UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

TESIS DE MAESTRÍA

Estudio de un sistema de Klein-Gordon-Schrödinger fraccionario en tiempo y espacio en el marco de los espacios L^p débiles

Autor:
Nafer E. GUERRA RAMOS

Director:
Dr. Carlos A. BANQUET BRANGO

Codirector:
Dr. Élder J. VILLAMIZAR ROA

Tesis enviada al Comité Curricular como requisito para optar al grado de Magíster en Matemáticas

Grupo de Investigación Matemáticas Unicórdoba
Departamento de Matemáticas y Estadística

31 de agosto de 2022

Derechos de copia ©

Por:

Nafer Enrique GUERRA RAMOS

31 de agosto de 2022

Estudio de un sistema de Klein-Gordon-Schrödinger fraccionario en tiempo y espacio en el marco de los espacios L^p débiles

Tesis de Maestría aprobada por:

Dr. Carlos Alberto Banquet Brango

Director de Tesis

Dr. Edwin Gonzalo Murcia Rodríguez

Jurado de Tesis

Dr. Edgardo Enrique Pérez Reyes

Jurado de Tesis

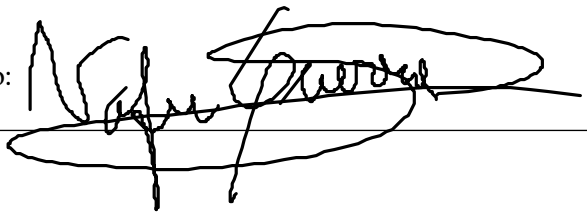
Mg. Ricardo Miguel Guzmán Navarro

Jefe de departamento de Matemáticas y Estadística

Declaración de Autoría

Yo, **Nafer Enrique GUERRA RAMOS**, declaro que esta tesis titulada, «Estudio de un sistema de Klein-Gordon-Schrödinger fraccionario en tiempo y espacio en el marco de los espacios L^p débiles» y el trabajo presentado en ella son de nuestra autoría. Nosotros confirmamos que:

- Este trabajo se realizó total o principalmente mientras estábamos en la candidatura para un título de Maestría en Matemáticas en la Universidad de Córdoba. Si alguna parte de esta tesis ha sido presentada previamente para un título o cualquier otra titulación en esta Universidad o cualquier otra institución, esto ha sido claramente establecido. Cuando hemos consultado el trabajo publicado de otros, esto siempre se atribuye claramente. Donde hemos citado el trabajo de otros, la fuente siempre se ha dado. Con la excepción de tales citas, esta tesis es completamente nuestro propio trabajo. Reconocemos todas las principales fuentes de ayuda. Cuando la tesis se basa en el trabajo hecho por nosotros junto con otros, hemos dejado en claro exactamente la ayuda ofrecida y lo que nosotros hemos contribuido.

Firmado: 

Fecha: 31-08-2022

«No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.»

Nikolai Ivanovich Lobachevski (Matemático ruso, profesor de la Universidad de Kazán)

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Resumen

Facultad de Ciencias Básicas

Departamento de Matemáticas y Estadística

Estudio de un sistema de Klein-Gordon-Schrödinger fraccionario en tiempo y espacio en el marco de los espacios L^p débiles

Por **Nafer Enrique GUERRA RAMOS**

La descripción de muchos fenómenos de la naturaleza se da gracias a la teoría de ecuaciones diferenciales y el cálculo. Este último ha evolucionado en las últimas décadas en lo que se conoce como el cálculo fraccionario, consolidándose como una herramienta poderosa que ha permitido suplir en gran medida las limitaciones del cálculo entero.

En este trabajo, usamos herramientas del cálculo con derivadas fraccionarias en tiempo y espacio, para estudiar un problema de valor inicial para un sistema no lineal de Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, con $n \geq 1$, considerando no linealidades polinómicas generales que incluyen, en particular, el modelo clásico de Yukawa que describe la interacción entre nucleones y mesones escalares.

Analizamos estimativas de decaimiento temporal para el sistema lineal asociado y demostramos la existencia de soluciones *mild* locales y globales del sistema fraccionario KGS con datos iniciales en el marco de los espacios L^p débiles. Por último estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones globales.

