

METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA UN PROBLEMA DE CORRIENTES INDUCIDAS AXISIMETRICO

Jean Carlos Otero Pantoja



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA

2022

METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA UN PROBLEMA DE CORRIENTES INDUCIDAS AXISIMETRICO

Jean Carlos Otero Pantoja

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Matemático

Asesor:
Dr. Carlos Reales



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA
2022

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Los jurados abajo firmantes certifican que han leído y que aprueban el trabajo de grado titulado: **METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA UN PROBLEMA DE CORRIENTES INDUCIDAS AXISIMETRICO**, el cual es presentado por el estudiante **Jean Carlos Otero Pantoja**.

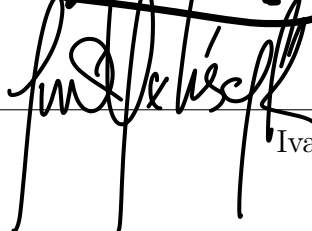
Fecha: Marzo de 2022

Asesor: Carlos Reales R.

Dr. Carlos Reales

Jurado: 

Abraham Arenas Tawil

Jurado: 

Ivan Velasquez

*A mis padres Amaury y Ludys,
mi esposa e hija Aura y Hanna Otero*

Resumen

En este trabajo se estudiará un Método de Elementos Finitos para un problema de Corrientes Inducidas Axisimétrico. Se establecerá una formulación variacional del problema y se probará la existencia y unicidad de la solución, haciendo uso de algunos resultados del Análisis Funcional. Seguidamente, se establecerá una discretización del problema variacional y se probarán estimativos de error.

Abstract

In this work a Finite Element Method for an Axisymmetric Eddy Current problem will be studied. A variational formulation of the problem will be established and the existence and uniqueness of the solution will be proved, making use of some results of the Functional Analysis. Next, a discretization of the variational problem will be established and error estimates will be tested.

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a Dios, por permitirme aprender y acobijarme en su infinita misericordia en la cual me deleito todos los días, por respaldarme en este camino que comencé, he llegado a un bonito lugar, pero también sé que no es la meta. También quiero agradecer muy profundamente a mis padres Ludys Pantoja y Amaury Otero, mis hermanas Anyi, Vanessa y Jeidi, a mi esposa Aura Cristina Bedoya, que con paciencia y con esperanza siempre ha estado allí apoyándome, mi hija, Hanna Otero que sin decir una sola palabra me animaba a continuar con este proceso, a Jader Saldarriaga un buen amigo. De manera especial quiero agradecer a mi tutor de tesis Carlos Reales, el cual me ha orientado en este proceso, sus asesorías, sugerencias y tiempo de calidad me ayudaron en el desarrollo de este trabajo, a la Universidad De Córdoba, que se volvió una casa para mí, a los docentes del Departamento de Matemáticas y Estadística, por haberme impartido ese conocimiento que tienen en esta bella ciencia del saber; no pueden faltar mis compañeros de estudio, colegas como Elsy, Luisa, Kelly, Juan Anaya, Larry, Reinel y otros matemáticos que han caminado conmigo y hemos compartido muchas experiencias.

Montería, Colombia

Jean Carlos Otero Pantoja

Marzo de 2022

Índice general

Resumen	<i>iv</i>
Abstract	<i>v</i>
1. Preliminares	5
1.1. Espacios de Hilbert	5
1.2. Espacios de Sobolev ponderados	14
2. Problema de corrientes inducidas	18
2.1. Coordenadas Cilíndricas y Espacios de Sobolev	18
2.2. Planteamiento del Problema	20
2.3. Formulación variacional	25
3. Discretización por Elementos Finitos	34
3.1. Problema Discreto	34
3.2. Análisis del error	37
3.3. Estimaciones de Error de las variables físicas.	39
Bibliografía	42

Introducción

Las telecomunicaciones, la metalurgia, la generación de energía, entre otras son industrias que usan los avances en el estudio de fenómenos electromagnéticos para su desarrollo propio. Esta es una de las razones por la cuales la modelación matemática de fenómenos electromagnéticos sea de gran interés para la industria y la comunidad científica en general. En la abundante literatura sobre el modelamiento de fenómenos electromagnéticos resalta una gran cantidad de artículos científicos donde se proponen y estudian soluciones numéricas de estos modelos siendo el método de los elementos finitos uno de los mas usados en la obtención de soluciones.

Uno de los fenómenos mas estudiados, tanto a nivel ingenieril como a nivel matemático, es el fenómeno de las corrientes inducidas (eddy current). Una corriente inducida (también conocida como corriente de Foucault) es causada cuando un conductor es expuesto a un campo magnético cambiante debido al movimiento de la fuente o del conductor, o debido a la variación del campo con el tiempo. El término de eddy current viene de las corrientes análogas vistas en el agua cuando arrastran un remo a lo ancho: áreas localizadas de turbulencia conocidas como 'remolinos' dan origen a vórtices persistentes. Las corrientes inducidas, como toda corriente eléctrica, generan calor como también fuerzas electromagnéticas. El calor puede ser utilizado en hornos de inducción y las fuerzas electromagnéticas pueden ser usadas para levitación, crear movimiento, deformar o para dar un fuerte efecto de frenado.

Un horno de inducción es un horno eléctrico en el que el calor es generado por medio del calentamiento debido a la inducción de un medio conductor en un crisol ubicado cerca a una bobina refrigerada a la cual se le suministra corriente alterna. Es un proceso limpio, eficiente y de mas fácil control que otros procesos de fundición de

materiales. Un horno de inducción puede ser usado para la fundición de cantidades de material que van desde el kilogramo hasta las cien toneladas. Generalmente son usados para fundir hierro y acero, cobre, aluminio y metales preciosos. El rango de frecuencias de operación va desde la frecuencia de red (50 ó 60 Hz) hasta los 10 KHz, en función del metal que se quiere fundir, la capacidad del horno y la velocidad de fundición deseada. Cuando se trabaja en la fundición de pequeñas cantidades de material se usa la frecuencia mas alta del horno. Lo anterior debido al efecto piel, el cual mide la distancia a la que puede penetrar la corriente alterna debajo de la superficie de un conductor. La mayoría de los problemas físicos son formulados de manera natural como problemas de valores en la frontera en dominios espaciales tridimensionales.

En los últimos años, la simulación numérica se ha revelado como una herramienta importante para diseñar el sistema de calentamiento por inducción y conocer su comportamiento, permitiendo así reducir considerablemente el número de procedimientos de ensayo-error en planta que suelen ser largos y costosos. Por eso una alternativa inteligente es usar métodos numéricos que aprovechen la simetría axial reduciendo el problema a un dominio computacional bidimensional. En algunos casos, esto se puede hacer luego de asumir que la dependencia de los parámetros, los datos y la solución del problema con respecto a una variable puede ser eliminada. Muchos problemas de la física o la mecánica son axisimétricos, esto debido a la homogeneidad de las propiedades de los materiales y la propiedad de isotropía de las leyes de conservación. Este es el caso de algunos problemas en la metalurgia, donde a pesar de la naturaleza tridimensional de los fenómenos electromagnéticos, se pueden usar algunos modelos axisimétricos (bidimensionales) que aproximan eficientemente la realidad tridimensional.

En este trabajo se abordará un problema tridimensional que se reducirá a uno dos dimensional esto con la ayuda de la simetría cilíndrica, usando un método de elementos finitos. Asumiremos que en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) el dominio $\tilde{\Omega}$ es axisimétrico, es decir, es simétrico con respecto al eje z , y los coeficientes y los datos de nuestros problemas son independientes de la variable angular θ . Bajo estas

hipótesis, la solución de nuestros problemas resultaran axisimétricas y sus derivadas con respecto a θ serán nulas. Por lo anterior, es suficiente calcular nuestras soluciones en el dominio bidimensional $\Omega = \{(r, z) : (r, 0, z) \in \tilde{\Omega}\}$. Para no considerar casos triviales, supondremos siempre que $\partial\Omega$ siempre se interseca con el eje de simetría. Los resultados aquí presentados se encuentran en [15] donde además se puede encontrar algunos ensayos numéricos que complementan la teoría desarrollada.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios de Hilbert

En esta sección daremos definiciones importantes y se presentarán algunos teoremas del Análisis Funcional que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Como veremos más adelante, los espacios de Hilbert nos permitirán pasar, con la ayuda del Teorema de Representación de Riesz, de un sistema de ecuaciones diferenciales a una formulación variacional o débil del problema.

Definición 1.1.1 (Espacio vectorial). Sea V un conjunto no vacío. V es llamado espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, si está acompañado de dos operaciones $+: V \times V \longrightarrow V$ (suma) y $\cdot: \mathbb{C} \times V \longrightarrow V$ (producto por escalar), las cuales cumplen las siguientes propiedades.

1. Las operaciones son asociativas:

$$u + (v + w) = (u + v) + w, \text{ para todo } u, v, w \in V.$$

$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v, \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } v \in V.$$

2. La suma es conmutativa:

$$u + v = v + u \text{ para todo } u, v \in V$$

3. Existe $0 \in V$ (vector nulo) tal que $v + 0 = v$, para todo $v \in V$.

4. Existe $1 \in V$ tal que $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$, para todo $v \in V$.

5. Para cada $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.

6. Las operaciones son distributivas:

$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \text{ y } (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \text{ para cada } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } u, v \in V.$$

Definición 1.1.2 (Norma). Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una norma en V es un mapeo $\|\cdot\|_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\|v\|_V = 0$ si y sólo si $v = 0$.

2. $\|cv\|_V = |c|\|v\|_V$, para cada $c \in \mathbb{C}$ y $v \in V$.

3. $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$, para cada $v, w \in V$.

Definición 1.1.3 (Espacios de Banach). Un espacio normado V es un espacio vectorial con una norma definida en él. Un espacio de Banach es un espacio normado completo (completo en la métrica definida por la norma).

Definición 1.1.4 (Espacios Duales, Formas Lineales Continuas). Sea V un espacio vectorial normado. El espacio $\mathcal{L}(V; \mathbb{C})$ lo llamaremos espacio dual de V y denotado por V' . Un elemento $f \in V'$ será llamado forma lineal continua.

Definición 1.1.5 (Forma sesquilineal). Una función $f : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama forma sesquilineal (o función sesquilineal) si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo argumento, esto es, para cada $a, b, c \in H$ y cada $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$f(\lambda a + \mu b, c) = \lambda f(a, c) + \mu f(b, c),$$

$$f(a, \lambda b + \mu c) = \bar{\lambda} f(a, b) + \bar{\mu} f(a, c).$$

Definición 1.1.6. Dada una forma sesquilineal $f : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$, la forma cuadrática asociada a f se define como $q : H \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$q(x) := f(x, x), \quad x \in H.$$

Corolario 1.1.1. Para cada $a, b \in H$,

$$q(a + b) = q(a) + f(a, b) + f(b, a) + q(b).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} q(a + b) &= f(a + b, a + b) = f(a, a + b) + f(b, a + b) \\ &= f(a, a) + f(a, b) + f(b, a) + f(b, b) \\ &= q(a) + f(a, b) + f(b, a) + q(b). \end{aligned}$$

□

Definición 1.1.7 (Producto Interior o Escalar). Un producto interior o producto escalar en un espacio vectorial V en $\mathbb{C}$ es un mapeo sesquilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisface:

1. $\langle v, w \rangle_V = \overline{\langle w, v \rangle_V}$, para todo $v, w \in V$ (*Hermiticidad*).
2. $\langle \alpha v + \beta w, z \rangle_V = \alpha \langle v, z \rangle_V + \beta \langle w, z \rangle_V$, para todo $v, w, z \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (*linealidad en el primer argumento*).
3. $\langle v, v \rangle_V \geq 0$, para todo $v \in V$.
4. $\langle v, v \rangle_V = 0$ si y sólo si $v = 0$.

