



Estudio comparativo de dos correlaciones cuánticas tipo discordia en sistemas de qubits

Hernán Vega Benítez

Proyecto de Trabajo de Grado en Matemáticas

Supervisor:

Prof. Dr. Cristian Edwin Susa Quintero
Departamento de Física y Electrónica

Co-Supervisor:

Dr. Jerson Manuel Borja Soto

Universidad de Córdoba
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas y Estadística
Montería, Córdoba
2021

Agradecimientos

Agradezco a Dios por la familia la cual me ha hecho participe. Agradezco especialmente a mis padres Hernán Vega y Martha Benítez por todo su amor, interés, comprensión y dedicación durante todo este proceso, al profesor Cristian Susa por permitirme desarrollar este trabajo bajo su supervisión, por todos sus consejos y por ser tan atento con todos sus estudiantes.

Agradezco a todos los profesores del departamento de Matemáticas y Estadística por la formación y atención, en especial a Jerson Borja, Luis Benítez, Jorge Reyes, Carlos Banquet, Abraham Arenas, Jimmy Lloreda, porque aprendí muchos de ellos y espero seguir haciéndolo.

Resumen

Uno de los aspectos más importantes en el contexto de información cuántica del cual hacen uso las llamadas tecnologías cuánticas, es el de correlaciones cuánticas. En particular, el denominado entrelazamiento cuántico (traducción acogida para el termino Entanglement), que ha sido arduamente estudiado como una correlación intrínseca de estados cuánticos, y como recurso físico para desarrollo de protocolos de información y computación cuántica [2]. Sin embargo, desde el año 2000 los reportes sobre nuevas correlaciones cuánticas más generales que el entrelazamiento, originalmente denominada discordia cuántica [3] abrieron todo un campo de investigación. Dado que estas correlaciones son importantes, no solo desde un punto de vista teórico de su definición y propiedades, sino también desde una perspectiva de aplicación como recurso cuántico para futuras tecnologías, y que estas dependen de medidas locales realizadas sobre las partes del sistema haciendo que existan muchas formas de definir correlaciones tipo discordia cuántica, esto es gracias a que en mecánica cuántica se cuenta con diversas transformaciones locales, como por ejemplo; transformaciones unitarias, medidas de von Neumann, proyecciones, etc [4].

En este trabajo se presenta un estudio comparativo de dos cuantificadores de correlaciones tipo discordia cuántica; una definición inducida de la información mutua (a la que originalmente se le atribuye el nombre de discordia), y una definición basada en coherencia, que denominaremos potencia de interferometría. La comparación se hace sobre las definiciones y propiedades de los cuantificadores.

Específicamente se realizó una comparación sistemática de la discordia original y la potencia de interferometría sobre estados mezclados como sigue: i) estados combinados con ruido blanco, en el que uno de los componentes de la mezcla es el operador identidad, ii) mezcla de dos estados cuánticos correlacionados, y iii) mezcla de un estado correlacionado con un estado producto. Los tres casos pueden parametrizarse con un único parámetro p con $0 \leq p \leq 1$. La variación del parámetro, modela de forma sencilla la acción de canales de ruidos que transforman un estado cuántico en otro. Sin embargo, aquí no nos interesamos por modelar un ruido en específico, sino en estudiar el comportamiento de las correlaciones en los casos establecidos, donde observamos sus definiciones, algunas de sus propiedades y la forma de calcularlas para estados cuánticos de dos qubits, los resultados ilustran el comportamiento de éstos dos cuantificadores, los cuales toman valores diferentes para estados mezclados.

También, se realizó el estudio comparativo del comportamiento de los dos cuantificadores en la evolución de estados cuánticos de qubits en un entorno disipativo, los resultados ilustran el efecto sobre éstos dos cuantificadores debido a la interacción con un reservorio,

cuyos parámetros son controlados dentro del régimen de Born-Markov.

Índice general

1. Introducción	9
2. Objetivos	11
2.0.1. General	11
2.0.2. Específicos	11
3. Estados cuánticos y correlaciones cuánticos	13
3.1. Estados cuánticos y correlaciones cuánticas	13
3.2. Sistemas cuánticos bipartitos	14
3.3. Correlaciones a nivel de discordia	14
3.4. Medidas para las correlaciones cuánticas	17
3.4.1. Medidas geométricas	17
3.4.2. Medidas informativas inducidas por la medición	17
3.4.3. Medidas basadas en la coherencia	17
4. Discordia cuántica para diferentes estados de dos qubits	19
4.1. Discordia cuántica original	19
4.1.1. Expresión analítica para la discordia Original	21
4.2. Discordia cuántica como potencia de interferometría	22
4.3. Discordia original vs. Potencia de interferometría	24
4.3.1. Discusión de resultados	27
5. Dinámica de discordia cuántica en sistemas abiertos	29
5.1. Descripción de la dinámica cuántica	29
5.1.1. Ecuación maestra cuántica	30
5.2. Dinámica de las dos correlaciones tipo discordia	32
5.2.1. Discusión de resultados	36
5.3. Conclusiones	37
A. Medidas en la Mecánica Cuántica	39
A.0.1. Medidas PVOM	40
B. Sistemas propios del Hamiltoniano efectivo	41

Capítulo 1

Introducción

La teoría cuántica ha sido asombrosamente exitosa por aproximadamente un siglo en la explicación de fenómenos a escalas atómicas. Más aún, ha permitido abrir nuevos caminos en el desarrollo de tecnologías; láseres, dispositivos semiconductores, paneles solares, y resonancia magnética, por mencionar algunos ejemplos. La aplicación directa de las leyes cuánticas al procesamiento de la información promete revolucionar también el sector de la tecnología de la información y la comunicación, lo que algunos autores han denominado la era de las “Tecnologías Cuánticas 2.0” [1].

En particular, el denominado entrelazamiento cuántico (traducción acogida para el termino del Inglés *entanglement*), ha sido arduamente estudiado como una correlación intrínseca de estados cuánticos, y como recurso físico para desarrollo de protocolos de información y computación cuántica [2]. Sin embargo, desde el año 2000 los reportes sobre nuevas correlaciones cuánticas más generales que el entrelazamiento, originalmente denominada discordia cuántica [3], abrieron todo un campo de investigación. Actualmente, existe aún varias cuestiones sin responder acerca de este tipo de correlaciones cuánticas.

Uno de los aspectos más importantes en el contexto de información cuántica del cual hacen uso las tecnologías mencionadas, es el de correlaciones cuánticas (QCs), el cual en las últimas décadas, ha recibido un interés creciente en cuanto a su entendimiento y caracterización, con un progreso notable. Seguir adelante con tal investigación es importante por dos razones principales. Desde un punto de vista fundamental, arroja luz sobre las últimas fronteras del mundo cuántico, es decir, sobre los rasgos más elementales que distinguen el comportamiento de un sistema cuánticamente correlacionado de uno completamente atribuido a una distribución de probabilidad clásica conjunta. Desde el punto de vista práctico, puede revelar tareas operativas en las que las QCs, incluso en ausencia de entrelazamientos, pueden traducirse en una mejora cuántica, dando así recursos más resistentes y más accesibles para futuras tecnologías cuánticas [4, 5].

El entrelazamiento es uno de los recursos más fundamentales de la teoría de la información cuántica, puede reconocerse como una consecuencia directa de dos ingredientes claves de la mecánica cuántica: el principio de superposición y la estructura tensorial del espacio de Hilbert. Dentro del conjunto de estados entrelazados, uno puede distinguir aún más algunas capas de formas más estrictas de comportamiento no clásico. En particular, algunos

pero no todos, los estados entrelazados son direccionables [6] , y algunos, pero no todos, los estados direccionables son no-locales en el sentido de Bell [7] . Dada la importancia del estudio de correlaciones más generales que el denominado entrelazamiento conocida como discordia cuántica, en este trabajo se estudió y cuantificó dos correlaciones tipo discordia; la discordia cuántica original [3], la cual fue la primera definición de discordia cuántica en términos de la diferencia entre dos versiones de información mutua que clásicamente son equivalentes. También, se estudió la discordia cuántica como potencia de interferometría [8], que se desarrolló en el contexto de estimación de parámetros en metrología cuántica y tiene una fórmula cerrada para cuando una de las partes es un sistema dos dimensional. El estudio se llevó a cabo sobre diferentes estados cuánticos, puros y mezclados, de dos qubits (cada qubit modela un sistema físico de dos niveles), y sobre la dinámica disipativa generada cuando se considera que el par de qubits interactúa con un reservorio de modos infinitos.

El trabajo se encuentra distribuido así: en el Capítulo 3 describimos el marco teórico que utilizaremos para nuestros cálculos, es decir, las definiciones de nuestros dos cuantificadores; en el Capítulo 4 mostramos los resultados de comparar estos dos cuantificadores para estados mixtos donde estos se encuentran aislados y solo interactúan entre si; en el Capítulo 5 describiremos el marco teórico que utilizaremos para nuestros cálculos cuando nuestro sistema interactúa con su ambiente y por último en Capítulo 6 mostramos las conclusiones finales de nuestro trabajo. Las gráficas mostradas a lo largo del trabajo, han sido realizadas con el programa Mathematica 11.3.0.

Capítulo 2

Objetivos

2.0.1. General

Investigar sistemáticamente correlaciones cuánticas tipo discordia en sistemas modelados como bits cuánticos de información (qubits).

2.0.2. Específicos

1. Identificar al menos dos correlaciones tipo discordia con interpretación operacional que ofrezca un análisis interesante al compararlas en diferentes escenarios.
2. Comparar y analizar dichas correlaciones para distintos estados cuánticos de sistemas de dos qubits.
3. Estudiar el comportamiento de las correlaciones seleccionadas para estados de qubits bajo efectos de canales de ruido.

Capítulo 3

Estados cuánticos y correlaciones cuánticas

3.1. Estados cuánticos y correlaciones cuánticas

Los estados cuánticos codifican toda la información disponible para un observador acerca de un determinado sistema físico. Cuando disponemos de máxima información acerca de un sistema cuántico, el estado correspondiente, llamado estado puro se representa por un vector normalizado ($|\psi\rangle$ en la notación de Dirac) del espacio de Hilbert asociado. Sin embargo, no todos los estados cuánticos son puros, es decir, en el caso de un estado que se prepara en una suma convexa de estados puros diferentes con ciertas probabilidades, se dice que el estado ρ es mezclado o mixto [9]. Una forma sencilla de visualizar esto se muestra en la Fig. 3.1, donde la circunferencia azul representa los estados puros, mientras que cualquier punto en el resto del cono representa un estado mezclado.

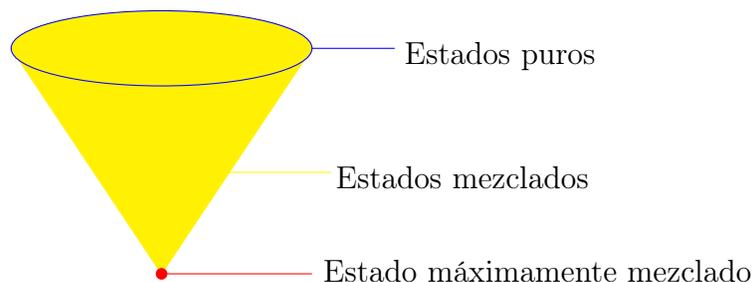


Figura 3.1: Representación de estados cuánticos; la circunferencia de la parte superior del cono representa los estados puros. La zona amarilla representa los estados mezclados. El vértice del cono representa un único estado conocido como estado máximamente mezclado (también conocido como ruido blanco).