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Abstract

Facultad de Ciencias Básicas

Departamento de Matemáticas y Estadística

Magíster en Matemáticas

Estudio de un sistema de Klein-Gordon-Schrödinger fraccionario en tiempo y espacio en el marco de los espacios L^p débiles

By **Nafer Enrique GUERRA RAMOS**

The description of many natural phenomena is given thanks to the theory of differential equations and calculus. The latter has evolved in recent decades into what is known as fractional calculus, consolidating itself as a powerful tool that has largely made up for the limitations of integer calculus.

In this work, we use tools from calculus with fractional derivatives in time and space to study an initial value problem for a nonlinear Klein-Gordon-Schrödinger system (KGS) in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, with $n \geq 1$, considering general polynomial nonlinearities including, in particular, the classical Yukawa model describing the interaction between nucleons and scalar mesons.

We analyse time decay estimates for the associated linear system and demonstrate the existence of local and global *mild* solutions of the fractional KGS system with initial data in the framework of weak L^p spaces. Finally we study the asymptotic behavior of the global *mild* solutions.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Dios todo poderoso por darme fortaleza y sabiduría para la realización de este trabajo.

A mi esposa e hijos por su comprensión y sobre todo por el tiempo que me brindaron, porque el tiempo en familia es especial y único.

A todos los docentes que contribuyeron a mi formación académica y en especial a los doctores Carlos Alberto Banquet Brango del departamento de Matemáticas y estadística de la Universidad de Córdoba, mi director de trabajo de grado, y Élder Jesús Villamizar Roa, mi codirector, por brindarme orientación y paciencia en el desarrollo de este proyecto.

Por último pero no menos importante, quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que no aparecen explícitamente en las próximas líneas y que han colaborado para que este trabajo se hiciera realidad.

Índice general

Declaración de Autoría V

Resumen IX

Agradecimientos XIII

Introducción 1

1. Preliminares 5

1.1. Espacios L^p 5

1.2. Espacios L^p débiles 6

1.3. Funciones de Mittag-Leffler 13

2. Cálculo Fraccionario 15

2.1. Algunos antecedentes 15

2.2. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville 17

3. Sistema Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) de orden fraccionario 21

3.1. Formulación integral del sistema KGS 23

3.2. Estimativas lineales de decaimiento temporal 25

3.3. Estimativas de las no linealidades del sistema 30

3.4. Solución local y global del sistema 37

3.5. Comportamiento asintótico 43

4. Conclusiones **47**

4.1. Conclusiones 47

4.2. Trabajos futuros 47

Bibliografía **49**

Lista de Símbolos

Símbolo	Nombre
${}^{c}D_t^{\alpha}$	Derivada fraccionaria de Caputo
$W^{k,p}$	Espacios de Sobolev
I_t^{α}	Integral fraccionaria de Riemann-Liouville
D_t	Derivada parcial
$\hat{f}, \mathcal{F}(f)$	Transformada de Fourier de f
$f^{\vee}, \mathcal{F}^{-1}(f)$	Transformada de Fourier inversa de f
$E_{\alpha}, E_{\alpha,\beta}$	Funciones de Mittag-Leffler
f^*	Función de reordenamiento decreciente
d_f	Función de distribución
$L^{p,\infty}$	Espacio L^p débil
$L^{p,q}$	Espacios de Lorentz

Dedicatoria: *A mi Esposa María Angélica y a mis hijos:*
Mariana, Emanuel y Valentina.

Introducción

En este trabajo nos enfocamos en el análisis de existencia de soluciones de un sistema de Klein-Gordon-Schrödinger de orden fraccionario, en el contexto de los espacios L^p débiles. En particular, queremos analizar ciertas estimativas en espacios L^p débiles para un sistema lineal de Klein-Gordon-Schrödinger de orden fraccionario en tiempo y espacio, lo cual será escencial para analizar el siguiente problema general (no lineal) dado por