Definición 1.1.8. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interior y sea $v \in H$ se define la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$.

Corolario 1.1.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Si V es un espacio pre-hilbertiano, se tiene: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ para cualesquiera $v, w \in V$.

Sólo se verifica la igualdad cuando v y w son linealmente dependientes, es decir, $w = 0$ o $v \in \mathbb{C}_w$.

Demostración. Fijamos $w \in V$ y suponemos sin pérdida de generalidad que $w \neq 0$. Para cualesquiera $z \in V$ y $t \in \mathbb{R}$, usando las propiedades del producto escalar, tenemos:

$$0 \leq \langle tw - z, tw - z \rangle = t^2 \|w\|^2 - t[\langle z, w \rangle] + \langle w, z \rangle + \|z\|^2 = at^2 + bt + c, \quad (1.1)$$

donde $a = \|w\|^2$, $b = -2\operatorname{Re}\langle z, w \rangle$ y $c = \|z\|^2$ son números reales, con $a > 0$. Por tanto, el trinomio de segundo grado $at^2 + bt + c$ no toma valores negativos y deducimos que la ecuación $at^2 + bt + c = 0$ no puede tener dos soluciones reales y distintas, lo que implica $b^2 - 4ac \leq 0$. El mismo resultado se obtiene tomando directamente $t = -b/2a$. Esto prueba que

$$\operatorname{Re}\langle z, w \rangle \leq \|z\|\|w\|, \quad (1.2)$$

para todo $z \in V$. Observemos que si se da la igualdad en (1.2) la ecuación $at^2 + bt + c = 0$ tiene una solución $t \in \mathbb{R}$, lo que en vista de (1.1) implica que $z = tw$.

Fijamos ahora $v \in V$ y escribimos $|\langle v, w \rangle| = \alpha \langle v, w \rangle = \langle \alpha v, w \rangle$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\|\alpha\| = 1$. Puesto que $\langle \alpha v, w \rangle$ es un número real, tomando $z = \alpha v$ en (1.2) tenemos:

$$|\langle v, w \rangle| = \langle z, w \rangle = \operatorname{Re}\langle z, w \rangle \leq \|z\|\|w\| = \|v\|\|w\| \quad (1.3)$$

Si se da la igualdad en (1.3) para un $v \in V$, tenemos claramente la igualdad en (1.2) para $z = \alpha v$, pero esto implicaba que $z = tw$ para algún $t \in \mathbb{R}$, de donde $v = \alpha tw \in \mathbb{C}_y$. Recíprocamente, es claro que la condición $v \in \mathbb{C}_y$ implica la igualdad en (1.3). $\square$

Definición 1.1.9 (Espacio de Hilbert). Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interior que es completo con respecto a la norma inducida por dicho producto interior.

Teorema 1.1.3. Sea H un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de H . Entonces, para todo $x \in H \setminus V$ existe un único $z \in V$ tal que

$$\|x - z\| = \min_{v \in V} \|x - v\|.$$

Además, $z \in V$ se llama la mejor aproximación de V y está caracterizada por la condición de ortogonalidad, esto es,

$$\langle x - z, v \rangle = 0, \quad \text{para todo } v \in V.$$

Demostración. Existencia de z : Sea $\{u_n\}$ una sucesión en V tal que,

$$\{\|x_n - x\|\} \rightarrow d(x, V).$$

Fijemos $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\|x_n - x\|^2 < d^2(x, V) + \frac{\varepsilon^2}{4} \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 0 \quad (1.4)$$

Veamos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, aplicando la ley del paralelogramo para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 + \|(x - x_n) - (x - x_m)\|^2 = 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2)$$

de aquí

$$\|2x - (x_n + x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2)$$

o bien

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2) - 4\left\|x - \frac{(x_n + x_m)}{2}\right\|^2. \quad (1.5)$$

Puesto que $\frac{x_n + x_m}{2} \in V$, se tiene que

$$\left\|x - \frac{(x_n + x_m)}{2}\right\|^2 \geq d^2(x, V)$$

de modo que de (2.2) y (2.18) tenemos: $\|x_n - x_m\|^2 \leq 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2) - 4d^2 < 4\left(d^2(x, V) + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) - 4d^2(x, V) = \varepsilon^2$, entonces

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

lo cual indica que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en H . Dado que V es cerrado, existe $z \in V$ tal que $\|x_n - z\| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$ y por lo tanto

$$d = \inf_{v \in V} \|x - v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = \|x - z\|.$$

Unicidad. Sea $\bar{z} \in V$ tal que $d = \|x - z\| = \|x - \bar{z}\|$. Aplicando nuevamente la ley del paralelogramo resulta: $\|z - \bar{z}\|^2 \leq 2(\|x - z\|^2 + \|x - \bar{z}\|^2) - 4d^2 = 0$, de donde se sigue que $z = \bar{z}$.

Caracterización. Supongamos que $z \in V$ verifica que

$$\|x - z\| = \min_{v \in V} \|x - v\|.$$

Entonces, para todo $h \in \mathbb{C}$ y todo $v \in V$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &\leq \|x - (z + hv)\|^2 = \|(x - z) - hv\|^2 \\ &= \langle (x - z) - hv, (x - z) - hv \rangle \\ &= \|x - z\|^2 + |h|^2 \|v\|^2 - 2h \langle x - z, v \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $0 \leq h\bar{h}\|v\|^2 - 2h\langle x - z, v \rangle$.

Dividiendo por $h > 0$ (respectivamente $h < 0$),

$$0 \leq \bar{h}\|v\|^2 - 2\langle x - z, v \rangle,$$

(respectivamente $0 \geq \bar{h}\|v\|^2 - 2\langle x - z, v \rangle$) y tomando $\lim_{\bar{h} \rightarrow 0^+}$ (respectivamente $\lim_{\bar{h} \rightarrow 0^-}$), se obtiene que

$$\langle x - z, v \rangle = 0, \quad \text{para todo } v \in V.$$

Recíprocamente, sea $z \in V$ tal que $\langle x - z, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|x - v\|^2 &= \|(x - z) + (z - v)\|^2 \\ &= \|x - z\|^2 + \|z - v\|^2 + 2\langle x - z, z - v \rangle \\ &= \|x - z\|^2 + \|z - v\|^2, \end{aligned}$$

de donde $\|x - z\| \leq \|x - v\|$ para todo $v \in V$ y $\|x - z\| = \|x - v\|$ si y sólo si $v = z$. $\square$

Definición 1.1.10. Un conjunto $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ se llama conjunto ortogonal si $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. El conjunto se llama ortonormal si es ortogonal y todas las v_j son vectores unitarios.

Definición 1.1.11. Una base para V con un conjunto ortogonal se llama base ortogonal. Una base ortogonal hecha de vectores unitarios se llama base ortonormal.

Por supuesto si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortogonal, entonces $\left\{ \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \dots, \frac{1}{\|v_n\|} v_n \right\}$ es una base ortonormal.

Corolario 1.1.4. Sean H un espacio de Hilbert, V un subespacio cerrado de H y $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de V

$$si \quad x = \sum_{k=1}^n x_k u_k \quad y = \sum_{k=1}^n y_k u_k \quad \text{entonces} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k \quad (1.6)$$

Demostración. Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de V .

Como

$$x = \sum_{k=1}^n x_k u_k \quad y = \sum_{k=1}^n y_k u_k,$$

entonces, $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ y $y = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$. Luego, para cada $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x_1 u_1 + \dots + x_n u_n, y_1 u_1 + \dots + y_n u_n \rangle \\ &= \overline{\langle y_1 u_1 + \dots + y_n u_n, x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \rangle} \\ &= \overline{x_1} \overline{\langle y_1 u_1 + \dots + y_n u_n, u_1 \rangle} + \dots + \overline{x_k} \overline{\langle y_1 u_1 + \dots + y_n u_n, u_k \rangle} + \dots \\ &\quad + \overline{x_n} \overline{\langle y_1 u_1 + \dots + y_n u_n, u_n \rangle} \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k \end{aligned}$$

□

Corolario 1.1.5. Sean H un espacio de Hilbert y V un subespacio de H . Cualquier base ortogonal de V se puede completar a una base ortogonal de H .

Demostración. Aplicar el Teorema de ortogonalización de Gram- schmidt □

Teorema 1.1.6 (Teorema de descomposición Ortogonal). Sean H un espacio de Hilbert y V un subespacio cerrado de H . Entonces $H = V \oplus V^\perp$ donde $V^\perp = \{y \in H : \langle y, v \rangle = 0, \text{ para todo } v \in V\}$.

Demostración. Primero mostremos que $V^\perp$ es un subespacio. En efecto, sea $x, y \in V^\perp$, entonces $\langle x, v \rangle = 0$ y $\langle y, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$. Entonces para cualesquiera c, d escalares en $\mathbb{C}$ tenemos que

$$\langle cx + dy, v \rangle = c\langle x, v \rangle + d\langle y, v \rangle = 0$$

para todo $v \in V$. Esto muestra que $cx + dy \in V^\perp$. Por otro lado, note que la suma es directa, ya que, si $v \in V \cap V^\perp$ entonces $v \in V$ y $v \in V^\perp$. Por lo tanto,

$$\langle v, v \rangle = 0 \quad \text{implicando que} \quad v = 0.$$

Ahora mostremos que $V \oplus V^\perp = H$, para ello, consideremos $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base ortogonal de V , por (1.1.5) $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$ es una base ortogonal de H . Entonces

$$V^\perp = S_p(v_1 \cdots, v_{n-k}).$$

Una contención es inmediata, la cual es $S_p(v_1 \cdots, v_{n-k}) \subset V^\perp$ y la otra contención es fácil verificar, si $x \in V^\perp$ entonces $x \in S_p(v_1 \cdots, v_{n-k})$. Así, $V^\perp = S_p(v_1 \cdots, v_{n-k})$. Por lo tanto,

$$H = V \oplus V^\perp.$$

□

Corolario 1.1.7. Sea H un espacio de Hilbert y V un subespacio cerrado propio de H . Entonces, existe $\bar{y} \in H \setminus \{0\}$ tal que $\bar{y} \perp V$.

Demostración. Como V es subespacio propio cerrado de H existe $\bar{y} \in H \setminus V$, $\bar{y} \neq 0$. Como $H \setminus V \subset V^\perp$, entonces $\bar{y} \in V^\perp$ y $\bar{y} \neq 0$. □

Teorema 1.1.8 (Teorema de Representación de Riesz). Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $f : H \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces, existe un único $z = z_f \in H$ tal que $f(x) = \langle z, x \rangle$ para todo $x \in H$.

Demostración. Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de H . y f un funcional lineal, entonces para todo $x \in H$

$$f(x) = f \left[\sum_{k=1}^n x_k u_k \right].$$

Note que $x = \sum_{k=1}^n x_k u_k$. Luego,

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f(u_k)$$

Como f es un funcional lineal, existe $z = z_f$ tal que

$$z = \sum_{k=1}^n \overline{f(u_k)} u_k.$$

Por (1.6) tenemos que,

$$\langle z, x \rangle = \sum_{k=1}^n f(u_k) x_k = \sum_{k=1}^n x_k f(u_k) = f(x).$$

Para probar la unicidad, tomamos $\langle z, x \rangle = \langle w, x \rangle$ nuevamente por (1.6) concluimos que $\langle z, x \rangle = \langle w, x \rangle$. Por lo tanto, $z = w$. $\square$

Definición 1.1.12. Una forma sesquilineal $A : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua si existe una constante M tal que

$$|A(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \text{para todo } u, v \in H.$$

Cada forma continua se puede representar mediante un único operador lineal acotado.