3.2. Sistemas cuánticos bipartitos

El estudio de correlaciones en sistemas cuántico requiere de que este último tenga al menos dos partes, lo que se conoce como un sistema bipartito. Sean A y B , los dos subsistemas con espacios de Hilbert H_A y H_B y dimensiones d_A y d_B , respectivamente [4], entonces, el sistema completo está descrito por vectores de estado pertenecientes al espacio producto tensorial de ambos subespacios $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ [18], luego para un estado $|\psi\rangle_{AB}$ en el espacio H_{AB} puede ocurrir dos posibilidades: la primera es que los dos subsistemas sean completamente independientes, en cuyo caso el estado tiene la forma de un producto tensorial $|\psi_{AB}\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$ donde $|\psi\rangle_A \in H_A$ y $|\psi\rangle_B \in H_B$, en este caso no hay correlaciones de cualquier forma (clásica o cuántica) entre las dos partes del sistema compuesto. Este estado se conoce como estado producto o separable. La segunda posibilidad es que, en cambio no existe un estado local de A y B de tal manera que el estado global no puede ser escrito en forma de producto tensorial $|\psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$, en este caso se dice que los subsistemas A y B están entrelazados. Es decir, los estados puros pueden ser separables o entrelazados.

Por otro lado, para los estados mezclado hasta el momento han sido identificadas varias correlaciones sin contraparte clásica, las cuales pueden ser clasificadas como: no Localidad [10], Direccionamiento [6], Entrelazamiento [11], Obesidad [12], y Discordia [3]. Todas estas propiedades cuánticas han sido exploradas en protocolos y tareas cuya ejecución clásica es muy difícil y en algunos casos imposible, por ejemplo, la criptografía cuántica independiente del dispositivo requiere no localidad [13], la teletransportación cuántica necesita de entrelazamiento [14], por mencionar algunos.

3.3. Correlaciones a nivel de discordia

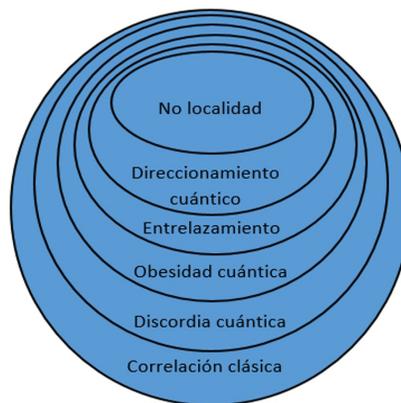


Figura 3.2: Diagrama de jerarquía de correlaciones en estados cuánticos bipartitos.

En la Fig. 3.2 se muestra la jerarquía de correlaciones cuánticas conocida hasta el momento, siendo la discordia, el tipo de correlación más general identificada. El concepto

de discordia cuántica involucra en su definición el hecho de perturbar el sistema por medio de medidas locales, lo que tiene que ver con el tercer postulado de la mecánica cuántica. De esta manera, ha sido posible introducir varios cuantificadores de este tipo de correlación [4].

Considere un sistema bipartito con una parte clásica y una cuántica de dos dimensiones cada una, en la jerga de información cuántica decimos que la primera parte es un bit de información clásico, mientras que la segunda es un bit de información cuántico (qubit). Así, en la base computacional o estándar $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (para cada parte), el bit clásico solo puede estar en el estado $|0\rangle$ ó en el estado $|1\rangle$. Por otro lado, el qubit puede estar en una superposición de ambos estados (infinitos estados posibles). Supongamos que el sistema total está en un estado de la forma:

$$\rho_{AB} = p_0|0\rangle\langle 0|_A \otimes \rho_B^{(0)} + p_1|1\rangle\langle 1|_A \otimes \rho_B^{(1)},$$

donde p_0 y p_1 son probabilidades tales que $p_0 + p_1 = 1$. El bit clásico ha sido asignado al subsistema A , mientras que $\rho_B^{(i)}$, con $i = 0, 1$, denota un estado para el bit cuántico (asignado a B). Cuando el bit clásico es $|0\rangle(|1\rangle)$, decimos entonces que el sistema AB está en un estado clásico-cuántico, o equivalentemente, que ρ_{AB} está correlacionado clásicamente con respecto al subsistema A .

En general, para sistemas de mayor dimensionalidad, cuya parte clásica puede representarse en una base ortonormal $\{|i\rangle\}$, un estado clásico-cuántico puede escribirse como la mezcla estadística:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|_A \otimes \rho_B^{(i)}.$$

El conjunto C_A de estados clásico-cuánticos respecto a la parte A , queda formado de la siguiente manera:

$$C_A = \{\rho_{AB} | \rho_{AB} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|_A \otimes \rho_B^{(i)}\},$$

donde $|i\rangle_A$ no es una base fija, sino que representa cualquier base ortonormal del subsistema A , $\rho_B^{(i)}$ son estado cuántico arbitrarios del subsistema B y $\{p_i\}_{i=1}^{d_A \otimes d_B}$ es una colección de números tal que $\sum_{i=1}^{d_A \otimes d_B} p_i = 1$.

De la misma manera, se pueden definir estados cuántico-clásicos intercambiando los papeles de los subsistemas A y B . Esto es, un estado cuántico-clásico se escribe como:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes |i\rangle\langle i|_B,$$

y el correspondiente conjunto C_B es:

$$C_B = \{\rho_{AB} | \rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes |i\rangle\langle i|_B\}.$$

Finalmente, también es posible considerar el conjunto de estados que tienen el mismo comportamiento en ambas partes, es decir, podemos introducir el conjunto de estados

clásico-clásico, o clásico en A y B, como aquellos escritos en la forma:

$$\rho_{AB} = \sum_{ij} p_{ij} |i\rangle\langle i|_A \otimes |j\rangle\langle j|_B,$$

donde ahora tenemos una distribución de probabilidad conjunta $\{p_{ij}\}$ y bases ortonormales para ambos subsistemas A y B. El conjunto C_{AB} de estados clásico-clásico está formado por cualquier estado que pueda escribirse como en la ecuación anterior.

$$C_{AB} = \{\rho_{AB} | \rho_{AB} = \sum_{ij} p_{ij} |i\rangle\langle i|_A \otimes |j\rangle\langle j|_B\}.$$

Donde $|i\rangle_A$ y $|j\rangle_B$ son las bases ortonormales de los subsistemas A y B respectivamente [4].

De acuerdo a lo anterior, el carácter genuinamente cuántico de un sistema compuesto puede cuantificarse en términos de las correlaciones cuánticas, una forma práctica de hacerlo está en la siguiente definición [4]:

Definición 1. *Un estado ρ_{AB} tiene QCs si no es un estado clásico, es decir, si $\rho_{AB} \notin C_A$ o $\rho_{AB} \notin C_B$, entonces tiene QCs unilaterales, mientras que si $\rho_{AB} \notin C_{AB}$ entonces ρ_{AB} tiene QCs de dos lados.*

De esta manera, dada la definición anterior, es necesario introducir un cuantificador (una *métrica*) de dichas correlaciones, esto con el fin de contar con una interpretación operacional. El conjunto de requerimientos que se considera correcto para ello es como sigue [4]. Para un sistema bipartito en el estado ρ_{AB} , se dice que $\delta(\rho_{AB})$ es un cuantificador de las QCs del estado, y que cumple las siguientes propiedades:

- (i) $\delta(\rho_{AB}) = 0$ si y solo si $\rho_{AB} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|_A \otimes \rho_B^{(i)}$ o $\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes |i\rangle\langle i|_B$ o $\rho_{AB} = \sum_{ij} p_{ij} |i\rangle\langle i|_A \otimes |j\rangle\langle j|_B$
- (ii) $\delta(\rho_{AB})$ es invariante bajo transformaciones unitarias, es decir, $\delta(U_A \otimes U_B \rho_{AB} U_A \otimes U_B) = \delta(\rho_{AB})$ para cualquier estado ρ_{AB} y cualquier operación unitaria local U_A y U_B que actúen sobre el subsistema A y B, respectivamente.
- (iii) $\delta(\rho_{AB})$ es un monótono de entrelazamiento. Es decir, $\delta(\rho_{AB}) = E(\rho_{AB})$ para cualquier estado puro. $E(\rho_{AB})$ se refiere a una métrica de entrelazamiento bipartito.
- (iv) $\delta(\rho_{AB})$ es monótonicamente decreciente bajo operaciones locales que preservan la conmutatividad (LCPO); $\delta(\text{LCPO}(\rho_{AB})) \leq \delta(\rho_{AB})$, para cualquier estado ρ_{AB} y cualquier operación LCPO.

El requerimiento (i) formaliza el requisito básico de que una medida válida de QCs debe desaparecer para los estados clásicos ($\rho \in C_A$, $\rho \in C_B$, o $\rho \in C_{AB}$). El requisito (ii) asegura que cualquier medida de QCs sea localmente independiente de la base, como se espera para cualquier cuantificador de correlaciones. El requerimiento (iii) asegura que las QCs se reducen a entrelazamiento para estados en la frontera del conjunto de

estados cuánticos bipartitos (estados puros). El requerimiento (iv) garantiza que existe un conjunto de operaciones locales libre que no aumenta ni genera las QCs. En este caso, el conjunto actualmente aceptado para las QCs es el de LCPO que se define como las operaciones que satisfacen [4]: $[\text{LCPO}(\rho), \text{LCPO}(\sigma)] = 0$, $\forall \rho, \sigma$ tal que $[\rho, \sigma] = 0$, donde $\text{LCPO}(\rho_{AB}) := \text{LCPO}_A(\rho_A) \otimes \text{LCPO}_B(\rho_B)$, y $\text{LCPO}_{A,B}$ corresponden a operaciones locales sobre los subsistemas A y B , respectivamente. Por supuesto, las métricas en los casos unilaterales se definen de forma análoga.

3.4. Medidas para las correlaciones cuánticas

Existen varias medidas para las QCs que se clasifican de acuerdo a su definición y operacionalidad, algunos ejemplos son:

3.4.1. Medidas geométricas

De la Definición 1 se puede considerar de forma geométrica como medida de QCs, la distancia de un estado arbitrario al conjunto de estados clásicos [4]. Por ejemplo investigaciones experimentales de medidas geométricas se han llevado a cabo en una configuración de resonancia magnética nuclear de dos qubits [15, 16]

3.4.2. Medidas informativas inducidas por la medición

Un punto de vista alternativo desde el que podemos ver las QCs se basa en la cantidad de información sobre el estado de un sistema compuesto que se puede extraer accediendo a él localmente. Cuando solo están presentes las correlaciones clásicas, en principio podemos extraer toda esa información después de una medición local, mientras que este ya no es el caso cuando también entran en juego las QCs. Por ejemplo, estudios como zonas de discordia constantes se han llevado con medidas informativas [17]

3.4.3. Medidas basadas en la coherencia

Para definir las medidas basadas en la coherencia primero definamos que es la coherencia cuántica. La coherencia cuántica es la superposición de estados en una base ortonormal, para un sistema bipartito con una base de referencia fija $\{|i\rangle\}$, el conjunto de estados incoherentes (es decir, estados sin coherencia) se define como el conjunto de aquellos estados diagonales en la base de referencia.

Una medida de coherencia con respecto de una base fija $\{|i\rangle\}$, es una función real, no negativa que se desvanece sólo en el conjunto de estados incoherentes. Así, se puede definir la discordia como la coherencia mínima de ρ_{AB} en cualquier base local [4]. Por ejemplo, en una configuración de resonancia magnética nuclear a temperatura ambiente altamente controlable, que proporciona una demostración de prueba de concepto para la utilidad de la discordia en aplicaciones de detección, ha utilizado este tipo de medida [8].

