, como $\delta_N = \sup\{r > 0 | f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(z_N, r) \setminus \{z_N \quad \text{y} \quad D(z_N, r) \subseteq D\}$, entonces existe $z_0 \in D(z_N, \epsilon)$, como ϵ

es arbitrario, entonces los ceros de f en D no están aislados, lo cual es absurdo. Así, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\delta_n\} = r > 0$. Usando la propiedad arquimediana existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned} R &< N_0 r \\ &= \sum_{n=1}^{N_0} r \\ &\leq \sum_{n=1}^{N_0} \delta_n \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n, \end{aligned}$$

usando lo anterior y 2.1 tenemos que $R < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n \leq R$, entonces $R < R$, esto es absurdo y por lo tanto A es finito. $\square$

Ahora, recordemos un concepto clave para el principio del argumento clásico para funciones analíticas

Definición 2.1.2 (Cambio total del argumento)**.** Sean f continua en un dominio Ω y γ una curva cerrada, homotópica a un punto tal que no pasa por un cero de f. Se define

$$\Delta_\gamma \arg f = 2\pi I(f\circ\gamma, 0) = 2\pi\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{dz}{z}\right), \tag{2.2}$$

donde $I(f\circ\gamma, 0)$ es el "número de vueltas" de la curva $f\circ\gamma$ respecto al 0.

Observación 7. Si f es una función armónica sobre un dominio D está bien definido el cambio total del argumento sobre f dado que toda función armónica en D es continua también sobre D.

Dado esto enunciaremos el principio del argumento para funciones analíticas.

Teorema 2.1.2. Sea D un dominio de Jordan acotado por la curva de Jordan C y f una función analítica sobre D y continua en C tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in C$. Entonces

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f = I(f\circ\gamma, 0),$$

donde N es el número de ceros de f en D contados de acuerdo a su multiplicidad.

Demostración. Una prueba de este sería observando que la función $\dfrac{f'}{f}$ tiene un polo simple con residuo n donde f tiene un cero de orden n y por el teorema del residuo tenemos que:

$$
\begin{aligned}
N =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\\
=& \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z}dz\\
=& \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z}dz\right)\\
=& \frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma}\arg f\\
=& I(f\circ\gamma, 0).
\end{aligned}
$$

Así, $N = I(f\circ\gamma, 0)$ donde N es el número de ceros de f en D contados de acuerdo a su multiplicidad. □

Para más comodidad y facilidad en la demostración del resultado principal daremos paso a una nueva definición de la variación total del argumento que, finalmente serán equivalentes. Para ello, empezaremos desde definiciones y hechos básicos de los números complejos.

Observación 8. 1. Una curva simple γ en $\mathbb{C}$ es homeomorfa al intervalo $[0, 1]$.

2. Una curva cerrada y simple o (curva de Jordan) es homeomorfa a $\partial\,\mathbb{D}$.

Definición 2.1.3. . Sea $R \subset \mathbb{C}$ no vacío.

1. El conjunto R abierto, se dice que es un dominio finitamente conexo si es conexo o si está acotado por una curva de jordan C_0 y existen curvas de jordan C_i con $i = 1, 2, \ldots, m$ tales que:

    - Para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ tenemos que $C_i \subset Int(R)$.
    - Si $z \in IntR_i$, entonces $z \notin R$, donde R_i es la región encerrada por C_i.
    - Si $i \neq j$, entonces $C_i \cap C_j = \emptyset$.

2. Se dirá que R es un continuo si es conexo y compacto.

Observación 9. Si R es un dominio finitamente conexo acotado por la curva C_0 que contiene curvas de jordan C_i con $i = 1, 2, \ldots, m$, podemos ver que $\partial R = \bigcup_{i=0}^{m} C_i$.

En vista de la observación anterior podemos definir también la orientación sobre la frontera de una región finitamente conexa.

Definición 2.1.4. Sea R un dominio finitamente conexo acotado por la curva C_0 que contiene curvas de jordan C_i con $i = 1, 2, \cdots, m$. Se dice que la frontera de R está positivamente orientada si C_0 está orientada positivamente(en dirección contraria a las manecillas del reloj) y las demás curvas C_i están orientadas negativamente (en la misma dirección de las manecillas del reloj).

Definición 2.1.5. Sea $z \in \mathbb{C}$ y $z \neq 0$, tenemos la representación polar

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{2.3}$$

Además, si φ satisface la ecucación 2.3 llamaremos a φ un argumento de z

Lema 2.1.3. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ y $z_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ y φ_i un argumento de z_i, entonces $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i$ es un argumento de $\prod_{i=1}^{m} z_i$.

Demostración. Basta mostrar el resultado para dos elementos y luego se sigue inductivamente. Entonces, considere $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, usando la representación polar tenemos que $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)$ y $|z_2| = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 = &(|z_1|(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1))(|z_2|(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2))\\
=&|z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2)\\
=&|z_1 z_2|(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2)\\
=&|z_1 z_2|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\sin\varphi_2)\\
=&|z_1 z_2|[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2) + i(\operatorname{sen}\varphi_2\cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2)]\\
=&|z_1 z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)].
\end{aligned}$$

Así, $\varphi_1 + \varphi_2$ es un argumento de $z_1 z_2$ que era lo que se quería demostrar. $\square$

Lema 2.1.4. Sea φ un argumento de $z \in \mathbb{C}$ no nulo.

1. Si $\phi = \varphi + 2n\pi$, entonces ϕ es un argumento de z para todo $n \in \mathbb{Z}$.

2. Si ϕ es algún argumento de z, entonces $\phi = \varphi + 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración.

1. Como las funciones Coseno y Seno son $2\pi-$periódicas se obtiene que $\cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2n\pi)$ y $\operatorname{sen}(\varphi) = \operatorname{sen}(\varphi + 2n\pi)$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, si φ es un argumento de z, satisface la ecuación 2.3, esto es:

$$\begin{aligned} z =& |z|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \\ =& |z|(\cos(\varphi + 2n\pi) + i \operatorname{sen}(\varphi + 2n\pi)). \end{aligned}$$

   Así, $\phi = \varphi + 2n\pi$ satisface la ecuación 2.3, lo que equivale a decir que ϕ es un argumento de z para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

2. Supongamos que ϕ es otro argumento de z, entonces $z = |z|(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$. Por hipótesis tenemos también que φ es un argumento de z. En consecuencia tenemos que, $z = |z|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$. Igualando, obtenemos las ecucaciones $\cos\phi = \cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\varphi$. Por propiedades de las funciones Seno y Coseno para que se satisfagan $\cos\phi = \cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\varphi$ simultáneamente debe existir $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi = \varphi + 2n\pi$.