Corolario 1.1.9. Supongamos que $A : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal continua. Existe un único operador lineal acotado T que actúa sobre H tal que

$$A(u, v) = (Tu, v) \quad \text{para todo } u, v \in H.$$

Demostración. Sea $u \in H$ fijo. Consideremos el funcional lineal continuo

$$f(v) := \overline{A(u, v)}, \quad v \in H.$$

Por el teorema de representación de Riesz, existe un único vector $Tu \in H$, tal que

$$f(v) := A(v, Tu), \quad v \in H.$$

El hecho de que T sea un operador lineal y continuo sobre H se sigue fácilmente de la linealidad y continuidad de la forma A . La unicidad de T es obvia. $\square$

Teorema 1.1.10 (Teorema de Lax-Milgram). Sean H un espacio de Hilbert y $A : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma sesquilineal continua. Suponga que A es coercitivo, es decir, existe una constante $\delta > 0$ tal que $\operatorname{Re} A(u, u) \geq \delta \|u\|^2$ para todo $u \in H$. Sea f un funcional lineal continuo sobre H . Entonces existe un único $v \in H$ tal que $f(u) = A(u, v)$ para todo $u \in H$.

Demostración. Basta probar que el operador adjunto T^* es invertible en H . De hecho, por el teorema de representación de Riesz, existe un único $g \in H$ tal que, $f(u) = (u, g)$ para todo $u \in H$, y por lo tanto escribiendo $g = T^*v$ para algún $v \in H$, se sigue que, $f(u) = (u; T^*v) = (Tu; v) = A(u, v)$ para todo $u \in H$. Ahora demostremos que T^* es invertible. Sea $v \in H$ tal que $T^*v = 0$. Por lo tanto, $0 = (v, T^*v) = (Tv, v) = \operatorname{Re}(A(v, v)) \geq \delta\|v\|^2$. Por lo tanto, $v = 0$, por lo que T^* es inyectiva. Queda por demostrar que T^* tiene rango $R(T^*) = H$. Primero probemos que $R(T^*)$ es denso. Si $u \in H$ es tal que,

$$(u; T^*v) = 0 \quad \text{para todo } v \in H.$$

Luego, tomando $v = u$ y usando nuevamente el supuesto de coercitividad, obtenemos $u = 0$. Finalmente, demostremos que $R(T^*)$ es cerrado. Para ello, sea $v_k = T^*u_k$ una sucesión que converge a $v \in H$. Tenemos

$$\begin{aligned} \delta\|u_k - u_j\|^2 &\leq \operatorname{Re} A(u_k - u_j, u_k - u_j) \\ &\leq |(u_k - u_j; T^*u_k - T^*u_j)| \\ &\leq \|u_k - u_j\| \|v_k - v_j\|. \end{aligned}$$

De esto se deduce que $\{u_k\}_k$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto converge en H . Si u denota el límite, entonces $v = T^*u$ por continuidad de T^* . Esto prueba que $R(T^*)$ es cerrado. $\square$

1.2. Espacios de Sobolev ponderados

En esta sección definimos los espacios de Sobolev ponderados apropiados que se utilizarán en la continuación de este trabajo y establecemos algunas de sus propiedades; las pruebas correspondientes se pueden encontrar en [11, 21, 24, 22]. Se pueden encontrar resultados más generales sobre los espacios de Sobolev ponderados en la última referencia. Para simplificar la notación, denotaremos las derivadas parciales por ∂_r y ∂_z .

Sea $L_r^2(\Omega)$ el espacio de Lebesgue ponderado de todas las funciones medibles u

definido en Ω en las que

$$\|u\|_{L_r^2(\Omega)} := \int_{\Omega} |u|^2 r \, dr \, dz < \infty.$$

El espacio de Sobolev ponderado $H_r^k(\Omega)$ consta de todas las funciones en $L_r^2(\Omega)$ cuyas derivadas hasta el orden k también están en $L_r^2(\Omega)$. Definimos las normas y seminormas de la manera estándar; en particular,

$$\begin{aligned} |u|_{H_r^1(\Omega)}^2 &:= \int_{\Omega} (|\partial_r u|^2 + |\partial_z u|^2) r \, dr \, dz, \\ |u|_{H_r^2(\Omega)}^2 &:= \int_{\Omega} (|\partial_{rr} u|^2 + |\partial_{rz} u|^2 + |\partial_{zz} u|^2) r \, dr \, dz. \end{aligned}$$

Sea $\tilde{H}_r^1(\Omega) := H_r^1(\Omega) \cap L_{1/r}^2(\Omega)$, donde $L_{1/r}^2(\Omega)$ denota el conjunto de todas las funciones medibles u definidas en Ω para las cuales

$$\|u\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{r} \, dr \, dz < \infty.$$

$\tilde{H}_r^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la norma

$$\|u\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} := \left(\|u\|_{H_r^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Sea $\tilde{H}_r^2(\Omega) := \{u \in \tilde{H}_r^1(\Omega) : \|u\|_{\tilde{H}_r^2(\Omega)} < \infty\}$, donde

$$\|u\|_{\tilde{H}_r^2(\Omega)}^2 := |u|_{\tilde{H}_r^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)}^2 + \|\partial_z u\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2,$$

con

$$|u|_{\tilde{H}_r^2(\Omega)}^2 := \left| \frac{1}{r} \partial_r(ru) \right|_{H_r^1(\Omega)}^2 + |\partial_z u|_{H_r^1(\Omega)}^2.$$

La demostración de los siguientes tres lemas se encuentra en [\[21\]](#) Section 3.1].

Lema 1.2.1. El conjunto $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ de funciones que se desvanecen en una vecindad de Γ_D es denso en $\tilde{H}_r^1(\Omega)$.

Lema 1.2.2. Considere la notación de la Figura [1.1](#) con $0 \leq r_0 < r_1$ y $a \in [r_0, r_1]$. Para todo $u \in \tilde{H}_r^1(S)$, $u|_{\gamma_a} \in L^2(\gamma_a)$ se sigue que

$$\|u\|_{L^2(\gamma_a)}^2 \leq \|\partial_r u\|_{L_r^2(S)}^2 + \frac{2r_1 - r_0}{r_1 - r_0} \|u\|_{L_{1/r}^2(S)}^2.$$

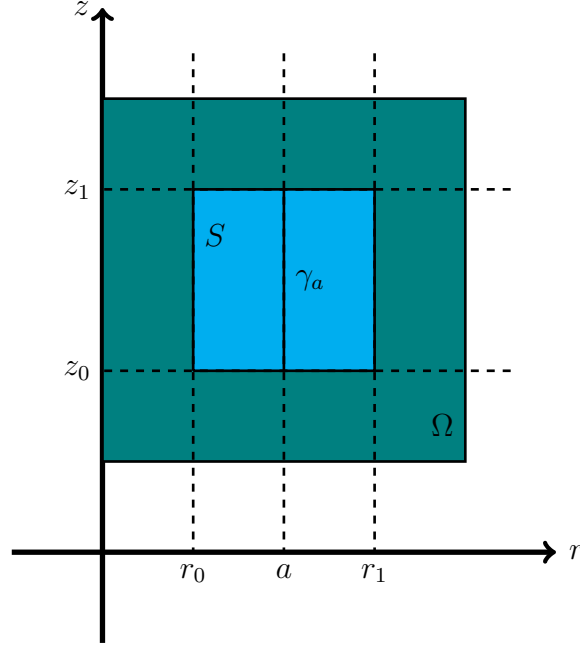


Figura 1.1: Bosquejo de S .

El resultado anterior implica que las funciones en $\tilde{H}_r^1(\Omega)$ tienen traza en Γ_D ($r = 0$). Además, dado que el conjunto de las funciones en $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ que se anulan en una vecindad de Γ_D es denso en $\tilde{H}_r^1(\Omega)$ (cf. Lemma [1.2.1](#)), las funciones en $\tilde{H}_r^1(\Omega)$ tienen trazas que se anulan en Γ_D .

Lema 1.2.3. Para todo $u \in \tilde{H}_r^1(\Omega)$ y $\partial_r(ru) \in L_{1/r}^2(\Omega)$ se sostiene

$$\|\partial_r u\|_{L_r^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2 \leq \|\partial_r(ru)\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2 \leq 2\|\partial_r u\|_{L_r^2(\Omega)}^2 + 2\|u\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2.$$

El siguiente resultado ha sido probado en [\[24\]](#) Theorem 4.7].

Lema 1.2.4. La inyección $H_r^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ es continua.

Lema 1.2.5 (Petree-Tartar). Sean X, Y, Z tres espacios de Banach. Sea $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ un operador inyectivo y sea $T \in \mathcal{L}(X; Z)$ un operador compacto. Si existe $c > 0$ tal que $c\|x\|_X \leq \|Ax\|_Y + \|Tx\|_Z$, entonces $Im(A)$ es cerrada; equivalentemente, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\forall x \in X, \quad \alpha\|x\|_X \leq \|Ax\|_Y.$$

Demostración. Razonemos por contradicción, esto es, supongamos que existe una sucesión $\{x_n\}$ de X tal que $\|x_n\|_X = 1$ y $\|Ax_n\|_Y$ converge a cero cuando n tiende a infinito. Ya que T es compacto y $\{x_n\}$ es una sucesión acotada, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}$ es una sucesión de Cauchy en Z . Debido a la desigualdad

$$\alpha\|x_{n_k} - x_{m_k}\|_X \leq \|Ax_{n_k} - Ax_{m_k}\|_Y + \|Tx_{n_k} - Tx_{m_k}\|_Z,$$

se concluye que $\{x_{n_k}\}$ es una sucesión de Cauchy en X . Sea x el límite de la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ en X . Luego, por la continuidad de A tenemos que $Ax_{n_k} \rightarrow Ax$ y $Ax = 0$, ya que $Ax_{n_k} \rightarrow 0$. Nótese que como A es inyectiva, se tiene que $x = 0$, lo que contradice la hipótesis de que $\{x_{n_k}\}_X = 1$. $\square$

Finalmente, el siguiente lema es una variación de un resultado de [18].

Lema 1.2.6. Sea Ω un conjunto abierto conexo acotado de Lipschitz. Sea f un funcional lineal continuo sobre $H_r^1(\Omega)$ cuya restricción a funciones constantes no es cero. Entonces, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha\|u\|_{H_r^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L_r^2(\Omega)} + |f(u)| \quad \forall u \in H_r^1(\Omega).$$

Demostración. Repetimos los pasos de la prueba del Lema 1.2.5 con $X := H_r^1(\Omega)$, $Y := L_r^2(\Omega) \times \mathbb{C}$ y $Z := L_r^2(\Omega)$, y usamos que la inyección $X \hookrightarrow Z$ es compacta debido al Teorema 4.5 de [24]. $\square$

Capítulo 2

Problema de corrientes inducidas

2.1. Coordenadas Cilíndricas y Espacios de Sobolev

Como nuestro método calculará funciones axisimétricas es importante expresar dichas funciones en términos de las coordenadas (r, θ, z) . Los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas son denotados por $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$.