Capítulo 4

Discordia cuántica para diferentes estados de dos qubits

En este trabajo se realizó un estudio comparativo entre una medida informativa inducida por la medición, la cual denominamos *discordia cuántica original*, ya que fue la primera definición de discordia [3], y una medida basada en coherencia (*discordia cuántica como potencia de interferometría* [8]) dada la interpretación que ofrece en metrología cuántica.

4.1. Discordia cuántica original

La discordia cuántica fue originalmente definida como la diferencia de dos expresiones de información mutua extendida de un sistema clásico a un sistema cuántico.

En teoría de la información clásica estas expresiones están dada de la siguiente forma:

$$J(X, Y) = H(x) - H(X|Y), \quad (4.1)$$

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (4.2)$$

donde $H(X) = -\sum_X P_{X=x} \log(P_{X=x})$ es la entropía de Shannon, $H(X|Y)$ es la entropía condicional de X dado Y y $H(X, Y)$ es la entropía conjunta de X y Y . $P_{X=x}$ es la probabilidad de que una variable en el sistema X tome el valor de x . Además, las ecuaciones (4.1) y (4.2) son completamente equivalentes mediante las reglas de Bayes.

Ahora se desea extender las ecuaciones (4.1) y (4.2) a un escenario cuántico, para ello necesitamos cambiar $P_{X=x}$ por una matriz densidad ρ_X y la entropía de Shannon por la entropía de von Neumann $S(A) = -tr(\rho_A \log(\rho_A))$ donde tr denota el operador traza.

Así tenemos que la ecuación (2) esta dada por:

$$I(A, B) = S(A) + S(B) - S(A, B). \quad (4.3)$$

El problema que surge en el caso cuántico es que la versión no trivial de la ecuación (4.1) no siempre es idéntica a $I(\rho_{AB})$. Esto se debe a que, en la mecánica cuántica, la

entropía condicional implica que el estado de un subsistema (digamos A) solo se conoce después de que se haya llevado a cabo un conjunto de medidas en el otro subsistema (B). Ollivier y Zurek [3] propusieron una generalización de la ecuación (4.1), suponiendo una medición proyectiva unidimensional completa realizada en el subsistema B , con proyectores $\{\pi_j\}^B$ que satisfacen $\sum(\pi_j^B)^\dagger\pi_j^B = \mathbb{I}$ (ver medidas en mecánica cuántica en el Apéndice A). La generalización de la ecuación (4.1) permite otra forma de escribir la información mutua cuántica (que en general no coincide con el de la ecuación (4.3))

$$J(A, B) = S(A) - S(A|\{\pi_j\}^B), \quad (4.4)$$

donde la entropía condicional queda $S(A|\{\pi_j\}^B) = \sum_j p_j S(\rho_{A|\{\pi_j\}^B})$ con probabilidad $p_j = \text{tr}(\pi_j^B \rho_{AB} \pi_j^B)$, y la matriz de densidad después de que las mediciones se hayan realizado en el subsistema B está dada por

$$\rho_{A|\pi_j^B} = \frac{\pi_j^B \rho_{AB} \pi_j^B}{\text{tr}(\pi_j^B \rho_{AB} \pi_j^B)}.$$

La ecuación (4.4) da la cantidad de información obtenida sobre A después de que se halla llevado a cabo una medida sobre B . Así tenemos una extensión de la ecuación (4.1) para sistemas cuánticos.

Dado que las medidas proyectivas en el sistema B remueven todas las correlaciones no-clásicas entre A y B , y el valor de $J(A, B)$ depende de la elección de π_k . Por lo tanto, para asegurar que esto captura todas las correlaciones clásicas, necesitamos maximizar J sobre todos los π_k [18], es decir

$$\mathcal{J}(A, B) = \max_{\pi_k} J(A, B). \quad (4.5)$$

Las dos expresiones clásicas idénticas para la información mutua (4.1) y (4.2), difieren en el caso cuántico, la diferencia de estas dos ecuaciones (4.3) y (4.5) se denominó Discordia cuántica.

$$\delta(A : B) = I(A, B) - \mathcal{J}(A, B) \quad (4.6)$$

Nótese que la discordia cuántica depende tanto del estado $\rho_{A,B}$ como de la medida utilizada en $J(A, B)$. La discordia cuántica nos provee de información sobre la naturaleza cuántica de las correlaciones entre dos sistemas, siendo esta cero para estados con correlaciones clásicas únicamente, y distinta de cero para estados donde exista correlación cuántica, es decir, es una medida de la no-clásicalidad de un sistema. Aunque la discordia cuántica es igual que el entrelazamiento de formación para estados puros, esto no es cierto para estados mezclados, ya que algunos estados presentan discordia cuántica finita aún sin entrelazamiento. Es importante notar que para calcular correlaciones clásicas podemos considerar medidas $POVM$ (Positive Operator-Valued Neasurements) arbitrarias. Sin embargo, para dos qubits, la medida proyectiva es el $POVM$ que maximiza las correlaciones clásicas.

4.1.1. Expresión analítica para la discordia Original

Dada la importancia del estudio de este tipo de correlaciones llamada discordia cuántica, diversos autores han reportado expresiones analíticas las cuales mostraremos a continuación.

Para evaluar la dinámica de la discordia cuántica necesitamos determinar una expresión analítica para una subclase de operadores densidad de estructura X . Consideramos una matriz densidad dada por,

$$\rho = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & w \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ w^* & 0 & 0 & d \end{bmatrix},$$

donde z y w son números complejos y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $1 = a + b + c + d$. Para reducir la dificultad al calcular la discordia cuántica necesitamos ser capaces de maximizar la correlación clásica $\mathcal{J}(A, B) \equiv \mathcal{J}(\rho)$. Esto lo podemos hacer analíticamente si vemos que el proyector general de un qubit puede ser escrito como una función de dos ángulos, ya que

$$\mathcal{J}(\rho) = S(A) - F(\theta, \phi), \quad (4.7)$$

donde

$$F(\theta, \phi) = \inf_{\theta, \phi} \left[\sum_{k=\beta, \alpha} p_k(\theta, \phi) S \frac{\pi_k^B(\theta, \phi) \rho \pi_k^B(\theta, \phi)}{p_k(\theta, \phi)} \right],$$

con $\{|\beta\rangle, |\alpha\rangle\}$ una base de la matriz densidad ρ , $p_k(\theta, \phi) = \pi_k^B(\theta, \phi) \rho \pi_k^B(\theta, \phi)$ y los proyectores $\pi_k^B(\theta, \phi) = \mathbb{I} \otimes |k\rangle\langle k|$ con $k = \beta, \alpha$ definidos por los estados ortogonales

$$\begin{aligned} |\beta\rangle &= \cos \theta |0\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |1\rangle, \\ |\alpha\rangle &= \sin \theta |0\rangle - e^{i\phi} \cos \theta |1\rangle. \end{aligned}$$

Comenzaremos notando algunas propiedades peculiares de $F(\theta, \phi)$ cuando ρ_{AB} es dado por la ecuación (4.7). Dada la estructura de la matriz densidad, los puntos críticos de $F(\theta, \phi)$, es decir, el conjunto de valores de θ y ϕ tal que $\frac{\partial F(\theta, \phi)}{\partial \theta} = 0$ y $\frac{\partial F(\theta, \phi)}{\partial \phi} = 0$, no dependen de los elementos de la matriz densidad. Para $\theta = n\frac{\pi}{2}$, con $n \in \mathbb{Z}$, tenemos un conjunto de puntos críticos y para este caso la función $F(\theta, \phi)$ no depende del ángulo ϕ . Otro conjunto es dado por $\theta = m\frac{\pi}{4}$ y $\phi = n\frac{\pi}{2}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$. Así, con esta observación, usando la versión cuántica de información I y la ecuación de discordia, se vuelve sencillo calcular una expresión analítica para la discordia cuántica [18]:

$$\delta(\rho) = \min\{D_1, D_2\}$$

Donde,

$$\begin{aligned} D_1 &= S(A) - S(B) - a \log_2\left(\frac{a}{a+b}\right) - b \log_2\left(\frac{b}{a+b}\right) - d \log_2\left(\frac{d}{b+d}\right) - b \log_2\left(\frac{b}{d+b}\right) \\ D_2 &= S(A) - S(B) - \Delta_+ \log_2 \Delta_+ - \Delta_- \log_2 \Delta_- \end{aligned}$$

con $\Delta_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma)$ y $\Gamma^2 = (a - d)^2 + 4(|z| + |w|)$.

4.2. Discordia cuántica como potencia de interferometría

La metrología cuántica estudia cómo aprovechar la mecánica cuántica para obtener precisión en la estimación de cantidades que no son susceptibles de observación directa. El paradigma de estimación de fase con esquemas de medición basados en una configuración interferométrica abarca una clase amplia y relevante de problemas de metrología, que pueden ser convenientemente convertidos en términos de un esquema de entrada-salida. Un estado de prueba de entrada ρ_{AB} entra en un canal de dos brazos, en el que el subsistema de referencia B no se ve afectado mientras que el subsistema A sufre una evolución unitaria local, de modo que la matriz densidad de salida puede escribirse como

$$\rho_{AB}^{\varphi} = (U_A \otimes \mathbb{I}_B)\rho(U_A \otimes \mathbb{I}_B)^{\dagger}$$

Con $U_A = e^{-i\varphi H_A}$ donde φ es el parámetro que deseamos estimar y H_A el Hamiltoniano local que genera la dinámica unitaria. La información sobre φ es luego recuperada a través de una función del estimador $\hat{\varphi}$ construido sobre posibles mediciones conjuntas de observables dependientes adecuados realizados en la salida ρ_{AB}^{φ} . Para v repeticiones de la estimación, es decir, copias idénticas del estado ρ_{AB} , el límite inferior para el error cuadrático medio se establece como $Var\rho_{AB}^{\varphi}(\hat{\varphi}) \geq [vF(\rho_{AB} : H_A)]^{-1}$ donde F es la información cuántica de Fisher [19].

La discordia cuántica como potencia de interferometría está definida como

$$\delta_{A,B|\Gamma}^A = \frac{1}{4} \min_{H_A^{\Gamma}} F(\rho_{AB}; H_A^{\Gamma}), \quad (4.8)$$

donde la función cuántica de Fisher está dada por

$$F(\rho_{AB}; H_A^{\Gamma}) = 4 \sum_{i < k: q_i + q_k \neq 0} \frac{(q_i - q_k)^2}{q_i + q_k} |\langle \psi_i | (H_A^{\Gamma} \otimes \mathbb{I}_B) | \psi_k \rangle|^2,$$

siendo $\{q_i, \psi_i\}$ el sistema propio del estado ρ_{AB} y el mínimo se toma sobre el conjunto de todos los Hamiltonianos locales H_A^{Γ} con espectro no degenerado fijo $\Gamma = \{\gamma_i\}$. El conjunto de Hamiltonianos mencionado se puede parametrizar como $H_A^{\Gamma} = V_A \Gamma V_A^{\dagger}$, donde $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_{d_A})$ es una matriz diagonal fija con valores propios ordenados de forma ascendente, mientras que V_A es un operador arbitrario del grupo unitario especial $SU(d_A)$.