$$\begin{cases} i\,{}^cD_t^\alpha u(x,t) - (-\Delta)^{\beta/2}\,u(x,t) = -u\,|u|^{\sigma-1}\,v\,|v|^{\lambda-1}\,, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ {}^cD_t^\delta v(x,t) + (-\Delta)^{\nu/2}\,v(x,t) + v(x,t) = |u|^\rho\,, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ v_t(x,0) = v_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde $\lambda, \sigma \geq 1$, $\beta, \nu \geq n$, $\rho \geq 2$, $0 < \alpha < 1$ y $1 < \delta < 2$. Este sistema generaliza el modelo clásico ($\alpha = \sigma = \lambda = 1$, $\rho = \delta = \beta = \nu = 2$) de interacción entre nucleones y mesones escalares neutros dado por Yukawa (ver Fukuda y Masayoshi, 1978 y Yukawa, 1955). Aquí, los nucleones se describen mediante el campo escalar complejo $u(x,t)$ y los mesones mediante el campo escalar real $v(x,t)$, definido en $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. La interacción de Yukawa se puede utilizar para describir la fuerza nuclear fuerte entre nucleones, mediada por piones. Además, se utiliza en el modelo estándar para describir el acoplamiento entre el campo de Higgs y los campos de electrones y quarks sin masa (ver Yukawa, 1955).

El sistema clásico Yukawa-KGS ha sido analizado por varios autores y desde varios puntos de vista (véase, por ejemplo, Bachelot, 1984 - Shi y Li, 2010). Hasta donde sabemos, los primeros estudios del sistema KGS fueron realizados por Fukuda y Masayoshi, 1978-Fukuda y Masayoshi, 1979 en los que se demostró la existencia

de soluciones fuertes en dominios acotados en $\mathbb{R}^3$ (con frontera suave) mediante el método de Galerkin. Más tarde, todavía en el contexto del espacio L^2, la existencia global, unicidad, y algunas leyes de conservación para el sistema Yukawa-KGS fueron establecidas por Bachelot, 1984, Baillon y John, 1978, y Hayashi y Wahl, 1987. Posteriormente, en Pecher, 2002, se obtuvieron resultados de buena postura local con datos iniciales $(u_0, v_0, v_1) \in L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \times H^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Estas soluciones existen y son únicas en espacios tipo Bourgain que están contenidos en la clase $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3) \times C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3) \times C([0,T]; H^{-1}(\mathbb{R}^3)$. La buena postura global en $\mathbb{R}^3$ para los datos iniciales $(u_0, v_0, v_1) \in L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \times H^{-1}(\mathbb{R}^3)$ fue obtenida por Colliander, Justin y Nikolaos, 2008, utilizando la conservación de masa L^2 y estimativas de Strichartz (véase también Tzirakis, 2005, para la buena postura global en $H^s(\mathbb{R}^3) \times H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$ con $s > \frac{7}{10}$).

En los trabajos de Pecher, 2010, y Pecher, 2012, se obtuvo buena postura local y global para los datos $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n), v_0 \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ y $v_1 \in H^{\sigma-1}(\mathbb{R}^n)$ para $n = 2, 3$ y adecuados s, σ, incluyendo valores negativos. Empleando estimativas de Strichartz para la buena postura local y luego utilizando una estimación *a priori* con energía finita y el resultado de buena postura local, se estableció la existencia de soluciones globales en espacios de energía finita para un sistema tipo KGS. En Shi y Li, 2010. Bisognin y col., 2008, y Cavalcanti y Valeria, 2000, también consideraron un sistema tipo KGS en dominios acotados, y obtuvieron (a través del método de Galerkin) resultados sobre tasas de decaimiento polinomial y exponencial de soluciones globales, respectivamente.

En Veeresha y col., 2020, se estudia el sistema en cuestión, en el caso particular de $\sigma = \lambda = 1$ y $\rho = 2$ fraccionario en tiempo, pero no fraccionario en espacio, desde el punto de vista numérico, utilizando el método de transformada $q-$homotopica ($q-$HATM), el cual es una combinación entre el método $q-$HAM con la transformada de Laplace.

Huang y col., 2016, estudiaron dicho sistema con el acoplamiento de Yukawa, con

derivada fraccionaria en espacio, pero sólo en la ecuación de Schrödinger y en dimensión $n = 1$, utilizando el método de espacios de Bourgain para obtener resultados de buena colocación local y global para el sistema, y en $iu_t + (-\Delta)^\alpha u = u\phi$ tomando $3/4 < \alpha \leq 1$. Vale la pena aclarar que en Huang y col., 2016, no se estudió el problema fraccionario en tiempo.