Así, una función vectorial puede ser escrita como $\mathbf{F} = (F_r, F_\theta, F_z)$ o como $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_z \mathbf{e}_z$. Dada una función vectorial $\mathbf{F} = F_r(r, \theta, z) \mathbf{e}_r + F_\theta(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta + F_z(r, \theta, z) \mathbf{e}_z$ y una función escalar $f = f(r, \theta, z)$, recordamos que

$$\nabla \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{F_\theta}{r} & \frac{\partial F_r}{\partial z} \\ \frac{\partial F_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{F_r}{r} & \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} & \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z, \quad (2.2)$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (2.3)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (2.4)$$

El conjunto de ecuaciones de Maxwell esta conformado por las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{curl} \mathbf{E} = 0, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (2.8)$$

En regimen armónico se consideran todos los campos de la forma

$$\mathbf{F}(t, r, z) = \text{Re} \left[e^{i\omega t} \hat{\mathbf{F}}(r, z) \right].$$

En estos casos, el modelo de corrientes inducidas se escribe de la siguiente manera

$$\mathbf{curl} \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{J}}, \quad (2.9)$$

$$i\omega \hat{\mathbf{B}} + \mathbf{curl} \hat{\mathbf{E}} = 0, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{div} \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{D} = 0. \quad (2.12)$$

Otra ley importante en electromagnetismo es la Ley de Ohm: en un conductor recorrido por una corriente eléctrica, el cociente entre la diferencia de potencial aplicada a los extremos del conductor y la intensidad de la corriente que por él circula es una cantidad constante, que depende del conductor. Esto se escribe como:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.13)$$

La conductividad eléctrica satisface

$$0 < \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma} \quad \text{en los conductores}, \quad (2.14)$$

$$\sigma \equiv 0 \quad \text{en el aire}, \quad (2.15)$$

mientras que los demás parámetros físicos están acotados por encima y por debajo:

$$0 < \underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}, \quad (2.16)$$

$$0 < \underline{\epsilon} \leq \epsilon \leq \bar{\epsilon}. \quad (2.17)$$

A continuación introducimos los espacios de funciones en Ω que contienen las trazas de funciones axisimétricas de espacios de Sobolev definidos en $\tilde{\Omega}$, donde $\tilde{\Omega}$ es el dominio tridimensional del horno. Sea $L_r^2(\Omega)$ el espacio de Lebesgue ponderado de todas las funciones medibles A definidas en Ω tal que

$$\|A\|_{L_r^2(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |A|^2 r \, dr \, dz < \infty.$$

El correspondiente producto interno esta definido por

$$(A, Z)_{L_r^2(\Omega)} = \int_{\Omega} AZ r \, dr \, dz.$$

El espacio de Sobolev ponderado $H_r^k(\Omega)$ consiste de todas las funciones en $L_r^2(\Omega)$ cuyas derivadas hasta de orden k también están en $L_r^2(\Omega)$. Definimos la norma y la seminorma en la forma usual; en particular

$$|A|_{H_r^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} (|\partial_r A|^2 + |\partial_z A|^2) r \, dr \, dz.$$

Sea $L_{1/r}^2(\Omega)$ el espacio de Lebesgue ponderado de todas las funciones medibles A definidas en Ω tal que

$$\|A\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} \frac{|A|^2}{r} \, dr \, dz < \infty.$$

Definamos el espacio de Hilbert $\tilde{H}_r^1(\Omega)$ por

$$\tilde{H}_r^1(\Omega) := \left\{ A \in H_r^1(\Omega) : A \in L_{1/r}^2(\Omega) \right\}$$

con la norma

$$\|A\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} := \left(\|A\|_{H_r^1(\Omega)}^2 + \|A\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2},$$

2.2. Planteamiento del Problema

El problema que abordaremos, es el estudio de un modelo axisimétrico de corrientes inducidas de un horno de inducción. Un sistema de horno de inducción consiste, básicamente, de uno o varios inductores y una pieza metálica a ser calentada. A los inductores se les suministra corriente alterna la cual induce corrientes dentro del componente a calentar debido a la Ley de Faraday. Esta técnica es ampliamente usada

en la industria metalúrgica en un número importante de aplicaciones tales como la fundición de metales, el precalentamiento para operaciones de soldadura, sistemas de purificación, y en general, procesos que necesiten un rápido calentamiento en zonas de una pieza conductora.

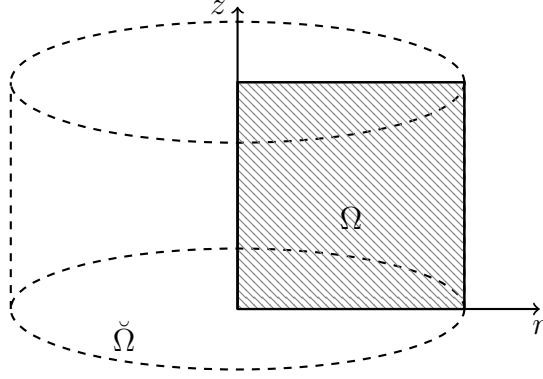


Figura 2.1: Dominio tridimensional y domonio bidimensional.

Tomando ventaja de la simetría cilíndrica, el problema tridimensional se reduce a un problema bidimensional en la sección meridional donde la densidad de corriente, escrita en coordenadas cilíndricas, tiene solo componente azimuthal, esto es,

$$\mathbf{J} = J(r, \theta, z)\mathbf{e}_\theta. \quad (2.18)$$

Nótese que si asumimos que el campo eléctrico $\mathbf{H}$ no depende de θ , las expresiones dadas en (2.9), (2.18) y (2.2) conducen a

$$-\frac{\partial H_\theta}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} = 0,$$

lo que a su vez implica que rH_θ tiene que ser constante en $\tilde{\Omega}$. Ahora, si $\mathbf{H} \in L^2(\tilde{\Omega})^3$, entonces $H_\theta \mathbf{e}_\theta \in L^2(\tilde{\Omega})^3$. Sin embargo, rH_θ es constante sólo si esta constante es cero. Por lo tanto, H_θ tiene que desaparecer y por (2.12), B_θ también desaparecerá. Además de (2.13), (2.14) y (2.2) $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{E}_z$ también desaparecen en los conductores. Por lo tanto, tenemos

$$\mathbf{H}(r, \theta, z) = H_r(r, z)\mathbf{e}_r + H_z(r, z)\mathbf{e}_z, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, z) = B_r(r, z)\mathbf{e}_r + B_z(r, z)\mathbf{e}_z, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{E}(r, \theta, z) = E_\theta(r, z)\mathbf{e}_\theta \quad (\text{en los conductores}). \quad (2.21)$$

A partir de (2.11), se introduce un potencial magnético vectorial $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{B} = \mathbf{curl} \mathbf{A}, \quad (2.22)$$

y de la forma

$$\mathbf{A} = A_\theta(r, z)\mathbf{e}_\theta. \quad (2.23)$$

Para mayor singularidad, tomamos $\mathbf{A}$ con divergencia nula, y satisfaciendo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ en $\partial\tilde{\Omega}$. Por lo tanto, tenemos

$$\mathbf{curl} \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{en } \tilde{\Omega}, \quad (2.24)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad \text{en } \tilde{\Omega}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \partial\tilde{\Omega} \quad (2.26)$$

A partir de (2.24), (2.20) y (2.2) obtenemos

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Por lo tanto, ya que Ω es conexo, existe $\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $A_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ y $A_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Por otro lado, a partir de (2.25), (2.3) y (2.4),

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \Delta \varphi \quad \text{en } \tilde{\Omega},$$

donde $\varphi(r, \theta, z) := \varphi(r, z)$. Por lo tanto, tenemos

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{en } \tilde{\Omega}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \partial\tilde{\Omega} \quad (2.28)$$

(para la deducción de la condición de contorno, observe la figura a continuación).

Por lo tanto, φ es constante y de acuerdo con nuestra suposición axisimétrica, buscaremos $\mathbf{A}$ independiente de la variable angular. Se puede probar que $A_r = A_z = 0$ y así concluimos que

$$\mathbf{A}(r, \theta, z) = A_\theta(r, z)\mathbf{e}_\theta \quad \text{en } \tilde{\Omega},$$

y por lo tanto, de (2.24) y (2.2) uno obtiene que

$$B_r(r, z) = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \quad \text{y} \quad B_z(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \quad \text{en } \Omega. \quad (2.29)$$

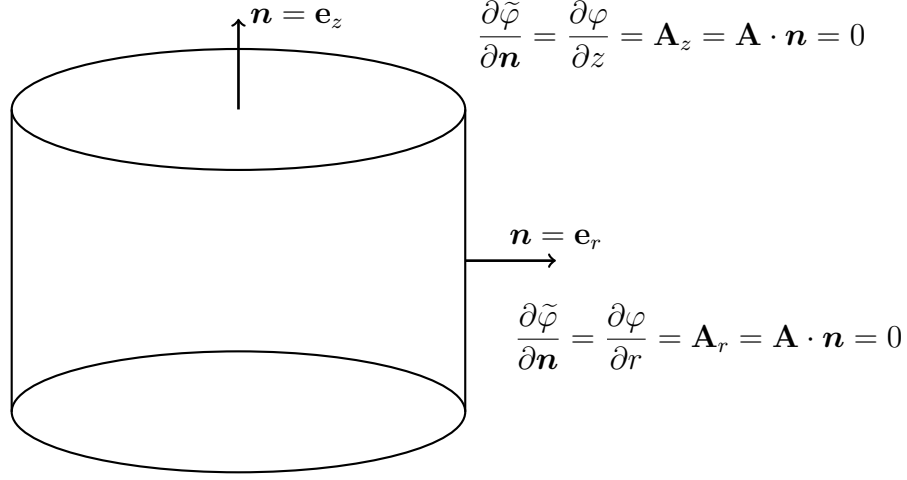


Figura 2.2: Condiciones de frontera problema (2.27)–(2.28).