En general, esperamos que diferentes elecciones de Γ conduzcan a diferentes medidas que induzcan ordenaciones no equivalentes en el conjunto de estados cuánticos. Sin embargo, utilizando el hecho de que, para todas las constantes reales a y b , se tiene $F(\rho_{AB}; aH_A^{\Gamma} + b\mathbb{I}_A) = a^2 F(\rho_{AB}; H_A^{\Gamma})$, Γ se puede transformar canónicamente, con $\gamma_1 = \frac{d_A}{2}$ y $\gamma_{d_A} = -\frac{d_A}{2}$.

Centrándose ahora en el caso relevante del subsistema A siendo un qubit ($d_A = 2$), con B un sistema cuántico de dimensión arbitraria, la única forma canónica no trivial para Γ es $\text{diag}(1, -1)$, que corresponde al conjunto $H_A = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}_A$ con $|\vec{n}| = 1$ y $\vec{\sigma}_A = (\sigma_{xA}, \sigma_{yA}, \sigma_{zA})$ siendo el vector de matrices de Pauli. Se puede deducir una fórmula cerrada para sistemas arbitrario en el que uno de los subsistemas sea un qubit:

$$\delta_{A,B}^A = \xi \text{mín}[M],$$

donde $\xi \text{mín}[M]$ es el valor propio mas pequeño de la matriz M de tamaño 3×3 , la cual está dada por

$$M_{m,n} = \frac{1}{2} \sum_{i < k: q_i + q_k \neq 0} \frac{(q_i - q_k)^2}{q_i + q_k} \langle \psi_i | (\sigma_{mA} \otimes \mathbb{I}_B) | \psi_k \rangle \langle \psi_k | (\sigma_{nA} \otimes \mathbb{I}_B) | \psi_i \rangle,$$

donde $\{q_i, \psi_i\}$ es el sistema propio del estado ρ_{AB} y σ_m son las matrices de Pauli [8]

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

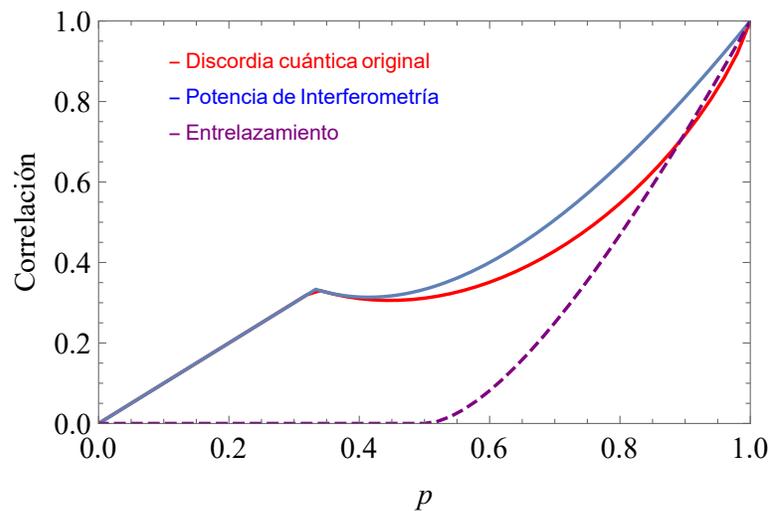


Figura 4.1: Discordia cuántica original (línea roja), potencia de interferometría (línea azul), Entrelazamiento (Línea púrpura) para un estado de la forma $\rho_{AB} = p/2(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|) + \frac{(1-p)}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$

En la Fig 4.1 se observa que estos dos cuantificadores y el entrelazamiento no necesariamente deben coincidir en estados mezclados y estas correlaciones deben coincidir cuando $p = 0$ y $p = 1$, es decir, cuando es un estado correlacionado clásicamente y máximamente correlacionado, respectivamente. Se puede observar que existen correlaciones tipo discordia aún cuando el entrelazamiento es nulo, como se aprecia para $0 \leq p \leq 0.5$ aproximadamente.

4.3. Discordia original vs. Potencia de interferometría

En esta sección reportamos sobre el comportamiento de las dos formas de calcular la discordia cuántica formuladas en la ecuación (4.6) y la ecuación (4.8), con el fin de entender las diferencias y semejanzas entre ellas.

Primero estudiamos la correlación de interés para un estado particular ρ_{AB} cuya forma matricial está representada por

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + p^2 & 0 & 0 & 2p \\ 0 & 1 - p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - p^2 & 0 \\ 2p & 0 & 0 & 1 + p^2 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

donde $0 \leq p \leq 1$.

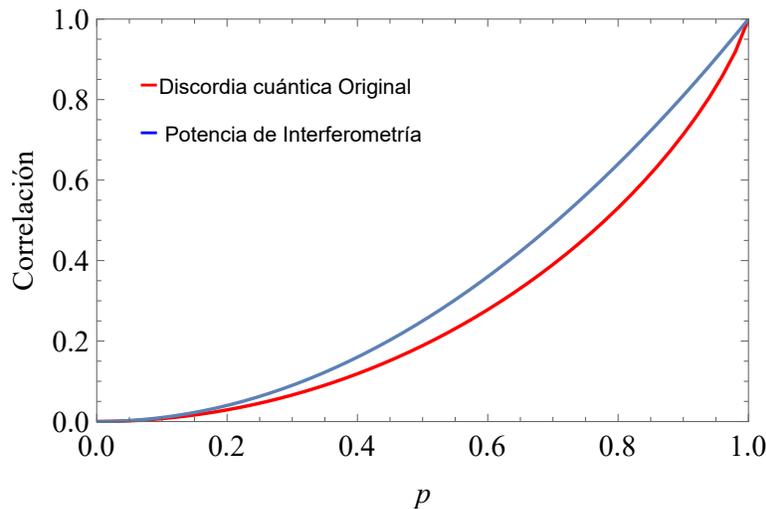


Figura 4.2: Discordia cuántica original (línea roja) y potencia de interferometría (línea azul) para un estado particular ρ_{AB} que depende de un parámetro p con $0 \leq p \leq 1$.

En la Figura 4.2 mostramos la discordia cuántica original (curva roja) y la discordia cuántica como potencia de interferometría (curva azul) en función del parámetro p para el estado en la Ec. (4.9). Apreciamos que ambas curvas coinciden en $p = 0$ y $p = 1$, que corresponden a un estado máximamente mezclado y uno máximamente correlacionado, respectivamente. Notemos que en general, cuando $0 < p < 1$, estas dos cantidades no coinciden, pero presentan un comportamiento muy similar.

Las matrices densidad de la forma (4.9), son de mucho interés en el análisis de las correlaciones cuánticas debido a que muestran el espectro de estados cuánticos desde el estado con máxima entropía hasta los estados puros de máxima correlación (ver Fig. 3.1).

Ahora, estudiamos esta correlación para algunos estados de Werner el cual es de la forma $\rho_{AB} = \frac{1-p}{4}\mathbb{I} + p|\phi\rangle\langle\phi|$ donde \mathbb{I} es la matriz identidad y $|\phi\rangle$ es un estado bien definido.

Consideremos los estados

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (4.10)$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle). \quad (4.11)$$

Así, los estados tipo Werner son de la forma:

$$\rho_{AB} = \frac{p}{2}(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 11|) + \frac{1-p}{4}\mathbb{I}, \quad (4.12)$$

$$\rho_{AB} = \frac{1-p}{4}\mathbb{I} + \frac{p}{3}(|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 01| + \langle 11|), \quad (4.13)$$

respectivamente.

Matricialmente, los estados (4.12) y (4.13) se escriben:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+p & 0 & 0 & 2p \\ 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 \\ 2p & 0 & 0 & 1+p \end{bmatrix}, \rho_{AB} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3+p & 4p & 0 & 4p \\ 4p & 3+p & 0 & 4p \\ 0 & 0 & 3-3p & 0 \\ 4p & 4p & 0 & 3+p \end{bmatrix}$$

respectivamente.

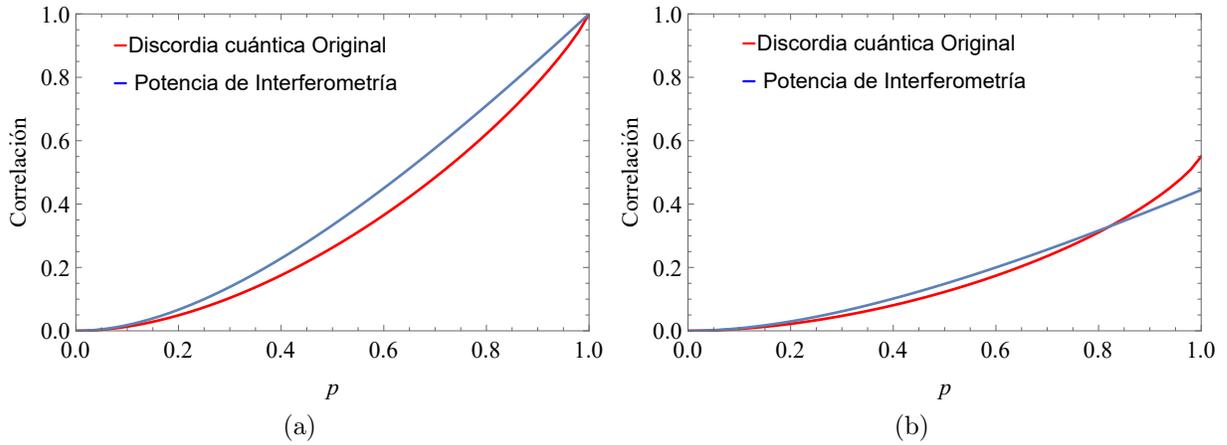


Figura 4.3: Discordia cuántica original (línea roja) y potencia de interferometría (línea azul) para un estado tipo Werner de la forma: (a) $\rho_{AB} = \frac{1-p}{4}\mathbb{I} + \frac{p}{2}(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 11|)$. (b): $\rho_{AB} = \frac{1-p}{4}\mathbb{I} + \frac{p}{3}(|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 01| + \langle 11|)$.

En la Figura 4.3 mostramos la discordia cuántica original y la discordia cuántica como potencia de interferometría para dos estados particulares tipo Werner, donde en la figura 4.3a las dos discordia coinciden cuando cuando p toma los valores de 0 y 1 y cuando $0 < p < 1$ estas no coinciden, donde la discordia cuántica original es menor o igual a la

discordia como potencia de interferometría, en la Figura 4.3b las dos discordia coinciden cuando $p = 0$ y estas no necesariamente coinciden cuando $p \neq 0$ y para ciertos estados de p la discordia cuántica original es mayor o igual que la discordia cuántica como potencia de interferometría y viceversa.

Para algunos estados tipo Werner realizamos una comparación sistemática de la discordia cuántica original, discordia cuántica como potencia de Interferometría y el denominado entrelazamiento, el cual se puede observar en la Figura 4.1.