Banquet, CF y J., 2015, demostraron la existencia de soluciones locales y globales del sistema en espacios L^p débiles, para el sistema clásico Klein-Gordon-Schrödinger.

En el presente trabajo para el sistema en cuestión, se demuestra la unicidad y existencia de soluciones tanto local como global; además mostramos que la aplicación dato-solución del sistema es Lipschitz continua y por último, estudiamos el comportamiento asintótico de la solución. El contenido de esta tesis consta de 4 capítulos. En el primer capítulo, se presentan los preliminares, en donde se muestra la teoria básica para los fines de este trabajo, tales como la de los espacios L^p y los espacios L^p débiles, así como también de las funciones de Mittag-Leffler. En el Capítulo 2, se muestra la teoría básica del cálculo fraccionario, donde se define la deriva e integral fraccionaria según Riemann-Louville y Caputo. En el Capítulo 3, se analiza el sistema KGS fraccionario, en donde se estudian las soluciones locales y globales, así como el comportamiento asintótico de la solución. Finalmente, en el Capítulo 4, se presentan las conclusiones de la presente tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo veremos algunas definiciones, lemas y teoremas que utilizaremos en el Capítulo 3, donde analizamos un sistema de Klein-Gordon-Schrödinger fraccionario en tiempo y espacio en el marco de los espacios L^p débiles.

1.1. Espacios L^p

El espacios de funciones cuyo módulo a una potencia p es integrable, se denominan espacios de Lebesgue y se denotan por L^p.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Young). *Sean $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$.*

Demostración. Véase Amann y Joachim, 2009, pág. 164. □

Teorema 1.2 (Teorema de interpolación de Riesz-Thorin). *Sean (X, μ) y (Y, ν) dos espacios de medida. Sea T un operador lineal definido en el conjunto de todas las funciones simples sobre X que toman valores en el conjunto de funciones medibles en Y. Además, sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, y suponga que*

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}} \quad y \quad \|T(f)\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}},$$

para todas las funciones simples f en X. Entonces para todo $0 < \theta < 1$ tenemos

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^p}$$

para todas las funciones simples en X, donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad y \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Demostración. Véase Grafakos, 2014, pág. 34. □

Lema 1.1. *Suponga que $1-x$, $1-y$ son números positivos. Entonces*

$$\int_0^t (t-s)^{-x} s^{-y}\, ds = t^{1-x-y} B(1-x, 1-y),$$

donde $B(x,y) = \int_0^1 (1-s)^{x-1} s^{y-1}\, ds$ es la función Beta.

Demostración. Véase Banquet, CF y J., 2015 □

Definición 1.1. *Sea (X,d) un espacio métrico. Una función $T : X \longrightarrow X$ es llamada una contracción sobre X si existe un número real positivo $\alpha < 1$ tal que para todo $x, y \in X$*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x,y).$$

Teorema 1.3 (Teorema de punto fijo de Banach)**.** *Sea (X,d) un espacio métrico, $X \neq \varnothing$. Suponga que X es completo y sea $T : X \longrightarrow X$ una contracción sobre X. Entonces T tiene un único punto fijo.*

Demostración. Véase Kreyszig, 1978, pág. 300. □

1.2. Espacios L^p débiles

Los espacios L^p débiles, también conocidos como espacios de Marcinkiewicz, son una clase de espacios de Lorentz $L^{p,q}$, los cuales, se definen a partir de la función de distribución, que explica como se comporta una función $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) a medida que recorremos el rango de sus valores, es decir, que esta distribución mide el tamaño de los conjuntos $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$ de una función f a partir de una cierta altura, determinada por el parámetro real $\alpha \geq 0$. Veamos la definición formal de dicha función de distribución y algunas de sus propiedades.

Definición 1.2. *Si f es una función medible sobre un espacio de medida (X, μ), la función de distribución $d_f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ se define como*

$$d_f(\alpha) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\right).$$

Proposición 1.1. *Sean f y g funciones medibles sobre un espacio de medida (X, μ). Entonces para todo $\alpha, \beta > 0$ tenemos que*

1. $|g| \leq |f|$ *μ- c.t.p implica que $d_g \leq d_f$,*
2. $d_{cf}(\alpha) \leq d_f(\alpha/|c|)$, *para todo $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;*
3. $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$;
4. $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.