Por otro lado, teniendo en cuenta de nuevo (2.24), deducimos de (2.10) y (2.13) que

$$\mathbf{curl} \left((i\omega A_\theta + \sigma^{-1} J_\theta) \mathbf{e}_\theta \right) = 0 \quad (\text{en los conductores}),$$

por lo que se deduce de (2.2) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (i\omega A_\theta + \sigma^{-1} J_\theta) &= 0 & \text{en } \Omega_0, \\ \frac{\partial}{\partial r} (r (i\omega A_\theta + \sigma^{-1} J_\theta)) &= 0 & \text{en } \Omega_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, deducimos que existen constantes $V_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, m$, tal que,

$$i\omega A_\theta + \sigma^{-1} J_\theta = \frac{V_k}{r} \quad \text{en } \Omega_k \quad (2.30)$$

(recordemos que Ω_k son los componentes conexos de Ω_0). Se sigue de (2.9), (2.8), (2.20), (2.29) y (2.18),

$$\mathbf{curl} \left(-\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{\mu r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) = J_\theta \mathbf{e}_\theta.$$

Así, teniendo en cuenta (2.2) y (2.30), obtenemos que para $k = 0, \dots, m$,

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \right) + i\omega \sigma A_\theta = \frac{\sigma}{r} V_k \quad \text{en } \Omega_k, \quad (2.31)$$

mientras que el uso de ese J_θ desaparece fuera de los conductores

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \right) = 0 \quad \text{en } \Omega_A. \quad (2.32)$$

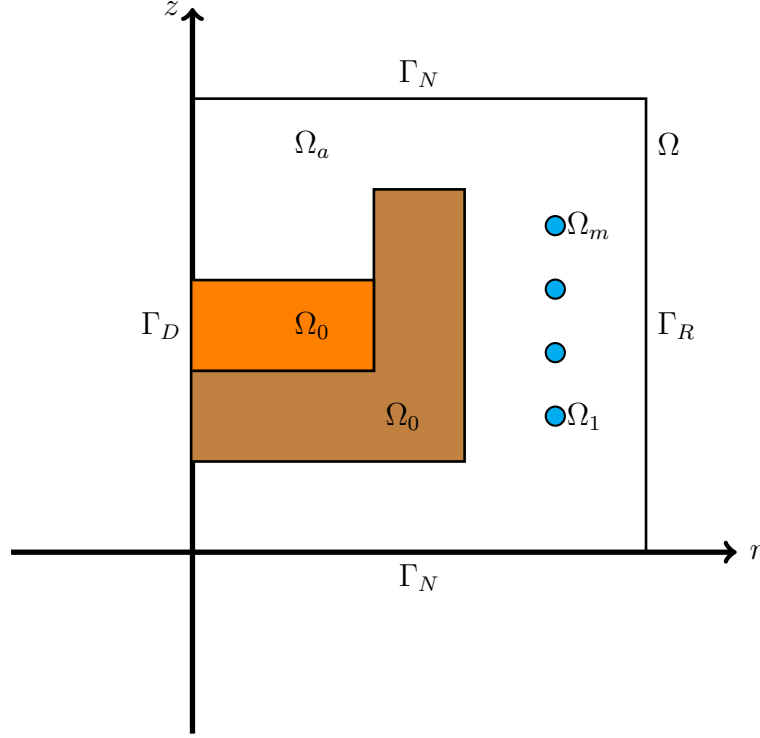


Figura 2.3: Dominio del problema Variacional.

Para resolver ecuaciones (2.31) y (2.32), asumimos que las intensidades que atraviesan cada anillo cilíndrico reciben datos. Así añadimos al modelo las ecuaciones

$$\int_{\Omega_k} J_\theta dr dz = I_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

siendo I_k la intensidad que atraviesa Ω_k . Por lo tanto, de (2.30), tenemos que para $k = 1, \dots, m$.

$$V_k = \frac{1}{d_k} \left(I_k + i\omega \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta dr dz \right), \quad (2.33)$$

donde

$$d_k := \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} dr dz.$$

Consideraciones físicas adicionales nos permiten imponer

$$V_0 = 0. \quad (2.34)$$

Tenga en cuenta que, como consecuencia de (2.30), esta condición debe mantenerse para que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{E}$ pertenezcan a $L^2(\tilde{\Omega})^3$, para que $(\partial\Omega_0 \cap \Gamma_D) > 0$.

Las ecuaciones (2.31)–(2.34) debe completarse con condiciones de contorno adecuadas. Consecuentemente imponemos la condición de Robin Γ_R

$$\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} + A_\theta = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_R \quad (2.35)$$

y sobre la condición homogénea de Neumann Γ_N

$$\frac{\partial A_\theta}{\partial z} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N. \quad (2.36)$$

Esto último se deriva del hecho de que la componente radial de la inducción magnética es cercana a cero en este límite. Finalmente, la condición de simetría natural a lo largo del eje de revolución conduce a

$$A_\theta = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D. \quad (2.37)$$

2.3. Formulación variacional

En esta sección establecemos una formulación variacional del problema (2.31) – (2.37) para la cual probaremos la existencia y unicidad de la solución. Con este fin, multiplicamos (2.31) y (2.32) por una función de prueba en $\tilde{H}_r^1(\Omega)$, integramos por partes, aprovechamos que las funciones en este espacio tienen un rastro de fuga en Γ_0 , las condiciones de contorno (2.35) y (2.36), (2.34) y reescribir (2.33) de manera conveniente, para obtener el siguiente problema:

Problema 2.3.1. Dado $\mathbf{I} := (I_1, \dots, I_m) \in \mathbb{C}^m$, encontrar $(A_\theta, \mathbf{V}) \in \tilde{H}_r^1(\Omega) \times \mathbb{C}^m$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_\theta \bar{Z} dz \\ + i\omega \int_{\Omega_0} \sigma A_\theta \bar{Z} r dr dz - \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \sigma V_k \bar{Z} dr dz = 0 \quad \forall Z \in \tilde{H}_r^1(\Omega), \\ \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \sigma \bar{W}_k A_\theta dr dz + \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \frac{\sigma \bar{W}_k V_k}{r} dr dz = \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m \bar{W}_k I_k \quad \forall \mathbf{W} \in \mathbb{C}^m. \end{aligned}$$

Sea a una forma sesquilineal definida en $\tilde{H}_r^1(\Omega)$ por

$$a(A_\theta, Z) := \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_\theta \bar{Z} dz \\ + i\omega \left(\int_{\Omega_0} \sigma A_\theta \bar{Z} r dr dz - \sum_{k=1}^m \frac{1}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta dr dz \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz \right).$$

Para el análisis, utilizaremos el siguiente problema:

Problema 2.3.2. Dado $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^m$, encontrar $A_\theta \in \tilde{H}_r^1(\Omega)$ tal que

$$a(A_\theta, Z) = \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz \quad \forall Z \in \tilde{H}_r^1(\Omega).$$

El siguiente lema muestra que los problemas (2.3.1) y (2.3.2) son equivalentes.

Lema 2.3.1. Sea $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^m$. Si $(A_\theta, \mathbf{V})$ es una solución del problema (2.3.1), entonces A_θ es una solución del problema (2.3.2). En cambio, si A_θ es una solución del problema (2.3.2) y $V_k, k = 1, \dots, m$, están definidas por (2.33), entonces $(A_\theta, \mathbf{V})$ es una solución del problema (2.3.1).

Demostración. En primer lugar vamos a suponer que $(A_\theta, \mathbf{V})$ es una solución del problema (2.3.1) y verifiquemos que A_θ es solución del problema (2.3.2). En efecto,

Sean $\mathbf{I} := (I_1, \dots, I_m) \in \mathbb{C}^m$ y $(A_\theta, \mathbf{V}) \in \tilde{H}_r^1(\Omega) \times \mathbb{C}^m$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_\theta \bar{Z} dz \\ + i\omega \int_{\Omega_0} \sigma A_\theta \bar{Z} r dr dz - \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \sigma V_k \bar{Z} dr dz = 0 \quad \forall Z \in \tilde{H}_r^1(\Omega), \\ \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \sigma \bar{W}_k A_\theta dr dz + \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \frac{\sigma \bar{W}_k V_k}{r} dr dz = \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m \bar{W}_k I_k \quad \forall \mathbf{W} \in \mathbb{C}^m.$$

Primero sumamos las dos ecuaciones anteriores,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_\theta \bar{Z} dz \\ + i\omega \int_{\Omega_0} \sigma A_\theta \bar{Z} r dr dz - \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \sigma V_k \bar{Z} dr dz \\ + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \sigma \bar{W}_k A_\theta dr dz + \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \frac{\sigma \bar{W}_k V_k}{r} dr dz = \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m \bar{W}_k I_k.$$

Luego, reemplazamos [2.33](#) de una manera adecuada y obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial A_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_{\theta} \bar{Z} dz + i\omega \int_{\Omega_0} \sigma A_{\theta} \bar{Z} r dr dz \\ & - \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz - i\omega \sum_{k=1}^m \frac{1}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma A_{\theta} dr dz \int_{\Omega_k} r \bar{Z} dr dz + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \sigma \bar{W}_k A_{\theta} dr dz \\ & + \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m \frac{I_k \bar{W}_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} dr dz - \sum_{k=1}^m \frac{\bar{W}_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} dr dz \int_{\Omega_k} \sigma A_{\theta} dr dz = \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m \bar{W}_k I_k. \end{aligned}$$

Recordemos que $d_k := \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} dr dz$, así muchos términos se anulan y nos queda:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial A_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_{\theta} \bar{Z} dz \\ & + i\omega \int_{\Omega_0} \sigma A_{\theta} \bar{Z} r dr dz - \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz \\ & - i\omega \sum_{k=1}^m \frac{1}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma A_{\theta} dr dz \int_{\Omega_k} r \bar{Z} dr dz + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \sigma \bar{W}_k A_{\theta} dr dz \\ & + \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m I_k \bar{W}_k - \sum_{k=1}^m \bar{W}_k \int_{\Omega_k} \sigma A_{\theta} dr dz = \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m \bar{W}_k I_k, \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial A_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_{\theta} \bar{Z} dz \\ & + i\omega \int_{\Omega_0} \sigma A_{\theta} \bar{Z} r dr dz - i\omega \sum_{k=1}^m \frac{1}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma A_{\theta} dr dz \int_{\Omega_k} r \bar{Z} dr dz \\ & = \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz. \end{aligned}$$

Obsérvese que el lado izquierdo y el lado derecho corresponden a la forma sesquilineal del problema [2.3.2](#).

Para la otra dirección supongamos que

$$a(A_{\theta}, Z) = \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz.$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial A_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_{\theta} \bar{Z} dz \\ & - \sum_{k=1}^m \frac{i\omega}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma A_{\theta} \int_{\Omega_c} \sigma \bar{Z} dr dz = \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz. \end{aligned}$$

Como

$$V_k = \frac{1}{d_k} \left(I_k + i\omega \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta dr dz \right) = \frac{I_k}{d_k} - \frac{i\omega}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta dr dz.$$

Así

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_\theta \bar{Z} dz \\ - \sum_{k=1}^m \left(V_k - \frac{I_k}{d_k} \right) \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta \int_{\Omega_c} \sigma \bar{Z} dr dz = \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_\theta \bar{Z} dz \\ - \sum_{k=1}^m V_k \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta \int_{\Omega_c} \sigma \bar{Z} dr dz + \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta \int_{\Omega_c} \sigma \bar{Z} dr dz = \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_\theta \bar{Z} dz \\ - \sum_{k=1}^m V_k \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta \int_{\Omega_c} \sigma \bar{Z} dr dz = 0. \end{aligned}$$

Además,

$d_k V_k = I_k + i\omega \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta dr dz$ multiplicando por $\bar{W}_k$ tenemos,

$d_k \bar{W}_k V_k = I_k \bar{W}_k + i\omega \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta \bar{W}_k dr dz$. Recordemos que $d_k := \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} dr dz$. Luego,

$$d_k \bar{W}_k V_k = \int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} \bar{W}_k V_k dr dz.$$

Se sigue que

$$\int_{\Omega_k} \frac{\sigma}{r} \bar{W}_k V_k dr dz = I_k \bar{W}_k + i\omega \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta \bar{W}_k dr dz.$$

Multiplicando por $\frac{i}{\omega}$ se obtiene la segunda ecuación del problema 2.3.2. □

Observación 1. El Problema 2.3.2 se usará para probar la existencia y unicidad de las estimaciones de solución y error, pero no para la aproximación numérica real, porque el término $\int_{\Omega_k} \sigma A_\theta dr dz \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz$ conduciría a una matriz completamente densa. De hecho, para los cálculos numéricos usaremos una discretización del Problema 2.3.1, ya que conduce a matrices en las que solo las últimas m filas y columnas de la matriz serán densas.

En el siguiente lema y en adelante, C denotará una constante genérica, no necesariamente la misma en cada aparición.