Ahora, Consideremos un estado ρ_{AB} el cual es la mezcla estadística de dos estados entrelazados, $\rho = (1 - p)|\phi\rangle\langle\phi| + p|\psi\rangle\langle\psi|$, donde $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ y $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, cuya forma matricial es

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & p \\ 0 & 1-p & 1-p & 0 \\ 0 & 1-p & 1-p & 0 \\ p & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

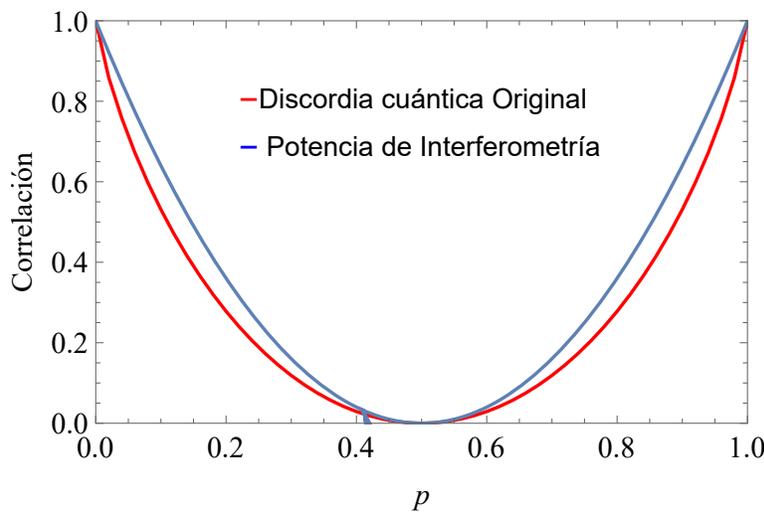


Figura 4.4: Discordia cuántica original (línea roja) y potencia de interferometría (línea azul) para un estado de la forma $\rho_{AB} = (1 - p)/2(|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) + p/2(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$.

En este caso se está asumiendo una mezcla estadística que va de un estado máximamente entrelazado a otro estado máximamente entrelazado y dicho estado se convierte en un estado clásico cuando $p = 0.5$, además la discordia cuántica original es menor o igual a la discordia cuántica como potencia de interferometría, Aunque ambas correlaciones puede expresarse de forma analítica para estados de forma X , su calculo no es directo. Sin embargo, dado que los estados entrelazados son un subconjunto de los estados discordante, para un estado $p = 0.5$ podemos comprobar fácilmente que el entrelazamiento es cero.

Una función auxiliar en el cálculo del entrelazamiento de formación se conoce como concurrencia, que para estados en forma X se computa como $c = 2 \max\{0, |z| - \sqrt{ad}, |w| - \sqrt{bc}\}$. Así es fácil ver que aunque la matriz ρ_{AB} no es diagonal en la base computacional $c = 0$ y por lo tanto es un estado separable.

Esto, junto con el hecho de que discordia es igual a cero, implica que el estado está correlacionado solamente de forma clásica.

Consideremos un estado ρ_{AB} el cual es la suma de un estado $|\psi\rangle\langle\psi|$ y un estado $|\phi\rangle\langle\phi|$ es decir $\rho = (1 - p)|\phi\rangle\langle\phi| + p|\psi\rangle\langle\psi|$, donde el estado $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$; $|\psi\rangle = |00\rangle$, cuya forma matricial es

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 - 2p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & p & 0 \\ 0 & p & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

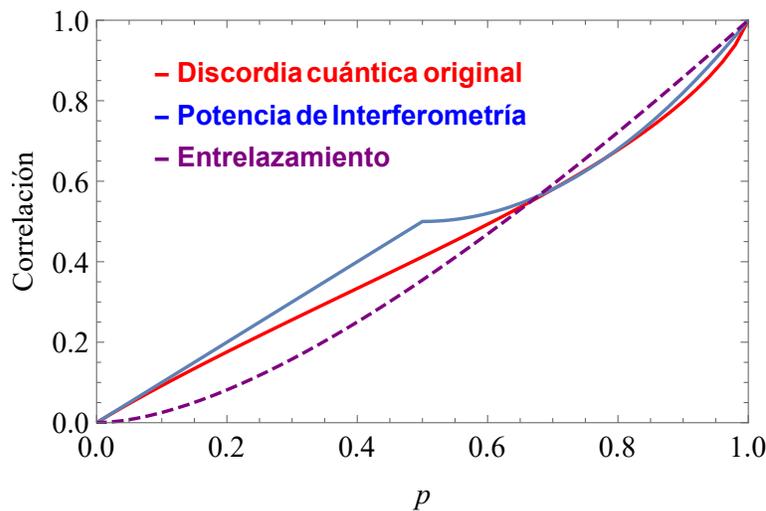


Figura 4.5: Discordia cuántica original (línea roja) y potencia de interferometría (línea azul) para un estado de la forma $\rho_{AB} = p/2(|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) + (1 - p)|00\rangle\langle 00|$

El comportamiento de las discordias se muestra en la Fig 4.5 y de nuevo se evidencia una diferencia entre ellas para estados mezclados, además la discordia cuántica como potencia de Interferometría tiene un cambio abrupto en $p = 0.5$ aproximadamente.

4.3.1. Discusión de resultados

Las correlaciones cuánticas estudiadas (discordia cuántica original y discordia cuántica como potencia de interferometría), definidas por las ecuaciones (4.6) y (4.8), respectivamente, aceptan fórmulas cerradas analíticas para el caso de sistemas bipartitos en el que

una de las partes es un qubit. Sin embargo, la discordia como potencia de interferometría presenta una forma de cálculo más simple y que funciona para estados arbitrarios. Por otro lado, aunque la discordia original, tiene una forma cerrada y sencilla para estados en la forma de X, no presenta una fórmula cerrada en el caso de estados arbitrarios y un proceso de optimización se hace necesario.

Como primera parte en el entendimiento de este tipo de correlaciones, hemos realizado una comparación sistemática de la discordia original y como potencia de interferometría sobre estados mezclados como sigue: i) estados estadísticos afectados por ruido blanco, en el que uno de los componentes de la mezcla es el operador identidad, ii) mezcla de dos estados cuánticos correlacionados, y iii) mezcla de un estado correlacionado con un estado producto. Los tres casos pueden parametrizarse con un único parámetro que llamamos p con $0 \leq p \leq 1$. La variación del parámetro, modela de forma sencilla la acción de canales de ruidos que transforman un estado cuántico en otro. Sin embargo, aquí no nos interesamos por modelar un ruido en específico, sino en estudiar el comportamiento de las correlaciones en los casos establecidos. De forma general, y como debe ser, ambas correlaciones toman exactamente el mismo valor para los valores extremos del parámetro p que identifican estados puros (correlacionados o no), o el estado máximamente mezclado (cuya correlación es cero), dependiendo del caso escogido. Por otro lado, de forma general los dos cuantificadores toman valores diferentes para estados mezclados (es decir, para valores intermedios de p), y podemos notar que no hay una pauta definida para saber cual de los dos toma valores mayores o inferiores que el otro; por ejemplo, en la Fig. 4.2(a) la potencia de interferometría es siempre mayor o igual que la discordia original, mientras que en la Fig. 4.2(b), se presenta un cruce entre ambas cantidades. Esta diferencia en el valor de dos cuantificadores de la misma correlación cuántica puede tener importancia en desarrollos prácticos, en los que dependiendo de la configuración experimental (sistema físico, aparatos de medida, etc.), resulte ser más fácil de extraer o detectar uno de los dos cuantificadores. El caso específico de la potencia de interferometría, es evidente, por su definición, en el contexto de metrología cuántica para estimación de fases, por ejemplo.

Capítulo 5

Dinámica de discordia cuántica en sistemas abiertos

La evolución temporal de un sistema aislado o cerrado es unitaria y se determina mediante la solución de la ecuación Schrödinger. Sin embargo, en los escenarios realistas, los sistemas físicos no están cerrados sino que interactúan con un sistema más grande llamado entorno o medio ambiente. El sistema total (el sistema físico de interés más su entorno) puede considerarse como un sistema aislado, en el que el estado del sistema de interés cambia como consecuencia de su dinámica interna y la interacción con su entorno. Esta interacción conduce a ciertas correlaciones sistema-ambiente de tal manera que los cambios de estado resultantes del sistema no pueden, en general, ser representados por una evolución unitaria. La dinámica de un sistema cuántico abierto puede abordarse mediante diferentes aproximaciones y técnicas en función tanto de las propiedades del sistema considerado como del tipo de interacción entre este y su entorno [21].

5.1. Descripción de la dinámica cuántica

Si el espacio de Hilbert donde evoluciona el sistema S es \mathcal{H}_S y \mathcal{H}_E es el espacio Hilbert donde evoluciona el medio ambiente E , el espacio Hilbert del sistema combinado (sistema más medio ambiente) viene dado por $\mathcal{H}_{full} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. El Hamiltoniano que describe las energías del sistema total está dado por:

$$\hat{H}_{full} = \hat{H}_S \otimes \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_S \otimes \hat{H}_E + \hat{H}_{SE}(t), \quad (5.1)$$

donde \hat{H}_S es el Hamiltoniano del sistema de interés, \hat{H}_E es el Hamiltoniano del ambiente libre, y \hat{H}_{SE} es el Hamiltoniano de la interacción sistema-ambiente. Así, la dinámica del sistema completo puede describirse en el formalismo de la matriz densidad mediante la ecuación de Liouville-von Neumann

$$\dot{W}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_{full}, W(t) \right],$$

para el operador de densidad $W(t)$ del sistema completo, y luego trazando sobre los grados de libertad del medio ambiente, $\rho(t) = \text{tr}_E\{W(t)\}$, es posible conocer la dinámica del operador, densidad del sistema de interés.

5.1.1. Ecuación maestra cuántica

La ecuación maestra es una técnica que se usa con frecuencia debido a que presenta información completa tanto del sistema como del entorno o reservorio donde este se encuentra. La física del problema a tratar aquí puede describirse dentro del régimen de Born-Markov [20]. La característica más importante de los sistemas Markovianos es que su dinámica tiene la propiedad de definir un semigrupo. Un semigrupo es un conjunto de mapeos dinámicos $\{\phi(t), t\}$ con la propiedad de ser divisibles, es decir, $\phi(t_1 + t_2) = \phi(t_1) \circ \phi(t_2)$. El mapeo dinámico $\phi(t) : \rho(0) \rightarrow \rho(t) = \phi(t)\rho(0)$ satisface la propiedad de positividad completa: los operadores de densidad en todos los posibles espacios Hilbert extendido son mapeados en operadores de densidad en el mismo espacio Hilbert extendido. La ecuación de movimiento para un sistema abierto en el régimen Markoviano está determinada por la forma de Lindblad

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_{eff}, \hat{\rho}(t) \right] - \sum_k \frac{\Gamma_k}{2} \left(\{A_k^\dagger A_k, \hat{\rho}(t)\} - 2A_k \hat{\rho}(t) A_k^\dagger \right). \quad (5.2)$$

El primer término es la parte reversible de la ecuación, es decir, la evolución unitaria seguida si el sistema estuviera cerrado, \hat{H}_{eff} es el hamiltoniano del sistema donde incluye toda la energía del sistema, por ejemplo, la transición energética de cada parte del sistema, la energía de interacción entre ellas y la energía de interacción con un campo externo. El segundo término de la ecuación (5.2) da la evolución temporal disipativa y describe los efectos incoherentes del medio ambiente sobre el sistema. Los operadores A_k toman formas explícitas dependiendo del sistema específico, y los coeficientes Γ_k son las tasas de relajación para los diferentes canales del sistema abierto. Son positivas para garantizar la preservación de las trazas y la positividad completa de la ecuación maestra. Toda la información sobre el estado del sistema está contenida en la matriz de densidad reducida $\hat{\rho}(t)$ después de resolver la ecuación (5.2) que se deriva de (5.1). Por tanto, $\rho(t)$ es el operador de densidad reducida del sistema de interés con la información de la perturbación ambiental. Desde un punto de vista microscópico, la deducción de una ecuación maestra de Markov requiere algunas suposiciones físicas. En resumen, se requiere que la interacción sistema-entorno sea débil, esto se denomina aproximación de Born, y no se tienen en cuenta los efectos relacionados con la memoria del sistema (enfoque de Markov). Estos dos supuestos juntos se conocen como la aproximación de Born-Markov

En este trabajo consideramos entonces una dinámica dentro de la aproximación de Born-Markov para un sistema de dos qubits. La ecuación maestra adopta la forma:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_{eff}, \hat{\rho}(t) \right] - \sum_{i,j=1} \frac{\Gamma_{ij}}{2} (\rho(t) \sigma_+^i \sigma_-^j + \sigma_+^i \sigma_-^j \rho(t) - 2\sigma_-^i \rho(t) \sigma_+^j), \quad (5.3)$$

donde $\sigma_+^i := |1_i\rangle\langle 0_i|$ y $\sigma_-^i := |0_i\rangle\langle 1_i|$ son la nueva forma de operadores A_k en la ecuación (5.2) y se denominan operadores de subida y bajada para el qubit i , respectivamente. También están escritos en términos de las matrices de Pauli y $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2$, $\sigma_0 = \mathbb{I}_2$ definidos en la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Por otro lado, los coeficientes Γ_{ij} en la ecuación (5.3) definen las tasas de emisión espontánea individual Γ_{11} y Γ_{22} , y las tasas de amortiguamiento colectivo $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}^*$, respectivamente. Este amortiguamiento colectivo y el acoplamiento coherentes entre los qubits, son parámetros físicos importantes en nuestro estudio de correlaciones cuánticas en sistemas cuánticos abiertos. Por tanto, sus formas explícitas dependen del origen físico de la interacción sistema-entorno.