Demostración. Véase Grafakos, 2014, pág. 4. □

Ahora, a partir de la función de distribución, veamos una primera definición de los espacios L^p débiles y algunas de sus propiedadades.

Definición 1.3. *Para $1 \leq p < \infty$, se define el espacio $L^p(X, \mu)$ débil como el conjunto de todas las funciones f, μ-medibles tales que*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \text{ínf}\left\{C > 0 : d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p} \text{ para todo } \alpha > 0\right\} \tag{1.1}$$

$$= \sup\left\{\gamma d_f^{1/p}(\gamma) : \gamma > 0\right\} \tag{1.2}$$

es finito. El espacio $L^\infty(X, \mu)$ débil es por definición $L^\infty(X, \mu)$.

Veamos que efectivamente se tiene la igualdad entre (1.1) y (1.2). Sean

$$\begin{aligned} a &= \sup\left\{\gamma \mathrm{d}_f^{1/p}\}(\gamma) : \gamma > 0\right\} \qquad \text{y} \\ b &= \text{ínf}\left\{C > 0 : \mathrm{d}_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \text{ para todo } \alpha > 0\right\}. \end{aligned}$$

Veamos que $a = b$. En efecto, sea $\gamma > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\gamma \mathrm{d}_f^{1/p}(\gamma) \leq a &\Longrightarrow \mathrm{d}_f^{1/p}(\gamma) \leq a/\gamma \\ &\Longrightarrow \mathrm{d}_f(\gamma) \leq a^p/\gamma^p.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a \in \left\{C > 0 : \mathrm{d}_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \text{ para todo } \alpha > 0\right\},$$

así, $a \geq b$.

Por otro lado, sea

$$D \in \left\{C > 0 : \mathrm{d}_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \text{ para todo } \alpha > 0\right\},$$

es decir, $D > 0$ y $\mathrm{d}_f(\alpha) \leq D^p/\alpha^p$, con $\alpha > 0$. Entonces $\alpha^p \mathrm{d}_f(\alpha) \leq D^p$; en consecuencia, $\alpha \mathrm{d}_f^{1/p}(\alpha) \leq D$. Por lo tanto, D es cota superior del conjunto $\{\gamma \mathrm{d}_f^{1/p}(\gamma) : \gamma > 0\}$; así,

$$a = \sup\left\{\gamma \mathrm{d}_f^{1/p}(\gamma) : \gamma > 0\right\} \leq D.$$

Dado que D se escogió de manera arbitraria en el conjunto

$$\left\{C > 0 : \mathrm{d}_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \text{ para todo } \alpha > 0\right\},$$

hemos demostrado que para todo

$$D \in \left\{C > 0 : \mathrm{d}_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \text{ para todo } \alpha > 0\right\},$$

se tiene $a \leq D$, esto es, a es cota inferior de

$$\left\{C > 0 : \mathrm{d}_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \text{ para todo } \alpha > 0\right\},$$

lo que prueba que $a \leq b$. Se concluye que $a = b$.

Proposición 1.2. *Sean f y g funciones medibles sobre un espacio de medida (X, μ) y $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces*

1. $\|kf\|_{L^{p,\infty}} = |k|\|f\|_{L^{p,\infty}}$;

2. $\|f+g\|_{L^{p,\infty}} \leq C_p\left(\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}\right)$, *donde* $C_p = \text{máx}\{2, 2^{1/p}\}$;

3. *Si* $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0$ *entonces* $f = 0$ μ*-c.t.p.*

Demostración. Véase Grafakos, 2014, pág. 5. □

Proposición 1.3. *Si* $1 \leq p < \infty$ *y* $f \in L^p(X,\mu)$, *entonces* $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}$, *por lo tanto* $L^p(X,\mu) \subseteq L^{p,\infty}(X,\mu)$.