$\square$

Lema 2.1.5. Sea $z \in \mathbb{C}$. Si $|z - 1| < 1$, entonces $\operatorname{Re} z > 0$.

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ con $z = a + ib$. Supongamos que $|z - 1| < 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-1)^2 + b^2} <& 1 \\ (1-a)^2 + b^2 <& 1, \quad \text{como } b^2 \geq 0 \\ (1-a)^2 <& 1 \\ |1-a| <& 1 \end{aligned}$$

Así, $0 < a < 2$, por lo tanto $\operatorname{Re}(z) = a > 0$. $\square$

2.2. El argumento de una función complejo-valuada

Definición 2.2.1. Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un continuo y $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ continua, defininimos:

$$M(f, \Gamma) = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|,$$
$$m(f, \Gamma) = \min_{z \in \Gamma} |f(z)|,$$
$$\omega(f, \Gamma) = \max_{z_1, z_2 \in \Gamma} |f(z_1) - f(z_2)|.$$

Observación 10. Estos valores están bien definidos dado que f es continua y Γ compacto.

Con las condiciones anteriores, es decir, $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ continua y Γ un continuo, considerando el caso en que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Gamma$, notemos que $f(z)$ toma infinitos argumentos para cualquier $z \in \Gamma$. Si para cada $z \in \Gamma$ tomamos un valor definitivo de los argumentos de $f(z)$ obtendremos una función $\varphi(z)$ en Γ. Esta es denominada el argumento de valor único de $f(z)$.

Definición 2.2.2. Sean $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un continuo y $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ continua con $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Gamma$, entonces una función $\varphi(z)$ real valuada y continua es denominada el argumento de valor único continuo de $f(z)$ en Γ si

$$f(z) = |f(z)|(\cos(\varphi(z)) + i \sin(\varphi(z))),$$

para todo cada $z \in \Gamma$.

Definición 2.2.3. Sean $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un continuo y $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ continua con $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Gamma$. Si existe una función argumento de valor único continuo de $f(z)$ en Γ diremos que f satisface la condición $(\arg, \Gamma)$.

Lema 2.2.1. Asuma que f satisface la condición $(\arg, \Gamma)$, entonces se tienen las siguientes afirmaciones:

1. Si $\varphi(z)$ es una función argumento de valor único continuo de $f(z)$ en Γ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces la funcion $\phi(z) = \varphi(z) + 2n\pi$ es función argumento de valor único continuo de $f(z)$ en Γ.

2. Si $\varphi(z)$ y $\phi(z)$ son funciones argumento de valor único continuo de $f(z)$ en Γ. Entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi(z) = \varphi(z)+2n\pi$ para cada $z \in \Gamma$. En particular, si $\phi(z_0) = \varphi(z_0)$ en algún punto z_0 de Γ, entonces $\phi = \varphi$ en Γ.

Demostración. 1. Por el Lema 2.1.3 parte 1. deducimos que $\phi(z) = \varphi(z) + 2n\pi$ es un argumento de $f(z)$. Usando la hipótesis de que φ es una función argumento de valor único continuo de $f(z)$ en Γ, deducimos claramente que $\phi(z) = \varphi(z)+2n\pi$ es otra función argumento de valor único continuo de $f(z)$ en Γ.

2. Por el Lema 2.1.3 parte 2. rápidamente se tiene que si $\varphi(z)$ y $\phi(z)$ son funciones argumento de valor único continuo de $f(z)$ en Γ. Entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi(z) = \varphi(z)+2n\pi$ para cada $z \in \Gamma$. Ahora, si existe $z_0 \in \Gamma$ tal que $\phi(z_0) = \varphi(z_0)$. Entonces $\phi(z) = \varphi(z) + 2n\pi$, luego $0 = \phi(z) - \varphi(z) = 2n\pi$ en consecuencia tenemos que $n = 0$. Así, para cada $z \in \Gamma$ se tiene que $\phi(z) = \varphi(z) + 2(0)\pi$, lo que corresponde a $\phi(z) = \varphi(z)$.

□

Lema 2.2.2. Sean $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un continuo y $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ continua. Supongamos que $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$ para cada $z \in \Gamma$, entonces f satisface la condición $(\arg, \Gamma)$.

Demostración. Para cada $z \in \Gamma$, como $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$, podemos ver que existe un agrumento $\alpha(z)$ tal que $\frac{-\pi}{2} < \alpha(z) < \frac{\pi}{2}$. Usando la continuidad de f entonces se tiene que α es continua en Γ, considerando $\varphi(z) = \alpha(z)$ se tiene el resultado. □

Lema 2.2.3. Sean $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un continuo y $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ continua. Si $\omega(f, \Gamma) < m(f, \Gamma)$, entonces f satisface la condición $(\arg, \Gamma)$.

Demostración. Como $0 \leq \omega(f, \Gamma) < m(f, \Gamma) \leq |f(z)|$ para todo $z \in \Gamma$ entonces, $f(z) \neq 0$. Sea $w_0 \in \Gamma$ fijo y φ_0 un argumento de $f(w_0)$. Consideremos la función $g(z) = \frac{f(z)}{f(w_0)}$. Es fácil ver que g es continua en Γ, ya que f es continua en Γ y note que :

$$\begin{aligned}|g(z)-1| &= \left|\frac{f(z)}{f(w_0)}-1\right| \\ &= \left|\frac{f(z)-f(w_o)}{f(w_0)}\right| \\ &= \frac{|f(z)-f(w_o)|}{|f(w_0)|} \\ &\leq \frac{\omega(f,\Gamma)}{m(f,\Gamma)} \\ &< 1\end{aligned}$$

así $|g(z)-1|<1$, entonces, por Lema 2.1.5 tenemos que $\mathrm{Re}(g(z))>0$, en consecuencia del Lema 2.2.2 tenemos que existe $\phi(z)$ un argumento de valor único continuo de $g(z)$ en Γ. Ahora, como $g(z)f(w_0)=f(z)$ usando el Lema 2.1.3 tenemos que $\varphi_0+\phi(z)$ es un argumento de valor único continuo de $f(z)$ en Γ, esto es, f satisface la condición $(\arg,\Gamma)$. □

Lema 2.2.4. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_m$ funciones continuas en el continuo Γ y $f_i(z)\neq 0$ para todos $z\in\Gamma$ y $i=1,2,\ldots,m$. Si $\varphi_i(z)$ es argumento de valor único continuo de $f_i(z)$ para cada $i=1,2,\ldots,m$. Entonces $\sum_{i=1}^m \varphi_i(z)$ es argumento de valor único continuo de $\prod_{i=1}^m f_i(z)$.