El hamiltoniano efectivo para el sistema de dos qubits se puede escribir como:

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{q-q} + \hat{H}_L,$$

donde

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar}{2}(\omega_1\sigma_z^1 + \omega_2\sigma_z^2) \quad (5.4)$$

describe el Hamiltoniano no perturbado del par de qubits, y $\omega_{1(2)}$ representa la frecuencia de transición entre los estados de $|0\rangle$ al estado $|1\rangle$ de los dos qubit.

$$\hat{H}_{q-q} = \frac{\hbar V}{2}(\sigma_1^1 \otimes \sigma_1^2 + \sigma_2^1 \otimes \sigma_2^2) \quad (5.5)$$

es la energía debida a la interacción entre los qubits, y V se conoce como la amplitud de interacción.

$$\hat{H}_L = \hbar l^1(\sigma_-^1 e^{i\omega_L t} + \sigma_+^1 e^{-i\omega_L t}) + \hbar l^2(\sigma_-^2 e^{i\omega_L t} + \sigma_+^2 e^{-i\omega_L t}) \quad (5.6)$$

es la interacción debida un campo externo. En este trabajo no consideramos este efecto externo, solamente a los debidos a las ecuaciones (5.4) y (5.5). El Hamiltoniano total se escribe explícitamente en forma matricial como

$$\hat{H}_{eff} = \hbar \begin{bmatrix} -\frac{\Delta}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{2} & V & 0 \\ 0 & V & \frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

donde $\Delta = \omega_1 + \omega_2$ y $\delta = \omega_1 - \omega_2$, V es la interacción qubit-qubit.

Las energías propias y estados propios del Hamiltoniano efectivo (5.7), para $\hbar = 1$, quedan (ver cálculo del sistema propio en el Apéndice B)

$$\begin{aligned}
 E_g &= -\frac{\Delta}{2}, \\
 \phi_g &= |00\rangle, \\
 E_a &= -\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2}, \\
 \phi_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta^2 + 4V^2 + \delta\sqrt{\delta^2 + 4V^2} \right]^{-1/2} [-(\delta + \sqrt{\delta^2 + 4V^2})|01\rangle + 2V|10\rangle], \\
 E_s &= \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2}, \\
 \phi_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta^2 + 4V^2 + \delta\sqrt{\delta^2 + 4V^2} \right]^{-1/2} [-(\delta - \sqrt{\delta^2 + 4V^2})|01\rangle + 2V|10\rangle], \\
 E_e &= \frac{\Delta}{2}, \\
 \phi_e &= |11\rangle.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

A partir del sistema propio del Hamiltoniano efectivo (5.8) podemos observar las siguientes situaciones definidas por los parámetros V y δ

1. Si $\frac{V}{\delta} \ll 1$, los qubits son independientes, los estados intermedios se reducen a los estados bases $|01\rangle$ y $|10\rangle$.
2. Si $\frac{V}{\delta} \gg 1$, o para qubits idénticos ($W_1 = W_2$), los dos estados intermedios se convierten en estados máximamente entrelazados, dado que la magnitud de los cuatro coeficientes se reduce a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Si $\frac{V}{\delta} \sim 1$, las moléculas no se unen al régimen de acoplamiento débil ni al fuerte, por lo que los dos estados intermedios se entrelazan parcialmente.

5.2. Dinámica de las dos correlaciones tipo discordia

Primero estudiamos la correlación de interés (Discordia cuántica original y Discordia cuántica como potencia de interferometría) para un estado $\rho_{A,B} = \frac{1}{4}\mathbb{I}$, el cual estará con interacción con el medio ambiente con los siguientes parámetros: $V = 19$, $\Delta = 200$, $\delta = 46.4$, $\Gamma = 1$, $\gamma = 0.18$, Los valores utilizados están noemalizados con respecto al decaimiento espontáneo individual ($\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma = 1$).

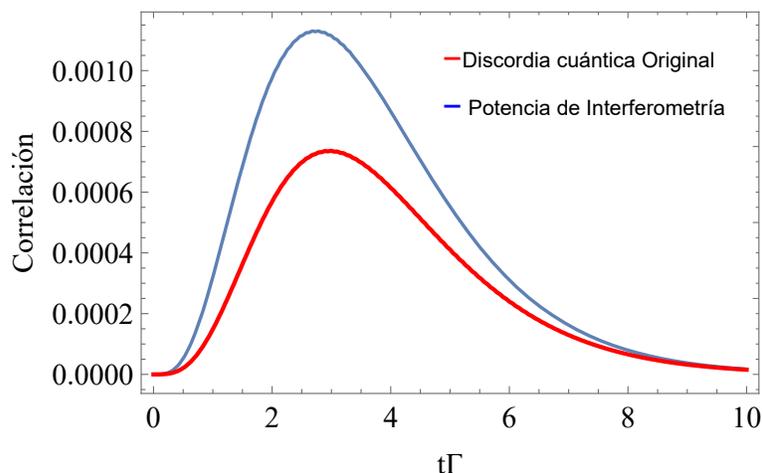


Figura 5.1: Discordia cuántica original (línea roja) y potencia de interferometría (línea azul) para un estado de la forma $\rho_{A,B} = \frac{1}{4}\mathbb{I}$ con parámetros $V = 19$, $\Delta = 200$, $\delta = 46.4$, $\Gamma = 1$, $\gamma = 0.18$.

Para este estado particular Figura 5.1 las correlaciones presentan un aumento muy débil, del orden 10^{-3} . Esto hace muy difícil su detección experimental. Sin embargo, es importante anotar que la discordia como potencia de interferometría tiene un crecimiento más pronunciado que el de la discordia original. Así entre estas dos, sería preferible la potencia de ineterferometría, con fines de facilitar la detección.

Ahora estudiamos un estado de la forma $\rho_{AB} = 0.5|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{I}{8}$ con $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, el cual estará con ineteración con el medio ambiente con los siguientes parámetros con $\Delta = 200$, $\delta = 46.4$, $\Gamma = 1$ y los parámetros V y γ variaran sus valores.

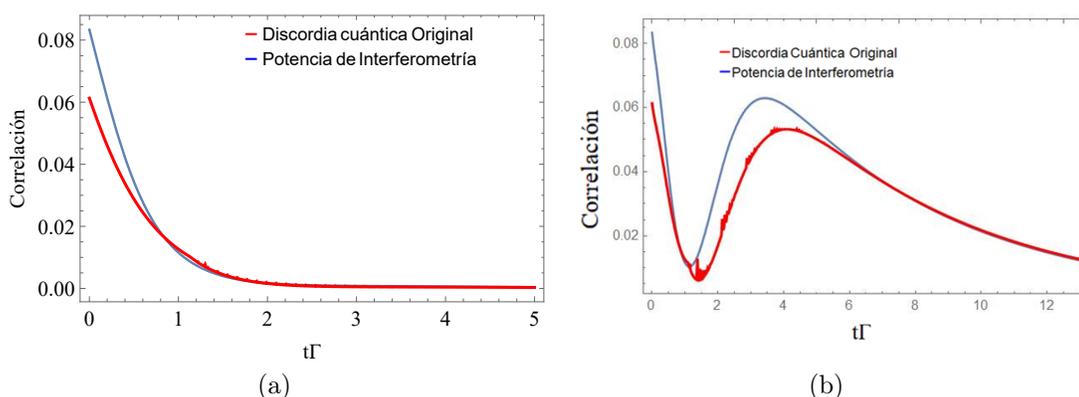


Figura 5.2: Discordia cuántica original (línea roja) y potencia de interferometría (línea azul) para un estado de la forma $\rho_{AB} = 1/4(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \frac{I}{8}$ con parámetros: (a) $\Gamma = 1$, $V = 19$, $\Delta = 200$, $\delta = 46.4$, $\gamma = 0.18$ y (b) $\Gamma = 1$, $V = 50$, $\Delta = 200$, $\delta = 46.4$, $\gamma = 0.9$

En la Figura 5.2 se muestra que la discordia toma también valores pequeños para este estado. Sin embargo comparando la Fig. (5.2a) con la Fig. (5.2b), se puede ver que la manipulación de los parámetros físicos, permite cierto control sobre la discordia. particularmente, el valor asintótico que los dos cuantificadores forman en la Fig. (5.2b) es diferentes de cero y por su puesto mayor que el valor en la Fig. (5.2a). Esto gracias al aumento en las magnitudes de los parámetros colectivos V y H . Ahora estudiaremos

un estado de la forma $\rho_{AB} = \frac{1}{3}|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1}{6}\mathbb{I}$ con $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, el cual estará con ineteración con el medio ambiente con los siguientes parámetros con $\Delta = 200$, $\delta = 46.4$, $\Gamma = 1$ y los parámetros V y γ variaran sus valores.

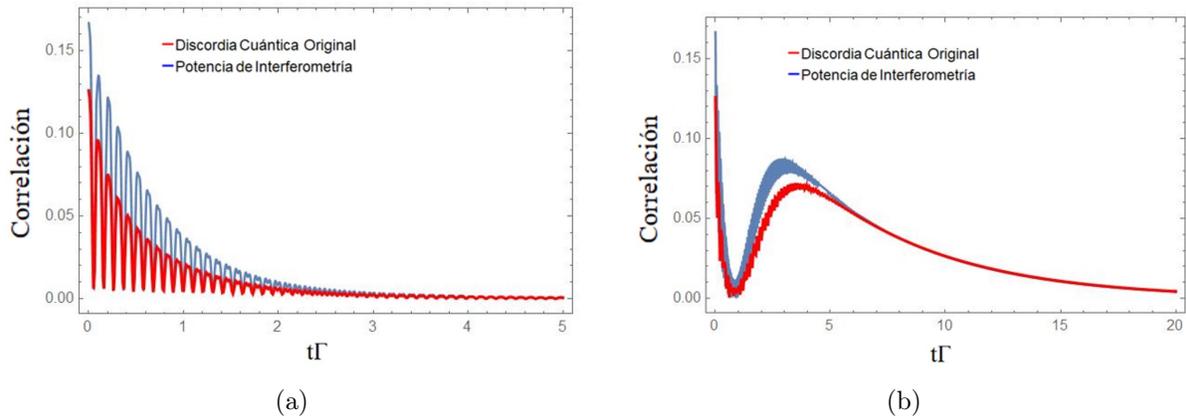


Figura 5.3: Discordia cuántica original (línea roja) y potencia de interferometría (línea azul) para un estado de la forma $\rho_{AB} = 1/3(|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) + \frac{1}{6}\mathbb{I}$ con parámetros: (a) $\Gamma = 1$, $V = 19$ $\Delta = 200$ $\delta = 46.4$, $\gamma = 0.18$ y (b) $\Gamma = 1$, $V = 50$ $\Delta = 200$ $\delta = 46.4$, $\gamma = 0.9$

En la Figura 5.3 se muestra que la discordia obtiene un movimiento oscilatorio, al mismo tiempo que la discordia cae asintóticamente a cero después de un tiempo t . Sin embargo al comparar la Fig. (5.3a) con la Fig.(5.3b) se puede observar que la discordia tiene un cambio abrupto como ocurre en el caso de la Fig 5.2 en el cual se hizo el mismo control de los parámetros para diferentes estados iniciales.