Demostración. Véase Grafakos, 2014, pág. 5. □

Observación 1.1. *La inclusión* $L^p(X,\mu) \subseteq L^{p,\infty}(X,\mu)$ *es estricta. Por ejemplo, considere* $X = \mathbb{R}$ *con la medida de Lebesgue y* $f(x) = |x|^{-\frac{1}{p}}$. *Aquí*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} \left(|x|^{-\frac{1}{p}}\right)^p dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} dx,$$

la cual es divergente, por lo tanto, $f \notin L^p(\mathbb{R})$. *Por otro lado, para todo* $\alpha > 0$,

$$\alpha^p d_f(\alpha) = \alpha^p \mu\left(\{x \in X : |x^{-\frac{1}{p}}| > \alpha\}\right) = \alpha^p \mu\left(\left\{x \in X : |x| < \frac{1}{\alpha^p}\right\}\right) = \alpha^p \frac{2}{\alpha^p} = 2,$$

lo que implica que $\|f\|_{L^{p,\infty}} < \infty$, *es decir,* $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R})$.

Proposición 1.4. *Para* $f \in L^p(X,\mu)$, $1 \leq p < \infty$, *tenemos*

$$\|f\|_{L^p}^p = p\int_0^{\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\, d\alpha.$$

Demostración. Véase Grafakos, 2014, pág. 4. □

Teorema 1.4 (Desigualdad de Hölder en espacios L^p débiles)**.** *Sea* (X,μ) *un espacio de medida,* $f_j \in L^{p_j,\infty}(X,\mu)$, *donde* $1 \leq p_j \leq \infty$ *y* $1 \leq j \leq k$. *Sea*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k}.$$

Entonces

$$\|f_1 \cdots f_k\|_{L^{p,\infty}} \leq p^{-\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{k} p_j^{\frac{1}{p_j}} \prod_{j=1}^{k} \|f_j\|_{L^{p_j,\infty}}.$$

Demostración. Véase Grafakos, 2014, pág. 15.

□

Ahora supongamos que f es una función medible sobre un espacio de medida (X, μ). Definamos otra función f^* definida sobre $[0, \infty)$ que es decreciente y equidistribuida con f, es decir,

$$\mathrm{d}_f(\alpha) = \mathrm{d}_{f^*}(\alpha)$$

para todo $\alpha \geq 0$. Esto se consigue mediante una construcción que se discute en esta sección.

Definición 1.4 (Función de reordenamiento decreciente)**.** *Sea f una función de valor complejo definida sobre un espacio de medida (X, μ). La función de reordenamiento decreciente de f es la función f^* definida sobre $[0, \infty)$ por*

$$f^*(t) = \text{ínf}\{s > 0 : d_f(s) \leq t\}.$$

Adoptamos la convención de que $\text{ínf}\, \varnothing = \infty$*, teniendo así que $f^*(t) = \infty$, siempre que $d_f(\alpha) > t$ para todo $\alpha \geq 0$.*

Proposición 1.5. *Sean f y g funciones μ- medibles, $k \in \mathbb{C}$, y $0 \leq t, s, t_1, t_2 < \infty$. Entonces*

1. $f^*\left(d_f(\alpha)\right) \leq \alpha$ *siempre que* $\alpha > 0$.
2. $d_f\left(f^*(t)\right) \leq t$.
3. $f^*(t) > s$ *si, y solo si,* $t < d_f(s)$*; esto es,* $\{t \geq 0 : f^*(t) > s\} = [0, d_f(s))$.
4. $|g| \leq |f|$ *μ-a.e. implica que* $g^* \leq f^*$ *y* $|f|^* = f^*$.
5. $(kf)^* = |k| f^*$.
6. $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + f^*(t_2)$.
7. $(fg)^*(t_1 + t_2) = f^*(t_1) g^*(t_2)$.
8. f^* *es continua por la derecha en* $[0, \infty)$.
9. $t \leq \mu\left(\{|f| \geq f^*(t)\}\right)$ *si* $\mu\left(\{|f| \geq f^*(t) - c\}\right) < \infty$ *para algún* $c > 0$.

10. $d_f = d_{f^*}$.

11. $(|f|^p)^* = (f^*)^p$ *para* $1 \leq p < \infty$.

12. $\displaystyle\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty f^*(t)^p dt$ *para* $1 \leq p < \infty$.

13. $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = f^*(0)$.