Lema 2.3.2.

$$\|u\|_{H_r^1(\Omega)} \leq C \left(|u|_{H_r^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Gamma_R)} \right) \quad \forall u \in H_r^1(\Omega).$$

Demostración. Sea $f(u) := \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} u \, dz$, $u \in H_r^1(\Omega)$. Entonces por el lema [1.2.6](#),

$$\alpha \|u\|_{H_r^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L_r^2(\Omega)} + |f(u)| \leq |u|_{H_r^1(\Omega)} + \frac{\sqrt{L}}{\underline{\mu}} \|u\|_{L^2(\Gamma_R)} \quad \forall u \in H_r^1(\Omega),$$

lo que nos permite concluir la prueba. $\square$

Observación 2. El lema anterior es válido para cualquier dominio conexo acotado de Lipschitz Ω y cualquier subconjunto $\Gamma_R \subset \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ con medida positiva.

Lema 2.3.3. La forma sesquilineal a es $\tilde{H}_r^1(\Omega)$ -elíptica y continua.

Demostración.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(a(A_\theta, A_\theta)) &\geq \frac{1}{\underline{\mu}} \left(\|\partial_r(rA_\theta)\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2 + \|\partial_z A_\theta\|_{L_r^2(\Omega)}^2 + \|A_\theta\|_{L^2(\Gamma_R)}^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{\underline{\mu}} \left(\|\partial_r A_\theta\|_{L_r^2(\Omega)}^2 + \|A_\theta\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2 + \|\partial_z A_\theta\|_{L_r^2(\Omega)}^2 + \|A_\theta\|_{L^2(\Gamma_R)}^2 \right) \\ &\geq C \left(\|A_\theta\|_{H_r^1(\Omega)}^2 + \|A_\theta\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= C \|A_\theta\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema [1.2.3](#) para la segunda desigualdad y el Lema [2.3.2](#) para la tercera. La continuidad se sigue directamente de los Lemas [1.2.2](#) y [1.2.3](#). $\square$

Ahora estamos en condiciones de demostrar que el Problema [2.3.1](#) está bien planteado. Aquí y después $\|\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^m} := (\sum_{k=1}^m |I_k|^2)^{1/2}$ denota la norma euclídeana estándar en $\mathbb{C}^m$.

Teorema 2.3.4. El problema [2.3.1](#) tiene una única solución que satisface

$$\|A_\theta\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq C \|\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^m}.$$

Demostración. Debido a que los Problemas [2.3.1](#) y [2.3.2](#) son equivalentes, basta con demostrar que este último está bien planteado. El lado derecho del problema [2.3.2](#) satisface

$$\left| \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz \right| \leq C \|\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^m} \|Z\|_{L_r^2(\Omega_k)}.$$

Por lo tanto, el teorema se sigue del lema [2.3.3](#) y el lema Lax-Milgram. $\square$

Para finalizar esta sección probaremos un resultado de regularidad para la solución del Problema [2.3.1](#), válido al menos cuando la permeabilidad magnética es constante en todo el dominio. Con este fin, consideraremos un marco un poco más general, que también se utilizará para probar un doble orden de convergencia en $L_r^2(\Omega)$ del método numérico propuesto en la siguiente sección. Considere el siguiente problema auxiliar:

Problema 2.3.3. Dado $g \in L_r^2(\Omega)$, encontrar $Y_\theta \in \tilde{H}_r^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rY_\theta)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{Z})}{\partial r} + \frac{\partial Y_\theta}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} Y_\theta \bar{Z} dz = \int_{\Omega} g \bar{Z} r dr dz \quad \forall Z \in \tilde{H}_r^1(\Omega),$$

Lema 2.3.5. Si μ es constante en Ω , entonces la solución del Problema [2.3.3](#) satisface $Y_\theta \in \tilde{H}_r^2(\Omega)$ y

$$\|Y_\theta\|_{\tilde{H}_r^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{L_r^2(\Omega)}.$$

Demostración. Los argumentos en la demostración del Lema [2.3.3](#) muestran que la forma sesquilineal del lado izquierdo del Problema [2.3.3](#) es $\tilde{H}_r^1(\Omega)$ -elíptica también. Por lo tanto, el problema está bien planteado y su solución satisface $\|Y_\theta\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{L_r^2(\Omega)}$.

Sea $\mathbf{Y}(r, \theta, z) := Y_\theta(r, z)\mathbf{e}_\theta$. Usamos [\(2.3\)](#) y Lema [1.2.3](#) es fácil mostrar que $\mathbf{curl} \mathbf{Y} \in L^2(\tilde{\Omega})^3$ y

$$\|\mathbf{Y}\|_{H(\mathbf{curl}, \tilde{\Omega})} \leq C \|Y_\theta\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{L_r^2(\Omega)}. \quad (2.38)$$

Para probar regularidad adicional probamos el Problema [2.3.3](#) con $Z \in \mathcal{D}(\Omega)$. Por tanto, usamos [\(2.3\)](#), [\(2.4\)](#) y el hecho que $\mathbf{e}_\theta$ es ortogonal a $\mathbf{n}$ en toda la frontera de

Ω , tenemos que

$$\mathbf{curl} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{curl} \mathbf{Y} \right) = g \mathbf{e}_\theta \quad \text{en } \tilde{\Omega}, \quad (2.39)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{Y} = 0 \quad \text{en } \tilde{\Omega}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\tilde{\Omega}. \quad (2.41)$$

Así que, por (2.38), (2.40) y (2.41), tenemos que $\mathbf{Y} \in H(\mathbf{curl}, \tilde{\Omega}) \cap H_0(\operatorname{div}, \tilde{\Omega})$. Por lo tanto, ya que $\tilde{\Omega}$ es convexo $\mathbf{Y} \in H^1(\tilde{\Omega})^3$ (cf. [8] Theorem 2.17]) y

$$\|\mathbf{Y}\|_{H^1(\tilde{\Omega})^3} \leq C \|\mathbf{Y}\|_{H(\mathbf{curl}, \tilde{\Omega})} \leq C \|g\|_{L^2_r(\Omega)}. \quad (2.42)$$

A continuación, demostramos que $\mathbf{curl} \mathbf{Y}$ también está en $H^1(\tilde{\Omega})^3$. En este caso el resultados de [8] no se puede aplicar directamente, porque $\mathbf{curl} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{n}$ con $\mathbf{curl} \mathbf{Y} \times \mathbf{n}$ desaparece sobre $\partial\tilde{\Omega}$. Esta es la razón para hacer una traslación usando la función Φ definida a continuación. Sea $0 < r_1 < r_2 < R$ (recuerda que Γ_R está en la línea $r = R$) y sea $\varphi \in C^\infty([0, R])$ tal que $\varphi(r) \equiv 0$ en $[0, r_1]$ y $\varphi(r) \equiv 1$ en $[r_2, R]$. Sea

$$\Phi(r, \theta, z) := -\frac{1}{R} \mathbf{Y}(r, \theta, z) \times \varphi(r) \mathbf{e}_r = \frac{1}{R} \varphi(r) Y_\theta(r, z) \mathbf{e}_z,$$

y $\Psi := \mathbf{curl} \mathbf{Y} + \Phi$. Nosotros mostraremos que $\Psi \in H_0(\mathbf{curl}, \tilde{\Omega}) \cap H(\operatorname{div}, \tilde{\Omega})$. Para probar esto, dividimos $\partial\tilde{\Omega}$ en dos partes, $\tilde{\Gamma}_R$ y $\tilde{\Gamma}_N$, que corresponden a los límites de Robin (Γ_R) y Neumann (Γ_N) del dominio bidimensional Ω , respectivamente. Por (2.3), tenemos

$$\Psi \times \mathbf{n} = (\mathbf{curl} \mathbf{Y} + \Phi) \times \mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial(rY_\theta)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R} \varphi(r) Y_\theta(r, z) \mathbf{e}_\theta = 0 \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_R,$$

donde para la última igualdad hemos usado la condición de contorno

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rY_\theta)}{\partial r} + Y_\theta = 0 \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_R,$$

que a su vez se obtiene probando el Problema 2.3.3 con $Z \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $\operatorname{supp}(Z) \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_N) = \emptyset$. Por otro lado,

$$\Psi \times \mathbf{n} = (\mathbf{curl} \mathbf{Y} + \Phi) \times \mathbf{e}_z = \frac{\partial Y_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_\theta = 0 \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_N,$$

donde ahora la última igualdad se obtiene probando el Problema 2.3.3 con $Z \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $\operatorname{supp}(Z) \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_R) = \emptyset$. Por lo tanto, al usar (2.39) y la regularidad de Φ ,

concluimos que $\Psi \in H_0(\mathbf{curl}, \tilde{\Omega}) \cap H(\operatorname{div}, \tilde{\Omega})$. Por lo tanto, $\Psi \in H^1(\tilde{\Omega})^3$ (cf. [8, Theorem 2.17], de nuevo) y

$$\|\Psi\|_{H^1(\tilde{\Omega})^3} \leq \|\mathbf{curl} \mathbf{Y}\|_{H(\mathbf{curl}, \tilde{\Omega})} + \|\Phi\|_{H^1(\tilde{\Omega})^3} \leq C \|g\|_{L_r^2(\Omega)},$$

donde hemos usado (2.38), (2.39) y (2.42) para la última desigualdad. Como consecuencia, $\mathbf{curl} \mathbf{Y} = \Psi - \Phi \in H^1(\tilde{\Omega})^3$ y

$$\|\mathbf{curl} \mathbf{Y}\|_{H^1(\tilde{\Omega})^3} \leq C \|g\|_{L_r^2(\Omega)}. \quad (2.43)$$

Finalmente, por [10, Proposition 3.17] tenemos que $\|\mathbf{Y}\|_{H^1(\tilde{\Omega})^3}^2 = 2\pi \|Y_\theta\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)}^2$ y $\|\mathbf{curl} \mathbf{Y}\|_{H^1(\tilde{\Omega})^3}^2 = 2\pi \|\partial_z Y_\theta\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)}^2 + 2\pi \left\| \frac{1}{r} \partial_r(r Y_\theta) \right\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)}^2$. Como consecuencia, de la definición la norma $\tilde{H}_r^2(\Omega)$, (2.42) y (2.43) conduce a

$$\|Y_\theta\|_{\tilde{H}_r^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \left(\|\mathbf{curl} \mathbf{Y}\|_{H^1(\tilde{\Omega})^3}^2 + \|\mathbf{Y}\|_{H^1(\tilde{\Omega})^3}^2 \right) \leq C \|g\|_{L_r^2(\Omega)}^2.$$

Por lo tanto, concluimos la prueba. $\square$

Teorema 2.3.6. Si μ es constante en Ω , entonces la solución del Problema 2.3.3 satisface $Y_\theta \in H_r^2(\Omega)$ y

$$\|Y_\theta\|_{H_r^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{L_r^2(\Omega)}.$$

Demostración. Sea J_1 la función de Bessel de primer orden del primer tipo. Definir

$$j_m(r) := \frac{\sqrt{2}}{|J_2(\beta_m R)|} J_1(\beta_m r), \quad m = 1, 2, \dots$$

donde $\beta_m := \alpha_m/R$, con α_m siendo el m -ésimo cero positivo de la ecuación

$$2J_1(x) + xJ_1'(x) = 0,$$

y

$$s_n(z) := \sqrt{2} \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Luego, por los resultados clásicos de completitud para las funciones de Bessel (ver [20, Sections 10.7-8] y [19]), el conjunto de funciones $e_{mn}(r, z) = j_m(r)s_n(z)$, $m = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$, es un sistema ortogonal completo de $L_r^2(\Omega)$. De este hecho y el Lema 2.3.5 el resto de la demostración es esencialmente como la de la Proposición 4.1 y el Teorema 4.1 de [21]. $\square$

Corolario 2.3.7. Si μ es constante en Ω , entonces la solución del Problema [2.3.1](#) satisface $A_\theta \in H_r^2(\Omega)$ y

$$\|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^m}.$$

Demostración. Se sigue de la primera ecuación del Problema [2.3.1](#) y el Teorema [2.3.6](#) aplicado al Problema [2.3.3](#) con

$$g := -i\omega\sigma A_\theta + \sum_{k=1}^m \sigma \frac{V_k}{r} \chi_{\Omega_k},$$

χ_{Ω_k} siendo la función característica de Ω_k , $k = 1, \dots, m$. A su momento, $\|g\|_{L_r^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^m}$, en virtud del teorema [2.3.4](#) y [\(2.33\)](#). $\square$

Capítulo 3

Discretización por Elementos Finitos

En esta capítulo presentamos una discretización del Problema [2.3.1](#) y demostramos las estimaciones de error. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones de Ω siendo h el tamaño de la malla (ver [?]).