Ahora, para un estado de la forma $\rho_{AB} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ con $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ y parámetros controlados sistemáticamente

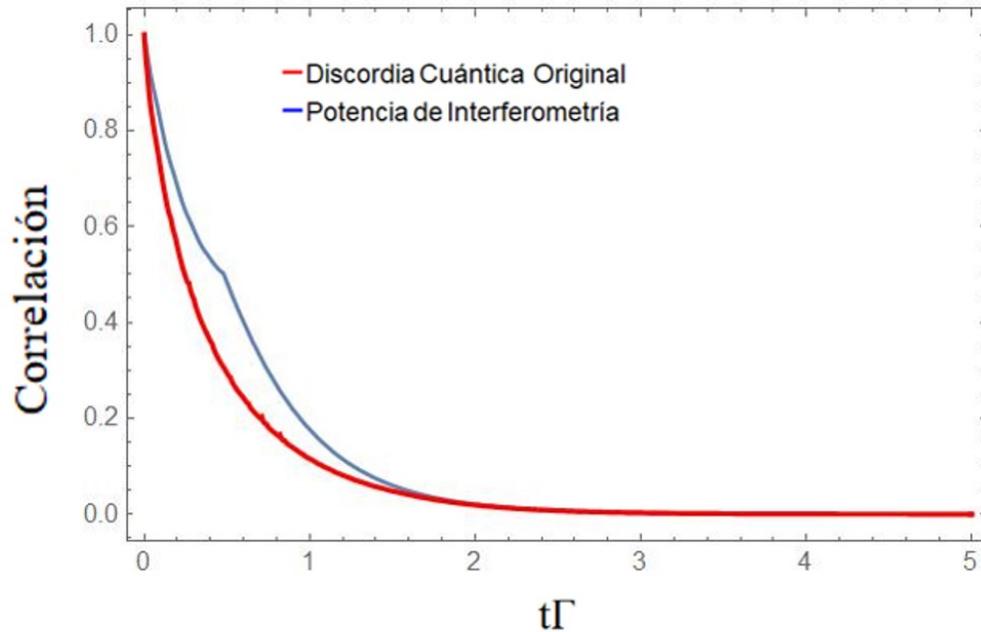


Figura 5.4: Discordia cuántica original (línea roja) y potencia de interferometría (línea azul) para un estado de la forma $\rho_{A,B} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ con $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ con parámetros: $V = 19$, $\Delta = 200$, $\delta = 46.4$, $\Gamma = 1$, $\gamma = 0.18$

El comportamiento del estado máximamente entrelazado $\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$ se muestra en la Fig. 5.4. Debido a la interacción con el entorno, las discordias decaen asintóticamente a cero. En este caso no se presentan oscilaciones rápidas como en la Figura 4.3 dado que la interacción dipolar afecta directamente los estados intermedios $|01\rangle$ y $|10\rangle$, que no están explícitamente en el estado involucrado.

Consideremos un estado

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el cual estará con interacción con el medio ambiente con los siguientes parámetros con $V = 50$, $\Delta = 200$, $\delta = 46.4$, $\Gamma = 1$, $\gamma = 0.9$

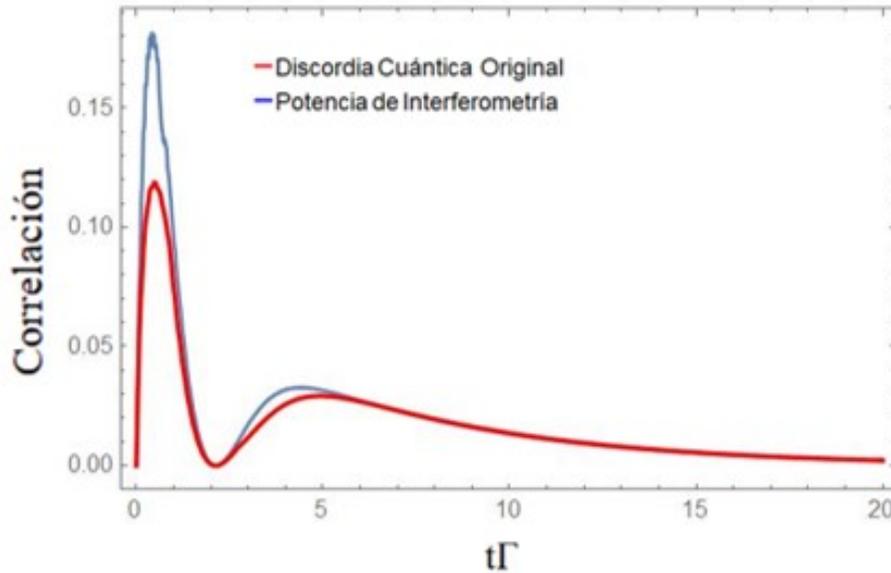


Figura 5.5: Discordia cuántica original (línea roja) y potencia de interferometría (línea azul) para un estado de la forma $\rho_{AB} = |11\rangle\langle 11|$ con parámetros $V = 19$, $\Delta = 200$, $\delta = 46.4$, $\Gamma = 1$, $\gamma = 0.18$.

Finalmente, en la Fig. 5.5 mostramos el comportamiento dinámico para los qubits en un estado inicial producto, $\rho_{AB} = |11\rangle\langle 11|$. Este estado conocido como doblemente excitado, tampoco es afectado directamente por la interacción dipolar. Sin embargo, una vez iniciado la dinámica, el sistema se correlaciona cuánticamente con valores mayores a aquellos en la Fig.5.1 para el estado máximamente mezclado.

5.2.1. Discusión de resultados

Como en el capítulo anterior, hemos realizado una comparación sistemática de la discordia original y la discordia como potencia de interferometría, pero ahora en el escenario realístico que los dos qubits, pensados aquí como sistema atómico (emisores), interactúan con su entorno, esto bajo el formalismo de la ecuación maestra, permite analizar los efectos tanto coherentes como disipativos sobre las correlaciones cuánticas consideradas.

Aquí consideramos dichos efectos para diferentes estados cuánticos iniciales, por ejemplo, en la Fig. 5.1 iniciamos con un estado máximamente mezclado, al interactuar con el medio la discordia aumenta y posteriormente baja asintóticamente hacia cero. Por otro lado, de forma general el valor de esta correlación puede cambiar cuando modificamos los valores de algunos de los parámetros, por ejemplo, en la Fig.(5.2a) para los parámetros $V = 19$, $\Delta = 200$, $\delta = 46.4$, $\Gamma = 1$, $\gamma = 0.18$ la correlación inicia con un valor distinto de cero y baja asintóticamente a cero, mientras que en la Fig.(5.2b) aumentamos los valores de V y γ y mantenemos el valor los otros parámetros, es decir,

$V = 50$, $\gamma = 0.9$, $\Delta = 200$, $\delta = 46.4$, $\Gamma = 1$, la correlación inicia con un valor distinto de cero y baja asintóticamente a cero, luego aumenta y posteriormente baja asintóticamente a cero, esto ocurre en un lapso de tiempo mayor.

5.3. Conclusiones

En este trabajo hemos realizado un estudio comparativo de forma sistemática para dos cuantificadores de correlaciones cuánticas tipo discordia, las cuales denominamos como discordia original y discordia como potencia de interferometría. El entendimiento de este tipo de correlaciones y su comportamiento bajo diversos escenarios es actualmente de mucho interés por parte de una amplia comunidad científica, que apunta al uso de propiedades cuánticas de los sistemas físicos con el propósito de implementar las tecnologías cuánticas, hemos dividido el estudio en dos partes, como sigue.

En la primera parte, analizamos el comportamiento de los cuantificadores para diferentes estados cuánticos mezclados, que describimos mediante un único parámetro p . El enfoque en esta parte fue el de entender como las correlaciones tipo discordia, varían en función de la mezcla estadística de estados cuánticos bien definidos. En particular, se discutió el comportamiento de la discordia para estados máximamente correlacionados mezclados con estados sin propiedades cuánticas, como es el caso del conocido ruido blanco, es decir, una distribución clásica homogénea sobre la base de estados del espacio de Hilbert asociado al sistema. Como debe esperarse de la definición de los dos cuantificadores estudiados, estos toman el mismo valor “cero” para estados con al menos una de sus partes en una distribución clásica, y el valor máximo normalizado a “uno” para estados puros máximamente correlacionados. En este último caso, es importante mencionar que los estados puros con máxima discordia, son aquellos cuyas propiedades cuánticas como el entrelazamiento y la no-localidad, también son máximas. Por otro lado, de acuerdo a nuestro análisis, aunque los dos cuantificadores están determinando la misma correlación cuántica, no necesariamente toman los mismos valores para el caso general de estados cuánticos mezclados. Esta diferencia, que por supuesto tiene origen en las definiciones de cada cuantificador, puede ser de gran importancia en un escenario experimental de detección de este tipo de propiedad cuántica. Por ejemplo, la discordia como potencia de interferometría, presenta en la mayoría de los casos, valores mayores que la discordia original. Esto implica que la potencia de interferometría puede ser más fácil de detectar en un testeo experimental.

En la segunda parte, enfocamos nuestro análisis en la dinámica seguida por los cuantificadores de discordia en un escenario *realista* de sistemas cuánticos abiertos. Para ello, consideramos como sistema de interés un par de emisores (sistemas atómicos de dos niveles) que interactúan con un entorno común. Por ejemplo, átomos interactuando con los modos electromagnéticos del vacío. La dinámica disipativa se ha descrito por medio del formalismo de la ecuación maestra considerando el régimen de Born (acoplamiento débil entre los emisores y el entorno) y Markov (sin efectos de memoria en la dinámica). A parte de las observaciones hechas en el Capítulo anterior, aquí mostramos que para el

sistema modelado, los parámetros físicos permiten tener un control del comportamiento de las correlaciones. En particular, los efectos colectivos como la interacción dipolar y el decaimiento cruzado (la influencia de un emisor en el proceso de emisión espontánea del otro), pueden incrementar los valores de las discordias al aumentar en magnitud. Así, en el régimen estacionario (tiempos muy largos) las correlaciones pueden tender asintóticamente a valores diferentes de cero. Es importante anotar que, si se permite la acción de un campo externo (por ejemplo, un láser coherente), las correlaciones pueden tener comportamientos más complejos que los aquí mostrados. Sin embargo, en nuestro estudio, nosotros nos enfocamos en la dinámica natural del sistema y no en este tipo de control externo.