Demostración. Cómo cada uno de los φ_i son continuos entonces $\sum_{i=1}^m \varphi_i$ es continuo y del Lema 2.1.3 se sigue $\sum_{i=1}^m \varphi_i(z)$ es argumento $\prod_{i=1}^m f_i(z)$. Así $\sum_{i=1}^m \varphi_i$ es argumento de valor único continuo de $\prod_{i=1}^m f_i(z)$. □

Lema 2.2.5. Sean Γ_1 y Γ_2 continuos de $\mathbb{C}$ homemomorfos (existe un homeomorfismo $h:\Gamma_1\to\Gamma_2$), f_1 continua en Γ_1 con $f_1(z)\neq 0$ para todo $z\in\Gamma_1$ y existe $\varphi_1(z)$ un argumento de valor único de $f_1(z)$ en Γ_1. Considere:
$f_2(z)=f_1(h^{-1}(z))$ y $\varphi_2(z)=\varphi_1(h^{-1}(z))$ para $z\in\Gamma_2$. Entonces φ_2 es un argumento de valor único de $f_2(z)$. En otras palabras, si f_1 satisface $(\arg,\Gamma_1)$ entonces f_2 satisface $(\arg,\Gamma_2)$

Demostración. Si $z\in\Gamma_2$, entonces $h^{-1}(z)\in\Gamma_1$, como $f_1(h^{-1}(z))$ tiene argumento de valor único $\varphi_1(h^{-1}(z))$, así:

$$\begin{aligned} f_2(z) =& f_1(h^{-1}(z)) \\ =& |f_1(h^{-1}(z))|(\cos(\varphi_1(h^{-1}(z))) + i\sin(\varphi_1(h^{-1}(z)))) \\ =& |f_2(z)|(\cos(\varphi_2(z)) + i\sin(\varphi_2(z))) \end{aligned}$$

Por tanto φ_2 es argumento de valor único de $f_2(z)$. $\square$

Lema 2.2.6. Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ continuos tales que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conexo y f continua en Γ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Gamma$ y f satisface $(\arg, \Gamma_1)$ y $(\arg, \Gamma_2)$. Entonces f satisface $(\arg, \Gamma)$.

Demostración. Sea $z_0 \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ y β_0 un argumento de $f(z_0)$. Como f satisface $(\arg, \Gamma_1)$ y $(\arg, \Gamma_2)$ existen $\varphi_1^*(z)$, $\varphi_2^*(z)$ argumentos de valor único de $f(z)$ en Γ_1 y Γ_2 respectivamente. Por Lema 2.1.4 tenemos que $\varphi_1^*(z_0) = \beta_0 + 2n_1\pi$ y $\varphi_2^*(z) = \beta_0 + 2n_2\pi$ para algunos $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Ahora, definamos $\varphi_1(z) = \varphi_1^*(z) - 2n_1\pi$ para $z \in \Gamma_1$ y $\varphi_2(z) = \varphi_2^*(z) - 2n_2\pi$ para $z \in \Gamma_2$. Notemos que $\varphi_1(z_0) = \varphi_2(z_0) = \beta_0$. Ahora, como $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ es conexo, por Lema 2.2.1 parte 2 aplicado a $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ se tiene que $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ para todo $z \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Así, defina:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) & si \quad z \in \Gamma_1 \\ \\ \varphi_2(z) & si \quad z \in \Gamma_2. \end{cases}$$

para cada $z \in \Gamma$, note que φ está bien definida, además $\varphi(z)$ es un argumento de $f(z)$. Usando que Γ_1, Γ_2 son cerrados y φ_1,φ_2 son continuas en Γ_1, Γ_2 respectivamente, entonces φ es continua en Γ. Entonces φ es una función argumento de valor único continuo de f en Γ, esto es, f satisface $(\arg, \Gamma)$. $\square$

Definición 2.2.4. Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un continuo. Decimos que Γ satisface la condición (arg) si toda función f continua tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Gamma$ satisface $(\arg, \Gamma)$.

Lema 2.2.7. Sea $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\} \subset \mathbb{C}$ el cuadrado unitario, entonces S satisface (arg).

Demostración. Sea $f : S \to \mathbb{C}$ continua y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in S$. Tenemos que mostrar que f tiene una función argumento de valor único continua, razonando por reducción al absurdo, supongamos que f no satisface $(\arg, S)$. Subdividiendo S en dos rectángulos congruentes $R_1, R_1^{'}$ tales que $R_1 \cap R_1^{'} \neq \emptyset$ y $R_1 \cup R_1^{'} = S$, entonces f no satisface $(\arg, R_1)$ o $(\arg, R_1^{'})$pues si satisface ambas por Lema 2.2.6 se tiene que f satisface $(\arg, S)$ que fué lo que negamos. Entonces f no satisface la condición $(\arg, R_1)$ o no satisface la condición $(\arg, R_1^{'})$, digamos $(\arg, R_1)$, de la misma forma, subdividamos R_1 en dos rectángulos $R_2, R_2^{'}$ entonces f no satisface $(\arg, R_2)$ o $(\arg, R_2^{'})$ ya que si satisfaciera ambas por Lema 2.2.6 tenemos que f satisface $(\arg, R_1)$ lo cual no es cierto. Repitiendo estos pasos inductivamente obtenemos una sucesión $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de rectángulos y cumple que :

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1} \subset R_n$
2. $diam(R_n) \to 0$
3. $f(z)$ falla en la condición $(\arg, R_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, note que como $f(z) \neq 0$ para todo $z \in S$ entonces $m(f, S) > 0$, sabiendo que $R_n \subset S$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $m(f, R_n) \geq m(f, S) > 0$. También 2. implica que $\omega(f, R_n) \to 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\omega(f, R_N) < m(f, R_N)$, por el Lema 2.2.3 se sigue que f satisface $(\arg, R_N)$, lo cual es absurdo. Por tanto f satisface $(\arg, S)$ y dado que f es arbitraria, S satisface la condición (arg). □

Observación 11. Note que S es un dominio simplemente conexo.

Lema 2.2.8. El intervalo $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} z = 0\}$ satisface la condición (arg).

Demostración. Subdividiendo el intervalo en dos subintervalos similar a lo hecho en el Lema 2.2.7 y la demostración se sigue de manera similar. □

Lema 2.2.9. Sea D un dominio de Jordan, simplemente conexo, entonces D satisface la condición (arg).