3.1. Problema Discreto

Comentemos que no hay necesidad de suponer que las mallas son compatibles con la geometría del dominio del conductor (es decir, que cada elemento de $\mathcal{T}_h$ está contenido en Ω_0 o en Ω_A), aunque Por supuesto, este tipo de mallas facilitan la implementación del método. De ahora en adelante, la constante genérica C siempre será independiente del tamaño de la malla.

Sea

$$\mathcal{V}_h := \left\{ u_h \in \tilde{H}_r^1(\Omega) : u_h|_T \in \mathbb{P}_1 \ \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

siendo $\mathbb{P}_1$ las funciones lineales de valor complejo en las coordenadas r y z :

$$\mathbb{P}_1 := \{p(r, z) = c_0 + c_1 r + c_2 z : c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

La aproximación de elementos finitos del Problema [\(2.3.1\)](#) es definida como la solución $(A_\theta^h, \mathbf{V}^h)$ del siguiente problema:

Problema 3.1.1. Dado $\mathbf{I} := (I_1, \dots, I_m) \in \mathbb{C}^m$, encontrar $(A_\theta^h, \mathbf{V}^h) \in \mathcal{V}_h \times \mathbb{C}^m$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta^h)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(r \bar{Z}^h)}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta^h}{\partial z} \frac{\partial \bar{Z}^h}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} A_\theta^h \bar{Z}^h dz \\ + i\omega \int_{\Omega_0} \sigma A_\theta^h \bar{Z}^h r dr dz - \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \sigma V_k^h \bar{Z}^h dr dz = 0 \quad \forall Z^h \in \mathcal{V}_h, \\ \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \sigma \bar{W}_k^h A_\theta^h dr dz + \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} \frac{\sigma \bar{W}_k^h V_k^h}{r} dr dz = \frac{i}{\omega} \sum_{k=1}^m \bar{W}_k^h I_k \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathbb{C}^m. \end{aligned}$$

Es sencillo ver que el Problema (3.1.1) es equivalente al siguiente, con $\mathbf{V}^h := (V_1^h, \dots, V_m^h)$ dado por

$$V_k^h = \frac{1}{d_k} \left(I_k + i\omega \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta^h dr dz \right), \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

Problema 3.1.2. Dado $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^m$, encontrar $A_\theta^h \in \mathcal{V}_h$ tal que

$$a(A_\theta^h, Z^h) = \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z}^h dr dz \quad \forall Z^h \in \mathcal{V}_h.$$

Usaremos el Problema (3.1.2) para probar la buena postura y las estimaciones de error. Sin embargo, como se indica en la observación 1 para la implementación informática de este enfoque utilizaremos el Problema (3.1.1) para evitar matrices densas.

Teorema 3.1.1. El Problema (3.1.1) tiene una solución única $(A_\theta^h, \mathbf{V}^h)$. Además, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que si $(A_\theta, \mathbf{V})$ es la solución del Problema (2.3.1), entonces

$$\|A_\theta - A_\theta^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} + \sum_{k=1}^m |V_k - V_k^h| \leq C \inf_{Z^h \in \mathcal{V}_h} \|A_\theta - Z^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)}.$$

Demostración. Dado que los problemas (3.1.1) y (3.1.2) son equivalentes, usamos este último para la estimación de A_θ , que se sigue del Lema de Cea (ver, por ejemplo, [?]). La estimación de V_k , $k = 1, \dots, m$, se deriva de este último, (2.33) y (3.1). Luego, sea A_θ solución de (2.3.1) y A_θ^h solución del problema (3.1.1) entonces

$$\begin{aligned} a(A_\theta, Z) &= \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z} dr dz \quad \forall Z \in \tilde{H}_r^1(\Omega) \\ a(A_\theta^h, Z^h) &= \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z}^h dr dz \quad \forall Z^h \in \mathcal{V}_h. \end{aligned}$$

Como $Z^h \in \mathcal{V}_h \in \tilde{H}_r^1(\Omega)$ se puede escribir Z^h en la primera ecuación así :

$$\begin{aligned} a(A_\theta, Z^h) &= \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z}^h dr dz \\ a(A_\theta^h, Z^h) &= \sum_{k=1}^m \frac{I_k}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma \bar{Z}^h dr dz, \end{aligned}$$

restando las dos ecuaciones se tiene :

$$a(A_\theta - A_\theta^h, Z^h) = 0.$$

Por otro lado por el Lema 2.3.3

$$\begin{aligned} \|A_\theta - A_\theta^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)}^2 &\leq |\operatorname{Re} a(A_\theta - A_\theta^h, A_\theta - A_\theta^h)| \\ &\leq |a(A_\theta - A_\theta^h, A_\theta - A_\theta^h)| \\ &= |a(A_\theta - A_\theta^h, A_\theta - A_\theta^h + Z^h - Z^h)| \\ &= |a(A_\theta - A_\theta^h, A_\theta - Z^h) - a(A_\theta - A_\theta^h, Z^h - A_\theta^h)| \\ &= |a(A_\theta - A_\theta^h, A_\theta - Z^h)| \\ &\leq \|A_\theta - A_\theta^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \|A_\theta - Z^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

donde hemos usado que $(Z^h - A_\theta^h) \in \mathcal{V}_h$. De aquí se tiene que

$$\|A_\theta - A_\theta^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq \|A_\theta - Z^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)},$$

tomando ínfimo se tiene

$$\|A_\theta - A_\theta^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq \inf_{Z^h \in \mathcal{V}_h} \|A_\theta - Z^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{1}{d_k} \left(I_k + i\omega \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta r dr dz \right) \quad y \\ V_k^h &= \frac{1}{d_k} \left(I_k + i\omega \int_{\Omega_k} \sigma A_\theta^h r dr dz \right), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
|V_k - V_k^h| &= \left| \frac{1}{d_k} i\omega \int_{\Omega_k} \sigma(A_\theta - A_\theta^h) r \, dr \, dz \right| \\
&\leq C \left(\int_{\Omega_k} \sigma |A_\theta - A_\theta^h|^2 r \right)^{\frac{1}{2}} dr \, dz \\
&\leq C \|A_\theta - A_\theta^h\|_{L_r^2(\Omega)} \\
&\leq C \|A_\theta - A_\theta^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \\
&\leq \inf_{Z^h \in \mathcal{V}_h} \|A_\theta - Z^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

□

3.2. Análisis del error

De acuerdo con el teorema anterior, solo queda demostrar que A_θ puede aproximarse convenientemente mediante una función en $\mathcal{V}_h$. Con este propósito, en el caso más general, recurrimos a un operador Clément estable para funciones en $\tilde{H}_r^1(\Omega)$ (que, recordemos, desaparecen en Γ_D). Dichos operadores han sido estudiados para espacios de Sobolev ponderados en [11] y [24].

En particular, consideramos el operador Clément $\tilde{\Pi}_h : \tilde{H}_r^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_h$ definido en [11] Eq. (36)]. La demostración del siguiente lema se encuentra en [11, Theorem 2].

Lema 3.2.1. Si $1 \leq l \leq 2$, entonces existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que para todo $u \in H_r^l(\Omega) \cap \tilde{H}_r^1(\Omega)$,

$$\|u - \tilde{\Pi}_h u\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq Ch^{l-1} \|u\|_{H_r^l(\Omega) \cap \tilde{H}_r^1(\Omega)}.$$

Por otro lado, cuando la solución A_θ es lo suficientemente suave, podemos usar el operador de interpolación de Lagrange Π_h . De hecho, según el Lema 1.2.4 dicho interpolante está bien definido para funciones en $\tilde{H}_r^2(\Omega)$. Además, para funciones en $H_r^2(\Omega)$, se tiene la siguiente estimación del error, cuya prueba se puede encontrar en [24] Lemma 6.3].

Lema 3.2.2. Existen constantes $C > 0$, independientes de h , tales que por todo $u \in H_r^2(\Omega)$,

$$\|\Pi_h u\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_r^2(\Omega)} \quad \text{Y} \quad \|u - \Pi_h u\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{H_r^2(\Omega)}.$$

Ahora estamos en condiciones de establecer el principal resultado de este trabajo.

Teorema 3.2.3. Sea $(A_\theta, \mathbf{V})$ la solución del Problema (2.3.1) y $(A_\theta^h, \mathbf{V}^h)$ la solución del Problema (3.1.1). Existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que si $A_\theta \in H_r^2(\Omega)$, entonces

$$\|A_\theta - A_\theta^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} + \sum_{k=1}^m |V_k - V_k^h| \leq Ch \|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)}.$$

Demostración. Sea $(A_\theta, \mathbf{V})$ la solución del Problema (2.3.1) y $(A_\theta^h, \mathbf{V}^h)$ la solución del Problema (3.1.1). Entonces por Teorema (3.1.1) existe una constante $C > 0$, independiente de h tal que

$$\|A_\theta - A_\theta^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} + \sum_{k=1}^m |V_k - V_k^h| \leq C \inf_{Z^h \in \mathcal{V}_h} \|A_\theta - Z^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)}.$$

Luego, por el Lema (3.2.2) tenemos que para todo $u \in H_r^2(\Omega)$

$$\|\Pi_h u\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_r^2(\Omega)} \quad \text{Y} \quad \|u - \Pi_h u\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{H_r^2(\Omega)}.$$

Además por hipótesis $A_\theta \in H_r^2(\Omega)$ y para todo $u \in H_r^2(\Omega)$ se sigue que

$$\begin{aligned} \|A_\theta - A_\theta^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} + \sum_{k=1}^m |V_k - V_k^h| &\leq C \inf_{Z^h \in \mathcal{V}_h} \|A_\theta - Z^h\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \\ &\leq \|A_\theta - \Pi_h A_\theta\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \\ &\leq Ch \|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

La solución $(A_\theta^h, \mathbf{V}^h)$ del Problema (3.1.1) nos permite calcular las cantidades electromagnéticas tridimensionales. De hecho, recordando (2.20) y (2.29), definimos la inducción magnética calculada por

$$\mathbf{B}^h := -\frac{\partial A_\theta^h}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta^h)}{\partial r} \mathbf{e}_z.$$

Análogamente, a partir de (2.18) y (2.30), la densidad de corriente calculada viene dada por

$$\mathbf{J}^h := J_\theta^h \mathbf{e}_\theta,$$

con J_θ^h desapareciendo en el dieléctrico y definido en los conductores como sigue:

$$J_\theta^h|_{\Omega_k} := \sigma \left(\frac{V_k^h}{r} - i\omega A_\theta^h \right), \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

donde $V_0^h := V_0 = 0$ (cf. (2.34)). Observe que, en particular, la densidad de corriente en la pieza de trabajo que se va a calentar, que suele ser la cantidad de interés principal, viene dada por $\mathbf{J}^h = -i\sigma\omega A_\theta^h \mathbf{e}_\theta$.