Apéndice A

Medidas en la Mecánica Cuántica

Las medidas en mecánica cuántica están descritas por los llamados operadores de medida, los cuales son una colección de operadores M_k que actúan sobre el espacio de Hilbert H asociado al sistema bajo estudio. El índice k refiere a los diferentes resultados posibles a la hora de realizar el experimento. Independientemente del tipo de medidas que realicemos sobre el sistema cuyo estado inicial es ρ , la probabilidad de obtener el resultado k estará dada por

$$p_k = \text{Tr}(\rho M_k^\dagger M_k),$$

mientras que el estado del sistema luego de obtener el resultado k estaría dado por

$$p'_k = \frac{M_k \rho M_k^\dagger}{\text{Tr}(\rho M_k^\dagger M_k)}.$$

Los operadores de medida deben satisfacer la relación de completitud $\sum_k M_k^\dagger M_k = 1$. Esto deriva en que la suma de las probabilidades de obtener los diferentes resultados asociados a M_m es uno.

Medidas proyectivas

Las medidas proyectivas están caracterizadas por un conjunto de proyectores ortogonales P_k , que satisfacen la relación de completitud ($\sum_k P_k = 1$) y ortogonalidad $P_k P_{k'} = P_k \delta_{kk'}$. Entonces, el resultado después de la medida está dado por

$$p'_k = \frac{P_k \rho P_k}{\text{Tr}(\rho P_k)},$$

donde Tr denota la traza.

En el caso que los proyectores ortogonales sean de rango uno, las medidas proyectivas se conocen como medidas de von Neumann, y los operadores de medida tienen la forma $P_k = |k\rangle\langle k|$. Ahora un sistema bipartito AB , cuyo estado cuántico está descrito por el

operador ρ_{AB} . Los estados reducidos de A y B se obtienen tomando la traza parcial sobre el sistema complementario:

$$\rho_{A(B)} = Tr_{B(A)}\rho_{AB},$$

donde $Tr_{B(A)}$ denota la traza parcial sobre B o sobre A , respectivamente.

A.0.1. Medidas PVOM

Una *POVM* en un sistema cuántico es una colección de operadores positivos $\{E_m\}$ que satisfacen

$$\sum_m E_m = \mathbb{I},$$

donde \mathbb{I} es el operador identidad. Cuando un estado $|\psi\rangle$ es sometido a una *POVM*, la probabilidad de la salida m es

$$p(m) = \langle\psi|E_m|\psi\rangle.$$

En ciertos casos, el estado después de la medida no está especificado y no puede ser repetido, como por ejemplo, después de la medida de un fotón que golpea el detector [18] Mediante PVOM pueden definirse operadores de medida M_k , tal que $M_k = \sqrt{E_k}$, de modo que $\sum_k M_k^\dagger M_k = \mathbb{I}$

Apéndice B

Sistemas propios del Hamiltoniano efectivo

El Hamiltoniano efectivo (5.7) para nuestro sistemas de dos qubits que interactúan en la base computacional con $\hbar = 1$, tiene la forma:

$$\hat{H}_{eff} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{2} & V & 0 \\ 0 & V & \frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}.$$

Nuestro sistema propio lo podemos encontrar al diagonalizar y resolver el sistema $(\hat{H}_{eff} - E_i \mathbb{I})|\phi_i\rangle = 0$, para ello primero encontremos las energías propias del sistema $\det(\hat{H}_{eff} - E\mathbb{I})$, es decir,

$$\begin{aligned} \det(\hat{H}_{eff} - E\mathbb{I}) &= \begin{vmatrix} -\frac{\Delta}{2} - E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{2} - E & V & 0 \\ 0 & V & \frac{\delta}{2} - E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{2} - E \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{\Delta}{2} - E\right)\left(\frac{\Delta}{2} - E\right) \begin{vmatrix} -\frac{\delta}{2} - E & V \\ V & \frac{\delta}{2} - E \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{\Delta}{2} - E\right)\left(\frac{\Delta}{2} - E\right) \left[-\left(\frac{\delta}{2} - E\right)^2 - V^2\right]. \end{aligned}$$

Los valores propios del polinomio característico son:

$$E_g = -\frac{\Delta}{2}, \quad E_a = -\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2}, \quad E_s = \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2}, \quad E_e = \frac{\Delta}{2}$$

. Calculemos el vector propio asociado al valor propio $E_g = -\frac{\Delta}{2}$.

$$(\hat{H}_{eff} - E\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{2} + \frac{\Delta}{2} & V & 0 \\ 0 & V & \frac{\delta}{2} + \frac{\Delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así el vector propio asociado es $\phi_g = |00\rangle$. Calculemos el vector propio asociado al valor propio $E_e = \frac{\Delta}{2}$

$$(\hat{H}_{eff} - E\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{2} - \frac{\Delta}{2} & V & 0 \\ 0 & V & \frac{\delta}{2} - \frac{\Delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así el vector propio asociado es $\phi_e = |11\rangle$ Calculemos el vector propio asociado al valor propio $E_a = -\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2}$

$$(\hat{H}_{eff} - E\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -\frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2} & V & 0 \\ 0 & V & \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, solucionamos el siguiente sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2}x_1 &= 0 \\ \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4V^2}}{2}x_2 + Vx_3 &= 0 \\ Vx_2 + \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + 4V^2}}{2}x_3 &= 0 \\ \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Solucionando el sistema anterior obtenemos que

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -(\delta + \sqrt{\delta^2 + 4V^2}), \quad x_3 = 2V, \quad x_4 = 0.$$

Así el vector propio asociado es

$$\phi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta^2 + 4V^2 + \delta\sqrt{\delta^2 + 4V^2} \right]^{-1/2} [-(\delta + \sqrt{\delta^2 + 4V^2})|01\rangle + 2V|10\rangle].$$

Calculemos el vector propio asociado al valor propio $E_s = \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2}$

$$\begin{vmatrix} -\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2} & V & 0 \\ 0 & V & \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, solucionamos el siguiente sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2}x_1 &= 0 \\ \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 + 4V^2}}{2}x_2 + Vx_3 &= 0 \\ Vx_2 + \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 + 4V^2}}{2}x_3 &= 0 \\ \frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4V^2}x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Solucionando el sistema anterior obtenemos que

$$x_1 = 0, \quad x_2 = (\delta + \sqrt{\delta^2 + 4V^2}), \quad x_3 = 2V, \quad x_4 = 0.$$

Así el vector propio asociado es

$$\phi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta^2 + 4V^2 + \delta\sqrt{\delta^2 + 4V^2} \right]^{-1/2} [-(\delta - \sqrt{\delta^2 + 4V^2})|01\rangle + 2V|10\rangle].$$

Bibliografía

- [1] M.A. López, and M. Da Silve. Tecnologías cuánticas: Una oportunidad transversal e interdisciplinaria para la transformación digital y el impacto social. Banco Interamericano de Desarrollo (2019).
- [2] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [3] H. Ollivier and W. H. Zurek, *Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations*, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).
- [4] G. Adesso, T. R. Bromley, M. Cianciaruso, *Measures and applications of quantum correlations*, J. Phys. A **49**, 473001 (2016).
- [5] C. A. Melo, C. E. Susa, A. Ducuara, A. Barreiro and J. H. Reina, Quantum locality in game strategy, *Sci. Rep.* **7**, 44730 (2017).
- [6] R. Uola, A. Costa, H. Chau Nguyen, and O. Gühne, *Quantum Steering*, Rev. Mov. Phys, **92**, 015001 (2020).
- [7] J. H. Reina, C. E. Susa, R. Hildner, *Conditional quantum nonlocality in dimeric and trimeric arrays of organic molecules*, Phys. Rev. **A97** 063422 (2018).
- [8] D. Girolami et. al. , *Quantum Discord Determines the Interferometric Power of Quantum States*, Phys. Rev. Lett., **112**:210401, 2013.
- [9] Leonel A. Pineda-Enriquez, *Diversas formas de visualizar estados en un sistema cuántico*. Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. **7**, 1,(2013)
- [10] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, S. Wehner, *Bell nonlocality*, Rev. Mov. Phys. A **86** 419 (2014).
- [11] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [12] S. Jevtic, M. Pusey, D. Jennings, T. Rudolph , *Quantum Steering Ellipsoids*, Phys. Rev. Lett. **113** , 020402 (2014).

- [13] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarania, and Stephanie Wehner, *Bell non-locality*, Rev. Mod. Phys. **86**, 419-839 (2014) (2020).
- [14] Katarzyna Roszak , *Measure of qubit-environment entanglement for pure dephasing evolutions*, Phys. Rev. Research **2**, 043062 (2020).
- [15] IA Silva, D. Girolami, R. Auccaise, RS Sarthour, IS Oliveira, TJ Bonagamba, ER deAzevedo, DO Soares-Pinto y G. Adesso, *Measuring Bipartite Quantum Correlations of an Unknown State*, Phys. Rev. Lett. **110**, 140501 (2013).
- [16] FM Paula, IA Silva, JD Montealegre, AM Souza, ER deAzevedo, RS Sarthour, A. Saguia, IS Oliveira, DO Soares-Pinto, G. Adesso y MS Sarandy, *Observation of Environment-Induced Double Sudden Transitions in Geometric Quantum Correlations*, Phys. Rev. Lett. **111**, 250401 (2013).
- [17] T. Bromley, M. Cianciaruso, G. Adesso, *Frozen Quantum Coherence*, Phys. Rev. Lett. **114**, 210401 (2015).
- [18] M. Soto, L. Roa, M. Vaccarezza, *Correlations Cuánticas en Teleportación y Teoría Cuántica de Juegos* (tesis doctoral). Universidad de Concepción, Chile (2017).
- [19] L. Seveso, F. Albarelli, M. Genoni and M. Paris, *On the discontinuity of the quantum Fisher information for quantum statistical models with parameter dependent rank* J. Phys. A: Math. Theor. **53** 02LT01 (2020)
- [20] C. E. Susa and J. H. Reina, *Correlations in optically controlled quantum emitters*, Phys. Rev. A **85**, 022111 (2012).
- [21] C. E. Susa, (2016) *Control of quantum correlations in hybrid qubit systems* (tesis doctoral). Universidad del Valle, Cali, Colombia
- [22] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek and V. Vedral, *The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures*. Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012).
- [23] A. Streltsov, G. Adesso and M. B. Plenio, *Quantum coherence as a resource*, Rev. Mod. Phys. **89**, 041003 (2017).
- [24] Felipe Fernandes Fanchini, Diogo de Oliveira Soares Pinto, Gerardo Adesso, *Lectures on General Quantum Correlations and their Applications* Springer International publishing, Switzerland (2017).
- [25] E. Chitambar and G. Gour, *Quantum resource theories*, Rev. Mod. Phys. **91**, 025001 (2019).
- [26] T. Yu and J. H. Eberly, *Sudden death of entanglement*, Science **323**, 598 (2009).

- [27] B. Julsgaard, A. Koshekin and E. S. Polzik, *Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects*, Nature **413**, 400 (2001).
- [28] A. Datta, A. Shaji, and C. M. Caves, *Quantum discord and the power of one bit*, Phys. Rev. Lett. **100**, 050502 (2008).
- [29] J. H. Reina, C. E. Susa and F. F. Fanchini, *Extracting information from qubit-environment correlations*, Sci. Rep. **4**, 7443 (2014).
- [30] C. E. Susa, J. H. Reina and R. Hildner, *Plasmon-assisted quantum control of distant emitters*. Phys. Lett. A **378**, 2371 (2014).
- [31] C. E. Susa, J. H. Reina, and L. L. Sánchez-Soto, *Correlations in emitters coupled to plasmonic waveguides*, J. Phys. B **46**, 224022 (2013).