Demostración. Por Teorema 1.1.8 tenemos que D es homemorfo a $\mathbb{D}$ y $\mathbb{D}$ es homeomorfo a S, luego D es homeomorfo a S, esto es, existe $h : S \to D$ un homeomorfismo. Considere $g : D \to \mathbb{C}$ continua tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D$. Definamos $f(z) = g(h(z))$ para todo $z \in S$. Por Lema 2.2.7 f satisface $(\arg, S)$. Note también que $f(h^{-1}(z)) = g(h(h^{-1}(z))) = g(z)$, entonces por Lema 2.2.5 g satisface $(\arg, D)$, y como g es arbitraria, entonces D satisface la condición (arg). $\square$

Nota 2.1. Recordemos que dada una curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, denotamos a la imagen directa de $[0,1]$ bajo γ por $|\gamma|$, es decir $|\gamma| = \gamma([0,1])$. Debemos diferenciar que γ es una función y $|\gamma|$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$

Lema 2.2.10. Sea $|\gamma|$ una curva simple y no cerrada, entonces satisface la condición (arg).

Demostración. Usando el Lema 2.2.8 e imitando la prueba del Lema 2.2.9 se sigue el resultado. $\square$

En este punto, introduciremos una definición auxiliar del "**cambio total del argumento**" que por lo pronto llamaremos "variación del argumento" ya que a simple vista parecen no ser iguales pero más adelante haremos mención a un resultado que efectivamente nos verficará que son iguales. Esto, con la finalidad de como se dijo anteriormente, facilitar la demostración del resultado principal de este capítulo.

Definición 2.2.5 (Variación del argumento)**.** Sean γ una curva simple orientada no cerrada con un punto inicial z_1 y punto final z_2 y $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ continua y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in |\gamma|$. Definimos el valor $V_\gamma(\arg f(z)) = \varphi(z_2) - \varphi(z_1)$ como la variación del argumento de $f(z)$ en γ, donde φ es un argumento de valor único continuo de $f(z)$ en $|\gamma|$.

Observación 12. El término anterior está bien definido dado que el Lema 2.2.10 garantiza la existencia de φ.

Lema 2.2.11. 1. Sea γ una curva orientada con un punto inicial z_1 y punto final z_2. Sean $f_i : |\gamma| \to \mathbb{C}$ continuas y $f_i(z) \neq 0$ para todos $i = 1, 2, \ldots, m$ y $z \in |\gamma|$.

Consideremos $g : |\gamma| \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \prod_{i=1}^{m} f_i(z,)$ entonces

$$V_\gamma\left(\arg g(z)\right) = \sum_{i=1}^{m} V_\gamma(\arg f_i(z)).$$

2. Sea f continua y diferente de cero en la curva simple γ que tiene punto inicial z_1 y punto final z_2. Considere z^* un punto de $|\gamma|$ diferente a los puntos extremos y denote γ_1, γ_2 las sub-curvas de γ(trozos de la curva γ) con puntos iniciales z_1,z^* y puntos finales z^*, z_2 respectivamente. Entonces

$$V_\gamma(\arg f(z)) = V_{\gamma_1}(\arg f(z)) + V_{\gamma_2}(\arg f(z))$$

Demostración. 1. Sean $\varphi_i(z)$ el argumento de valor único continuo de $f_i(z)$ para todos $i = 1, 2, \ldots, m$ y $z \in |\gamma|$. Por definición $V_\gamma(\arg f_i) = \varphi_i(z_2) - \varphi_i(z_1.)$ Por Lema 2.1.3 el argumento de valor único continuo de $g(z) = \prod_{i=1}^{m} f_i(z)$ es $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(z)$. Entonces por definición de la variación del argumento tenemos que:

$$\begin{aligned} V_\gamma\left(\arg g(z)\right) &= \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(z_2) - \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(z_1) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\varphi_i(z_2) - \varphi_i(z_1)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} V_\gamma(\arg f_i(z)). \end{aligned}$$

2. Consideremos $\varphi(z)$ el argumento de valor único continuo de $f(z)$ en γ y notemos que:

$$\begin{aligned} V_\gamma(\arg f(z)) =& \varphi(z_2) - \varphi(z_1) \\ =& (\varphi(z_2) - \varphi(z^*)) + (\varphi(z^*) - \varphi(z_1)) \\ =& V_{\gamma_1}(\arg f(z)) + V_{\gamma_2}(\arg f(z)). \end{aligned}$$

□

Ahora definamos la variación del argumento para curvas simples orientadas que además son cerradas.

Definición 2.2.6. Sea C una curva orientada simple y cerrada, f continua y diferente de cero en $|C|$. Tome un número finito de puntos $z_0, z_1, \ldots, z_n \in |C|$ tales que se suceden de acuerdo a la orientación de C. Sean γ_i con $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ subcurvas de C(trozos de la curva C) tales que z_i es el punto inicial y z_{i+1} el punto final, y γ_n la subcurva con punto inicial z_n y punto final z_0. definimos la variación del argumento de f sobre C como:

$$V_C(\arg f(z)) = \sum_{i=0}^{n} V_{\gamma_i}(\arg f(z))$$

Observación 13. Para validar esta definición basta mostrar que $V_C(\arg f(z))$ es el mismo valor independientemente de cuántos puntos $z_0, z_1, \cdots, z_n$ se tomen, para esto solo tenemos que repetir varias veces la parte 2. del Lema 2.2.11

Lema 2.2.12. Sea C una curva orientada simple y cerrada. Entonces se tiene las siguientes afirmaciones

1. Sean f_i continuas y diferentes de cero en $|C|$ para todo $i = 1, 2, \cdots, m$.

$$V_C\left(\arg \prod_{i=1}^{m} f_i(z)\right) = \sum_{i=1}^{m} V_C(\arg f_i(z)).$$

2. Sea f continua y diferente de cero en $|C|$. Entonces $\frac{1}{2\pi} V_C(\arg f(z)) \in \mathbb{Z}$

3. Sea f continua y diferente de cero en $|C|$. Si f satisface la condición $(\arg, C)$, entonces $V_C(\arg f(z)) = 0$

4. Dada f continua en $|C|$ y $f(z) \neq 0$ en $|C|$ y sea $h : |C| \to \mathbb{C}^*$ un homeomorfismo que preserva orientación. Considere $f^*(z) = f(h^{-1}(z))$ con $z \in C^*$ entonces

$$V_C(\arg f(z)) = V_{C^*}(\arg f^*(z))$$

Demostración. 1. Se sigue de la Definición 2.2.6 y de la parte 1. del Lema 2.2.11

2. Seleccionemos un argumento $\varphi_i(z)$ de $f(z)$ en cada una de las curvas γ_i, con $1, 2, \cdots, n$. entonces por Definición 2.2.6:

$$V_C(\arg f(z)) = [\varphi_0(z_1) - \varphi_1(z_1)] + \cdots + [\varphi_{n-1}(z_n) - \varphi_n(z_n)] + [\varphi_n(z_0) - \varphi_0(z_0)]$$

Note que $\varphi_{i-1}(z_i) - \varphi_i(z_i)$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ y $\varphi_n(z_0) - \varphi_0(z_0)$ son diferencias de argumentos del número complejo $f(z_i)$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ y $f(z_0)$.