3.3. Estimaciones de Error de las variables físicas.

En lo que sigue obtenemos estimaciones de error para estas cantidades tridimensionales.

Corolario 3.3.1. Bajo las mismas hipótesis que en el Teorema 3.2.3 tenemos

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{B}^h\|_{L^2(\tilde{\Omega})^3} \leq Ch \|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)}.$$

Demostración. Recordando (2.20) y (2.29), tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B} - \mathbf{B}^h\|_{L^2(\tilde{\Omega})^3}^2 &= \|\partial_z(A_\theta - A_\theta^h)\|_{L_r^2(\Omega)}^2 + \|\partial_r(r(A_\theta - A_\theta^h))\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|\partial_z(A_\theta - A_\theta^h)\|_{L_r^2(\Omega)}^2 + 2\|\partial_r(A_\theta - A_\theta^h)\|_{L_r^2(\Omega)}^2 + 2\|A_\theta - A_\theta^h\|_{L_{1/r}^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C\|A_\theta - A_\theta^h\|_{H_r^1(\Omega)}^2 \\ &\leq Ch\|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema 1.2.3 para la primera desigualdad y el Teorema 3.2.3 para la última. $\square$

Corolario 3.3.2. Bajo las mismas hipótesis que en el Teorema 3.2.3, si para todo $g \in L_r^2(\Omega)$ la solución Y_θ del Problema 2.3.3 satisface $\|Y_\theta\|_{H_r^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{L_r^2(\Omega)}$, entonces

$$\|\mathbf{J} - \mathbf{J}^h\|_{L^2(\tilde{\Omega})^3} \leq Ch^2 \|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)}.$$

Demostración. Como $\mathbf{J}$ y $\mathbf{J}^h$ desaparecen en el dieléctrico, tenemos

$$\|\mathbf{J} - \mathbf{J}^h\|_{L^2(\tilde{\Omega})^3}^2 = 2\pi \sum_{k=0}^m \|J_\theta - J_\theta^h\|_{L_r^2(\Omega_k)}^2.$$

Ahora, a partir de (2.30) y la definición de J_θ^h , tenemos

$$\|J_\theta - J_\theta^h\|_{L_r^2(\Omega_k)} \leq C \left(|V_k - V_k^h| + \|A_\theta - A_\theta^h\|_{L_r^2(\Omega_k)} \right), \quad k = 0, 1, \dots, m$$

(recordar $V_0^h = V_0 = 0$).

En lo que sigue, usaremos un argumento de dualidad para estimar $\|A_\theta - A_\theta^h\|_{L_r^2(\Omega)}$. Con este fin, por cada $f \in L_r^2(\Omega)$, sea $Y_\theta \in \tilde{H}_r^1(\Omega)$ la solución del problema

$$a(Z, Y_\theta) = \int_\Omega Z \bar{f} r \, dr \, dz \quad \forall Z \in \tilde{H}_r^1(\Omega).$$

Debido al Lema 2.3.3 y al Lema de Lax-Milgram, este problema tiene solución única, que satisface

$$\|Y_\theta\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_r^2(\Omega)}.$$

Además, procediendo como se hizo para probar la equivalencia de Problemas 2.3.1 y 2.3.2, tenemos que Y_θ también resuelve Problema 2.3.3 con

$$g := f - i\omega\sigma Y_\theta + \sum_{k=1}^m \sigma \frac{W_k}{r} \chi_{\Omega_k},$$

donde

$$W_k := \frac{i\omega}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma Y_\theta \, dr \, dz, \quad k = 1, \dots, m.$$

Por tanto, según la hipótesis de este corolario, la expresión de g y la estimación de Y_θ anterior, se cumple

$$\|Y_\theta\|_{\tilde{H}_r^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{L_r^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_r^2(\Omega)}. \quad (3.2)$$

Ahora procedemos con el argumento de la dualidad:

$$\begin{aligned} \|A_\theta - A_\theta^h\|_{L_r^2(\Omega)} &= \sup_{f \in L_r^2(\Omega)} \frac{\left| \int_\Omega (A_\theta - A_\theta^h) \bar{f} r \, dr \, dz \right|}{\|f\|_{L_r^2(\Omega)}} \\ &= \sup_{f \in L_r^2(\Omega)} \frac{|a(A_\theta - A_\theta^h, Y_\theta)|}{\|f\|_{L_r^2(\Omega)}} \\ &= \sup_{f \in L_r^2(\Omega)} \frac{|a(A_\theta - A_\theta^h, Y_\theta - \Pi_h Y_\theta)|}{\|f\|_{L_r^2(\Omega)}} \\ &\leq \sup_{f \in L_r^2(\Omega)} \frac{Ch \|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)} h \|Y_\theta\|_{H_r^2(\Omega)}}{\|f\|_{L_r^2(\Omega)}} \\ &\leq Ch^2 \|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la ortogonalidad de Galerkin, el Teorema 3.2.3, el Lema 3.2.2 y el estimador (3.2).

Por otro lado, para estimar $|V_k - V_k^h|$, $k = 1, \dots, m$, usamos (2.33), (3.1) y la estimación anterior, para escribir

$$|V_k - V_k^h| = \left| \frac{i\omega}{d_k} \int_{\Omega_k} \sigma(A_\theta - A_\theta^h) dr dz \right| \leq C \|A_\theta - A_\theta^h\|_{L_r^2(\Omega_k)} \leq Ch^2 \|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)}.$$

Por lo tanto, concluimos la prueba $\square$

Observación 3. Como se muestra en la prueba anterior, bajo los supuestos de este corolario, las constantes calculadas V_k^h también convergen cuadráticamente.

Corolario 3.3.3. Si μ es constante en Ω , entonces

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{B}^h\|_{L^2(\tilde{\Omega})^3} \leq Ch \|\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^m} \quad \text{Y} \quad \|\mathbf{J}^h - \mathbf{J}\|_{L^2(\tilde{\Omega})^3} \leq Ch^2 \|\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^m}.$$

Demostración. Por el corolario 3.3.1 tenemos,

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{B}^h\|_{L^2(\tilde{\Omega})^3} \leq Ch \|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)}.$$

Luego, aplicando el corolario 2.3.7 a la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B} - \mathbf{B}^h\|_{L^2(\tilde{\Omega})^3} &\leq Ch \|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)} \\ &\leq Ch \|\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^m}. \end{aligned}$$

Por otro lado, por corolario 3.3.2

$$\|\mathbf{J} - \mathbf{J}^h\|_{L^2(\tilde{\Omega})^3} \leq Ch^2 \|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)}.$$

Nuevamente aplicando el corolario 2.3.7 tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J} - \mathbf{J}^h\|_{L^2(\tilde{\Omega})^3} &\leq Ch^2 \|A_\theta\|_{H_r^2(\Omega)} \\ &\leq Ch^2 \|\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^m}. \end{aligned}$$

$\square$

Bibliografía

- [1] ALBERTY, J., CARSTENSEN, C., FUNKEN, S., & KLOSE, R. (2004) Matlab Implementation of the Finite Element Methods in Elasticity, *Computing* **69**, 239–263.
- [2] BRENNER, S. & SCOTT, L.(2007)*The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, New York.
- [3] CIARLET, P.(1978) *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford.
- [4] ERIKSSON, K., HANSBO, P., & AND C. JOHNSON.(1996) *Computational Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [5] GATICA, G.(2014)*Introducción al Analisis Funcional. Teoria y Aplicaciones*. Editorial Reverte, Barcelona.
- [6] LARSON, M. & BENGZON, F.(2013)*The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*.Springer, Heidelberg.
- [7] MARSDEN, J. & HUGHES, T.(1994)*Mathematical foundations of elasticity*, Dover Publications, Inc., New York.
- [8] AMROUCHE, C., BERNARDI, C., DAUGE, M. & GIRAULT, V. (1998) Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains, *Math. Methods Appl. Sci.* **21**, 823–864.
- [9] ASSOUS, F., CIARLET JR., P. & LABRUNIE, S. (2002) Theoretical tools to solve the axisymmetric Maxwell equations, *Math. Methods Appl. Sci.* **25**, 49–78.

- [10] ASSOUS, F., CIARLET JR, P., LABRUNIE, S. & SEGRÉ, J. (2003) Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in axisymmetric singular domains: the singular complement method, *J. Comput. Phys.* **191**, 147–176.
- [11] BELHACHMI, Z., BERNARDI, C. & DEPARIS, S. (2002) Weighted Clément operator and application to the finite element discretization of the axisymmetric Stokes problem, *Numer. Math.* **105**, 217–247.
- [12] BERMÚDEZ, A., GÓMEZ, D., MUÑIZ, M.C. & SALGADO, P. (2007a) Transient numerical simulation of a thermoelectrical problem in cylindrical induction heating furnaces, *Adv. Comput. Math.* **26**, 1–24.
- [13] BERMÚDEZ, A., GÓMEZ, D., MUÑIZ, M.C. & SALGADO, P. (2007b) A FEM/BEM for axisymmetric electromagnetic and thermal modelling of induction furnaces, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **71**, 856–878.
- [14] BERMÚDEZ, A., GÓMEZ, D., MUÑIZ, M.C., SALGADO, P. & VÁZQUEZ, R. (2008) Numerical simulation of a thermo-electromagneto-hydrodynamic problem in an induction heating furnace (submitted).
- [15] BERMÚDEZ, A., REALES, C., RODRÍGUEZ, R. & SALGADO, P. (2010) Numerical analysis of a finite-element method for the axisymmetric eddy current model of an induction furnace *IMA J. Numer. Anal.* **30**, 654–676.
- [16] 2002Ci CIARLET, P. (2002) *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. New York: SIAM.
- [17] CHABOUDEZ, C. & CLAIN, S. (1997) Numerical modeling in induction heating for axisymmetric geometries, *IEEE Trans. Magn.* **33**, 739–745.
- [18] ERN, A. & GUERMOND, J. (2004) *Theory and Practice of Finite Elements*. New York: Springer.
- [19] HOCHSTADT, H. (1967) The mean convergence of Fourier-Bessel series, *SIAM Rev.* **9**, 211–218.

- [20] GONZÁLEZ-VELASCO, E.A. (1996) *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*. San Diego, CA: Academic Press.
- [21] GOPALAKRISHNAN, J. & PASCIAK, J. (2006) The convergence of V-cycle multigrid algorithms for axisymmetric Laplace and Maxwell equations, *Math. Comp.* **75**, 1697–1719.
- [22] KUFNER, A. (1983) *Weighted Sobolev Spaces*. New York: Wiley.
- [23] LACOSTE, P. (2000) Solution of Maxwell equation in axisymmetric geometry by Fourier series decomposition and by use of $H(\text{rot})$ conforming finite element, *Numer. Math.* **84**, 577–609.
- [24] MERCIER, B. & RAUGEL, G. (1982) Resolution d'un problème aux limites dans un ouvert axisymétrique par éléments finis en r , z et séries de Fourier en θ , *RAIRO, Anal. Numér.* **16**, 405–461.