Entonces por Lema 2.2.1 parte 2. tenemos que $\varphi_{i-1}(z_i) - \varphi_i(z_i) = 2\pi m_i$ para algunos $m_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ y $\varphi_n(z_0) - \varphi_0(z_0) = 2\pi m_0$ para un $m_0 \in \mathbb{Z}$, así:

$$\begin{aligned} V_C(\arg f(z)) = &= [\varphi_0(z_1) - \varphi_1(z_1)] + \cdots + [\varphi_{n-1}(z_n) - \varphi_n(z_n)] + [\varphi_n(z_0) - \varphi_0(z_0)] \\ &= [2\pi m_1] + \cdots + [2\pi m_n] + [2\pi m_0] \\ &= 2\pi \sum_{i=0}^{n} m_i, \end{aligned}$$

en consecuencia $\frac{1}{2\pi} V_C(\arg f(z)) = \sum_{i=0}^{n} m_i \in \mathbb{Z}$.

3. Como f satisface $(\arg, C)$ podemos elegir $\varphi(z) = \varphi_i(z)$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Entonces:

$$\begin{aligned} V_C(\arg f(z)) &= \varphi_0(z_1) - \varphi_1(z_1)] + \cdots + [\varphi_{n-1}(z_n) - \varphi_n(z_n)] + [\varphi_n(z_0) - \varphi_0(z_0)] \\ &= [\varphi(z_1) - \varphi(z_1)] + \cdots + [\varphi(z_n) - \varphi(z_n)] + [\varphi(z_0) - \varphi(z_0)] \\ &= 0 + \cdots + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. Se sigue de la Definición 2.2.6 y del Lema 2.2.5

□

Observación 14. De la parte 2. del Lema 2.2.12 podemos ver una importante similitud entre las definiciones de **Variación del argumento** y **Cambio total del argumento**, pues, con las condiciones necesarias se tiene que $I(f \circ \gamma, 0) \in \mathbb{Z}$, ver [7]

Corolario 2.2.13. 1. Sea C una curva orientada simple y cerrada, f continua en $|C|$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in |C|$. Dado $n \in \mathbb{N}$,se tiene que :

$$V_C(\arg[f(z)]^n) = nV_C(\arg f(z)). \tag{2.4}$$

2. Sea C una curva orientada simple y cerrada y $f : |C| \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z_0$ para algún $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces $V_C(\arg f(z)) = 0$.

Demostración. 1. De la parte 1. del Lema 2.2.12 tenemos que:

$$
\begin{aligned}
V_C(\arg[f(z)]^n) =& \sum_{i=1}^{n} V_C(\arg f(z)) \\
=& nV_C(\arg f(z)).
\end{aligned}
$$

2. Como $z_0 \neq 0$ usamos su representación polar $z_0 = r_0(\cos(\varphi_0) + \operatorname{sen}(\varphi_0))$. Entonces, considerando $\varphi(z) = \varphi_0$ para todo $z \in |C|$, tenemos que $\varphi(z)$ es un argumento de valor único continuo de f. Así f satisface $(\arg, C)$ y por Lema 2.2.12 parte 4 tenemos que $V_C(\arg f(z)) = 0$.

□

Lema 2.2.14. Sean C una curva orientada, cerrada, simple y F continua en C. Además, suponga que $F = G + f$ con $|f(z)| < |G(z)|$ para todo $z \in C$ y f, G son también continuas en C. Entonces $V_C(\arg F(z)) = V_C(\arg G(z))$

Demostración. Observemos que la suposición de que $|f(z)| < |G(z)|$ implica que $0 < |G(z)| \leq |F(z)|$ y a su vez que, F, G no se anulan en C. Consideremos la función auxiliar $g : C \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$. g es continua pues, F, G son continuas y G nunca se hace cero. De la parte 1. del Lema 2.2.12 tenemos que:

$$
V_C(\arg, F(z)) = V_C(\arg G(z)) + V_C(\arg g(z)), \tag{2.5}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
|g(z) - 1| =& \left| \frac{F(z)}{G(z)} - 1 \right| \\
=& \frac{|F(z) - G(z)|}{|G(z)|} \\
\leq& \frac{|f(z)|}{|G(z)|} \\
<& 1,
\end{aligned}
$$

entonces por Lema 2.1.5 tenemos que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ y usando el 2.2.2 podemos afirmar que g satisface la condición $(\arg, C)$. Luego, de la parte 3. del Lema 2.2.12 concluimos que $V_C(\arg g(z)) = 0$, además, reemplazando en la ecucación 2.5 obtenemos

$$
V_C(\arg, F(z)) = V_C(\arg G(z)).
$$

$\square$

Lema 2.2.15. Sean R un dominio de Jordan simplemente conexo con $C = \partial R$ la curva de jordan arbitrariamente orientada y f continua en R con $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \overline{R}$. Entonces $V_C(\arg f(z)) = 0$

Demostración. Por Lema 2.2.9 R satisface la condición (arg), esto es, f satisface $(\arg, R)$, entonces existe $\varphi(z)$ un argumento de valor único continuo de $f(z)$ en R, en particular, funciona en C. En consecuencia, f satisface $(\arg, C)$ y por Lema 2.2.12 parte 3 se sigue el resultado. $\square$

A continuación, en vista de las definiciones 2.1.4 y 2.2.6 se puede introducir la variación del argumento de funciones sobre la frontera de un dominio finitamente conexo. Esta definición es clave en la demostración del resultado principal de este capítulo pues, se verá al dominio en cuestión como un dominio finitamente conexo.

Definición 2.2.7 (Variación del argumento sobre un deominio finitamente conexo)**.** Sea R un dominio finitamente conexo con frontera orientada $\partial R = \bigcup_{i=0}^{m} C_i$ donde C_0 es la curva que acota a R y C_i son las curvas de jordan contenidas en R para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Sea f continua en R tal que f no se anula en ∂R. Se define la variación del argumento de f sobre ∂R como el valor:

$$V_{\partial R}(\arg f) = V_{C_0}(\arg f) - \sum_{i=i}^{m} V_{C_i}(\arg f) \tag{2.6}$$

Dada esta definición se siguen resultados directamente de algunos que ya tenemos como los siguientes.

Lema 2.2.16. Sea $R \subset \mathbb{C}$ un dominio finitamente conexo con frontera orientada $\partial R = \bigcup_{i=0}^{m} C_i$ donde C_0 es la curva que acota a R y C_i son las curvas de jordan contenidas en R para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Entonces se cumple lo siguiente:

1. Sea $f : \overline{R} \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{R}$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{R}$. Entonces

$$V_{\partial R}(\arg f) = 0$$

2. Sea F continua en $\overline{R}$. Además, suponga que $F = G + f$ con $|f(z)| < |G(z)|$ para todo $z \in \overline{R}$ y f, G son también continuas en ∂R. Entonces

$$V_{\partial R}(\arg, F(z)) = V_{\partial R}(\arg G(z))$$

Demostración. La demostración de los incisos 1. y 2. se siguen de manera similar a los Lemas 2.2.14 y 2.2.15 respectivamente. □

2.3. Relación entre la variación del argumento y el índice topológico

Esta sección es fundamental en este trabajo dado que, nos permitirá relacionar de alguna forma **la variación del argumento** y **el índice topológico**. En vista de la Definición 2.1.2 y el objetivo de esta sección, relacionaremos también **la variación del argumento** y **el cambio total del argumento** puesto que por la definición 2.1.2 **el índice topológico y el cambio total del argumento** están relacionados directamente.

Primeramente, consideremos un dominio $R \subset \mathbb{C}$ acotado por la curva $C = \partial R$ orientada y una función $f : \overline{R} \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{R}$, también, sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |f(C)|$, donde $|f(C)| = \{w \in \mathbb{C} : w = f(z) \quad \text{para algún} \quad z \in C\}$. Entonces, la función $f(z) - z_0$ es también continua en $\overline{R}$ y no se anula en C. Luego, la Definición 2.2.6 es válida para $f(z) - z_0$. Dicho esto, enunciemos el siguiene teorema.

Teorema 2.3.1. Sean $R \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado por la curva $C = \partial R$ orientada $f : \overline{R} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{R}$ y $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |f(C)|$. Entonces

$$I(f \circ C, z_0) = \frac{1}{2\pi} V_C(\arg(f(z) - z_0)). \tag{2.7}$$

Demostración. Ver [12] pag. 398 □

Observación 15. De este teorema podemos deducir en particular que si $0 \in \mathbb{C} \setminus |f(C)|$, entonces tenemos que $I(f \circ C, 0) = \frac{1}{2\pi} V_C(\arg f(z))$.

Corolario 2.3.2. Sea $R \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado por la curva $C = \partial R$ orientada , $f : \overline{R} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{R}$ tal que f no se anula en C, entonces:

$$\Delta_C(\arg f) = V_C(\arg f).$$

Demostración. La demostración se sigue directamente del Teorema 2.3.1 y de la obsevarción anterior. □

2.4. El Principio del argumento para funciones armónicas

En esta sección daremos uso a lo visto anteriormente en este capítulo para enunciar y demostrar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 2.4.1 (El Principio del argumento para funciones armónicas)**.** Sea una función $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ armónica en D y continua en C que preserva sentido, donde D es un dominio de Jordan y $C = \partial D$ orientada positivamente. Suponga que f no se anula en C. Entonces

$$\Delta_C \arg f = 2\pi N,$$

donde N es el número total de ceros de f en D contados de acuerdo a su multiplicidad.

Demostración. Primero supongamos que f no tiene ceros en D entonces por Lema 2.2.15 tenemos que $\Delta_C \arg f = 0$ y dado que f no tiene ceros entonces $N = 0$. Así, se tiene el resultado. Ahora, supongamos que f tiene ceros en D. Usando el Teorema 2.1.1 solo hay un número finito de ceros distintos en D, digamos z_j con $j = 1, 2 \ldots, m$. Ahora, como f preserva sentido, tenemos que los ceros de f están asilados, en consecuencia, existe $\delta > 0$ tal que $B(z_j, \delta) \subset D$ y $B(z_j, \delta) \cap B(z_i, \delta) = \emptyset$ siempre que $i \neq j$ para todos $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Considere las circunferencias $\gamma_i = \partial B(z_i, \delta)$. Sea la curva Γ la curva que se mueve positivamente por C entrando por los γ_j y luego regresa a C. Note que $\Gamma = C \cup \bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i$. Usando la Definición 2.2.7 tenemos que $\Delta_\Gamma \arg f = \Delta_C \arg f - \sum\limits_{i=1}^{m} \Delta_{\gamma_i} \arg f$. Ahora, notemos que Γ no encierra los ceros f en D, por Lema 2.2.15 concluimos que $\Delta_\Gamma \arg f = 0$, en concescuencia tenemos que

$\Delta_C \arg f = \sum_{i=1}^{m} \Delta_{\gamma_i} \arg f$, lo que convierte el problema global a un problema local. Ahora, sea z_0 un cero de f en D de multiplicidad n, entonces, existe $\delta > 0$ tal que $f(z)$ puede representarse como $f(z) = a_n(z - z_0)^n\{1 + \varphi(z)\}$, donde $|\varphi(z)| < 1$ para todo $z \in B(z_0, \delta)$. Así, si $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \delta\}$:

$$\begin{aligned}
\Delta_\gamma \arg f =& \Delta_\gamma \arg(a_n(z - z_0)^n\{1 + \varphi(z)\}) \\
=& \Delta_\gamma \arg(a_n) + \Delta_\gamma \arg(z - z_0)^n + \Delta_\gamma \arg(1 + \varphi(z)) \\
=& \Delta_\gamma \arg((z - z_0)^n) + \Delta_\gamma \arg(1 + \varphi(z)) \\
=& n\Delta_\gamma \arg(z - z_0) + \Delta_\gamma \arg(1) \\
=& n(2\pi) + 0 \\
=& 2n\pi.
\end{aligned}$$

Luego, como cada cero z_i con $i = 1, 2 \ldots, m$ de f en D tiene una multiplicidad n_i, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_C \arg f =& \sum_{i=1}^{m} \Delta_{\gamma_i} \arg f \\
=& \sum_{i=1}^{m} 2n_i\pi \\
=& 2\pi \sum_{i=1}^{m} n_i \\
=& 2\pi N
\end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f = N$. $\square$

Capítulo 3

Normalidad de la clase S_H

3.1. Normalidad de la clase S_H

En este capítulo demostraremos un resultado de S_H, con un claro análogo en S_H^0 y S. Dado que la imagen de D bajo una función $f \in S_H$ no alcanza a ser todo el plano, el resultado consiste en estimar una constante absoluta ξ para la cual las funciones de S_H alcanzan todos los valores de los círculos $D(0, R)$ para $R < \xi$. Antes de enunciar el teorema principal de este capítulo nos interesa estudiar la representación en series de una función de la forma $R(\theta)e^{i\phi(\theta)}$, donde R y ϕ satisfacen algunas propiedades, más aún buscamos desigualdades con los coeficientes de la serie asociada a la función $R(\theta)e^{i\phi(\theta)}$. En particular, las características que nos interesan de ϕ y R son:

1. $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que ϕ es no decreciente y $\phi(2\pi) = \phi(0) + 2\pi$

2. $R : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Bajo esto, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. Sean ϕ y R funciones tales que $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que ϕ es no decreciente y $\phi(2\pi) = \phi(0) + 2\pi$ y $R : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Entonces $Re^{i\phi}$ tiene su representación en series, dada por

$$R(\theta)e^{i\phi(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}.$$

Demostración. Ver [15], Pág 185. $\square$

En nuestro trabajo usaremos el caso particular $R(\theta) = 1$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. R.R. Hall en [15] demostró una desigualdad bastante interesante e importante para la demostración del teorema principal de este capítulo, la cual enunciaremos como sigue.

Teorema 3.1.2. Consideremos la clase:

$$\Phi = \{\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} | \phi \quad \text{es no decreciente y} \quad \phi(2\pi) = \phi(0) + 2\pi\}.$$

Entonces $\inf\limits_{\phi \in \Phi} \{\frac{1}{2}|C_{-1}|^2 + |C_0|^2 + \frac{1}{2}|C_1|^2\} = \frac{27}{8\pi^2}$. Donde C_{-1}, C_0 y C_1 son coeficientes de las series de $e^{i\phi(\theta)}$, para toda $\phi \in \Phi$.

Demostración. Ver [15], Pág 186. $\square$

Observación 16. Del anterior teorema se puede concluir la siguiente desigualdad:

$$\frac{27}{8\pi^2} \leq \frac{1}{2}|C_{-1}|^2 + |C_0|^2 + \frac{1}{2}|C_1|^2,$$

para toda $\phi \in \Phi$, donde C_{-1}, C_0 y C_1 son coeficientes de la serie $e^{i\phi(\theta)}$.

A continuación, enunciaremos un teorema de topología necesario en este trabajo.

Teorema 3.1.3. Sea X un espacio métrico compacto, $f : X \to Y$ una función continua en X y $1 - 1$ entonces la función $f^{-1} : Y \to X$ es continua.

Demostración. Ver [16], pág 90. $\square$

Teorema 3.1.4. Sea $f \in S_H$, dado $t \in \mathbb{R}, t > 0$ tal que $\overline{D(0,t)} \subseteq f(\mathbb{D})$, entonces $f^{-1}(D(0,t)) = \{z \in \mathbb{D} \,|\, f(z) \in D(0,t)\}$ es simplemente conexo.

Demostración. Como $D(0,t)$ es simplemente conexo, por Teorema 1.1.8 existe un homeomorfismo $h : \mathbb{D} \to D(0,t)$. Dado que $f \in S_H$, entonces f es univalente, por tanto existe $f^{-1} : f(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}$, como $f \in S_H$ tenemos que f es armónica en $\mathbb{D}$, así f es continua en $\mathbb{D}$. Sea $r = \text{mín}\{|z - w| | z \in f^{-1}(\overline{D(0,t)}), w \in \partial\mathbb{D}\} > 0$, entonces $f^{-1}(D(0,t)) \subset f^{-1}(\overline{D(0,t)}) \subset \overline{D(0, 1 - \frac{r}{2})} \subset \mathbb{D}$. Como f es continua en $\mathbb{D}$ entonces

$\phi = f|_{\overline{D(0,1-\frac{r}{2})}}$ es continua en $\overline{D(0,1-\frac{r}{2})}$ y dado que $\overline{D(0,1-\frac{r}{2})}$ es compacto, por Teorema 3.1.3 tenemos que la función $\phi^{-1} : f\left(\overline{D(0,1-\frac{r}{2})}\right) \to \overline{D(0,1-\frac{r}{2})}$ es continua. Ahora, consideremos $g = \phi^{-1}|_{D(0,t)} : D(0,t) \to f^{-1}(D(0,t))$, luego g es continua en $D(0,t)$. Veamos ahora que g es biyectiva:

1. Sean $z_1, z_2 \in D(0,t)$ tales que $g(z_1) = g(z_2)$, entonces $f(g(z_1)) = f(g(z_2))$, así $z_1 = z_2$, así, g es inyectiva.

2. Sea $w \in f^{-1}(D(0,t))$. Entonces $f(w) \in D(0,t)$, consideremos $z = f(w)$ entonces $g(z) = g(f(w))$, así $g(z) = w$. Luego, g es sobre.

Entonces g es biyectiva, además g es continua, por tanto $g : D(0,t) \to f^{-1}(D(0,t))$ es un homeomorfismo. Ahora, como D es homeomorfo a $D(0,t)$ y $D(0,t)$ es homeomofo a $f^{-1}(D(0,t))$, entonces $\mathbb{D}$ es homeomorfo a $f^{-1}(D(0,t))$, nuevamente usando el Teorema 1.1.8, concluimos que $f^{-1}(D(0,t))$ es simplemente conexo. $\square$

Ahora, procedemos a enunciar el resultado principal del capítulo.

Teorema 3.1.5. Sea $f \in S_H$. Hay una constante absoluta ξ que satisface

$$0 < \xi \leq \frac{2\pi\sqrt{6}}{9}$$

tal que f omite algunos valores en cada círculo $\{z \in \mathbb{C}\,|R = |z|\}$ para $R \geq \xi$.

Demostración. Demostremos este resultado por contrarecíproco. Supongamos que $f \in S_H$ alcanza todos los valores w tales que $|w| \leq t$, donde $t \in \mathbb{R}$ es una constante positiva fija. Notemos que por Teorema 3.1.4 tenemos que $f^{-1}(D(0,t))$ es simplemente conexo. Luego, el Teorema del mapeo de Riemann 1.1.10 nos garantiza la existencia de un mapeo conforme $\varphi : \mathbb{D} \to f^{-1}(D(0,t)) \subset \mathbb{D}$, además, $\varphi(0) = 0$ y $\varphi'(0) > 0$. Usando ahora el Teorema de Extensión de Caratheodory 1.1.11 φ la podemos extender continuamente a un homemorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ a $\overline{f^{-1}(D(0,t))}$, entonces $\varphi(\mathbb{D}) = f^{-1}(D(0,t))$ y $\varphi(\partial\,\mathbb{D}) = \partial(f^{-1}(D(0,t)))$. Notemos que la función $\frac{1}{t}[f \circ \varphi]$ es un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ en el mismo. En consecuencia, para $z \in \partial\,\mathbb{D}$ con $z = e^{i\theta}$ tiene la siguiente forma:

$$\frac{1}{t}[f \circ \varphi](e^{i\theta}) = e^{i\alpha(\theta)}$$

Donde $\alpha(\theta)$ es creciente y $\alpha(2\pi) = \alpha(0) + 2\pi$. Por Teorema 3.1.1 sabemos que, $e^{i\alpha(\theta)}$ puede ser representada en series de la siguiente forma $e^{i\alpha(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}$. Así, para $z \in \partial\mathbb{D}$ con $z = e^{i\theta}$ tenemos $f(\varphi(e^{i\theta})) = e^{i\alpha(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} tC_n e^{in\theta}$. Puesto que la representación en series es única, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$ tenemos la siguiente igualdad:

$$f(\varphi(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} tC_n z^n$$

Luego, $h(\varphi(z)) + \overline{g(\varphi(z))} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} tC_n z^n$. Entonces:

$$\begin{aligned} tC_1 &= [h(\varphi(0))]' \\ &= h'(\varphi(0))\varphi'(0) \\ &= h'(0)\varphi'(0) \\ &= a_1\varphi'(0). \end{aligned}$$

Así, concluimos que $tC_1 = a_1\varphi'(0)$. Razonando de igual manera también tenemos la siguiente expresión $tC_{-1} = a_{-1}\varphi'(0)$.

Como $tC_0 = tC_0 + \sum_{n=1} tC_n(0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} tC_n(0^n) = f(\varphi(0)) = f(0) = 0$, entonces $tC_0 = 0$, y por tanto $C_0 = 0$. Usando el Lema de Schwarz tenemos que $|\varphi'(0)| \leq 1$. Luego, como $\frac{1}{2}|C_{-1}|^2 + |C_0|^2 + \frac{1}{2}|C_1|^2 \geq \dfrac{27}{8\pi^2}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{27}{8\pi^2} &\leq \frac{1}{2t^2}|a_{-1}\varphi'(0)|^2 + |C_0|^2 + \frac{1}{2t^2}|a_1\varphi'(0)|^2 \\ &\leq \frac{1}{2t^2}\left(|a_{-1}|^2|\varphi'(0)|^2 + |\varphi'(0)|^2\right) \\ &\leq \frac{|\varphi'(0)|^2}{2t^2}\left(|a_{-1}|^2 + 1)\right) \\ &\leq \frac{1}{2t^2}\left(|a_{-1}|^2 + 1)\right) \\ &< \frac{1}{2t^2}(1+1)) \\ &= \frac{1}{2t^2}(2) \\ &= \frac{1}{t^2}, \end{aligned}$$

entonces $t^2 < \dfrac{8\pi^2}{27}$. Así:

$$\begin{aligned} t &< \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{27}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi\sqrt{3}}{\sqrt{27}\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{6}}{9}. \end{aligned}$$

Por tanto, $t < \frac{2\pi\sqrt{6}}{9}$. □

Corolario 3.1.6. Sea $f \in S_H^0$. Existe una constante absoluta ξ_0 que satisface

$$0 < \xi_0 \leq \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

tal que f omite algunos valores en cada círculo $\{z \in \mathbb{C} \,|\, R = |z|\}$ para $R \geq \xi_0$.

Demostración. Sea $f \in S_H^0$, como $S_H^0 \subset S_H$ tenemos que $f \in S_H$ y de esta forma, usando el teorema anterior obtenemos que $\frac{27}{8\pi^2} < \frac{1}{2t^2}\left(|a_{-1}|^2 + 1\right)\right)$. Como $f \in S_H^0$ se tiene que $a_{-1} = 0$. Entonces, $\frac{27}{8\pi^2} < \frac{1}{2t^2}$, luego $2t^2 < \frac{8\pi^2}{27}$, y por tanto:

$$\begin{aligned} t^2 &< \frac{8\pi^2}{27(2)} \\ t^2 &< \frac{4\pi^2}{27} \\ t &< \frac{2\pi}{\sqrt{27}} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{3}}{\sqrt{27}\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{3}}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

□

Observación 17. Notemos que para $f \in S$ tenemos este resultado pues $S \subset S_H^0$, es decir, podemos ver estos resultados como analogías entre la clase S y las clases S_H^0 y S_H.

Bibliografía

[1] J. Clunie and T. Sheil-Small, Harmonic univalent functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* Ser.A.I, **9** (1984), 3-25.

[2] J. Conway, *Functions of One Complex Variable.* 2ed. Springer-Verlag, New York, 1978.

[3] P. Duren and W. Hengartner, A survey of harmonic mappings in the plane. *Texas Tech University, Mathematics Series*, **18** (1992), 1-15.

[4] T. H. Gronwall, Some remarks on conformal representation. *Ann. Math.*, (*Princeton*), **16**, (1914/15), 72-76.

[5] L. Alhlfors,*Complex Analysis.* 3ed Mc Graw - Hill, 1979.

[6] J. Marsden and M. Hoffman, *Análisis básico de variable compleja.* Trillas, México, 1996.

[7] B. Palka, *An Introduction to Complex Function Theory.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] R. Churchill and J. Brown, *Complex Variables and Applications.* McGraw-Hill education, 2 Penn Plaza, New York, 9 edition, 2009.

[9] W. Hengartner and G. Schober, On the boundary behavior of orientation-preserving harmonic mappings, *Complex Variables Theory Appl.* **5** (1986), 197-208.

[10] H. Lewy, on the non-vanishing of the jacobian in certain one-to-one mappings, University of California, 1936.

[11] M. Cristea, A generalization of argument principle. *Faculty of Mathematics, University of Bucharest,Romania.* Ser.A.I, **9** (2007).

[12] T. Radó And P.V. Reichelderfer, *Continuous Transformations in Analysis With an Introduction to Algebraic Topology.* Springer-Verlag , Berlin, 1955.

[13] A. Ruíz, (2019). *Teorema de Radó Kneser Choquet como antecedente del teorema de Riemann* (Tesis de pregrado). Universidad de Córdoba, Montería, Colombia.

[14] O. Giraldo, (2018). *Teorema de la convergencia en el sentido del kernel de Carathéodory* (Tesis de pregrado). Universidad de Córdoba, Montería, Colombia.

[15] R.R Hall, On an inequality of E. Heinz. *University of York Helsington, England.* **9** (1982).

[16] W. Rudin *Principles of Mathematical Analysis* (Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1976).

[17] R.J. Backlund *Sur les zéros de la fonction zeta(s) de Riemann* (C. R. Acad. Sci. Paris, 1979-1982).

[18] N.H. Asmar and L. Grafakos *Complex analysis with applications* (University of Missouri, Department of Mathematics)