14. $\sup_{t>0} t^q f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha \left(d_f(\alpha)\right)^q$ *para* $1 \leq q < \infty$.

Demostración. Véase Grafakos, 2014, pág. 47. □

Una vez expuestas algunas de las propiedades básicas de la función de reordenamiento decreciente, procedemos a dar la definición de los espacios de Lorentz.

Definición 1.5. *Dada una función medible f sobre un espacio de medida (X, μ) y $1 \leq p, q \leq \infty$, definimos*

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & si\ 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & si\ q = \infty. \end{cases}$$

El conjunto de todas las f con $\|f\|_{L^{p,q}} < \infty$ es denotado por $L^{p,q}(X, \mu)$ y es llamado espacio de Lorentz con índices p y q.

Considere los siguientes casos:

(i) $p = q = \infty$. Inicialmente note que

$$\begin{aligned} f^* : [0, \infty) &\longrightarrow [0, \infty) \\ t &\longmapsto f^*(t) = \text{ínf}\{s > 0 : d_f(s) \leq t\} \end{aligned}$$

es decreciente. Efecto, sean $0 \leq t_1 < t_2$, entonces

$$\{s > 0 : d_f(s) \leq t_1\} \subset \{s > 0 : d_f(s) \leq t_2\},$$

por lo tanto,

$$\text{ínf}\{s > 0 : d_f(s) \leq t_2\} < \text{ínf}\{s > 0 : d_f(s) \leq t_1\},$$

es decir, $f^*(t_2) < f^*(t_1)$. En este caso, por definición y la Proposición 1.5, ítem 13, se sigue que

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \sup_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \inf\{s > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > s\}) = 0\} = \|f\|_{L^\infty}.$$

(ii) $1 \leq p < \infty$ y $q = \infty$. Aquí utilizamos la Proposición 1.5, ítem 14, de donde obtenemos

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha \left(\mathrm{d}_f(\alpha)\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^{p,\infty}}.$$

(iii) $p = q$. En tal caso utilizamos la Proposición 1.5, ítem 12 en la trasantepenúltima igualdad a continuación:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,p}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\frac{t^{1/p}}{t^{1/p}} f^*(t)\right)^p dt\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^\infty f^*(t)^p \, dt\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Proposición 1.6. *Para todo* $1 \leq p, r < \infty$ *y* $1 \leq q \leq \infty$ *tenemos*

$$\||g|^r\|_{L^{p,q}} = \|g\|^r_{L^{pr,qr}}.$$

Demostración. Véase Grafakos, 2014, pág. 48. □

Proposición 1.7. *Si* $1 \leq p < \infty$ *y* $1 \leq q \leq \infty$, *entonces*

$$\|f\|_{L^{p,q}} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left[d_f(s)^{\frac{1}{p}} s\right]^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q}.$$

Demostración. Véase Grafakos, 2014, pág. 49. □

Proposición 1.8. *Suponga que* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $1 \leq q < r \leq \infty$. *Entonces existe una constante* $C_{p,q,r} > 0$ *(dependiendo de* p, q *y* r*) tal que*

$$\|f\|_{L^{p,r}} \leq C_{p,q,r}\|f\|_{L^{p,q}}.$$

En otras palabras, $L^{p,q}$ *es un subespacio de* $L^{p,r}$.

Demostración. Véase Grafakos, 2014, pág. 49. □

1.3. Funciones de Mittag-Leffler

Las funciones de Mittag-Leffler son una generalización directa de la función exponencial e^x, y juegan un papel importante en el cálculo fraccionario. Las representaciones de uno y dos parámetros de la función Mittag-Leffler se pueden definir en términos de una serie de potencias como en la definición siguiente.

En la siguiente definición $\Gamma(\cdot)$ denota la función Gamma, definida como la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt,$$

la cual converge en la mitad derecha del plano complejo, es decir, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 0$. Esta función generaliza el factorial $n!$ y permite a n tomar valores no enteros e incluso complejos. Además satisface $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

Definición 1.6. *Sean* α, β *números positivos. La* ***función general de Mittag-Leffler****,* $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$*, se define como:*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{1.3}$$

1. Si $\beta = 1$, se tiene que
$$E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z).$$

2. Si $\alpha = \beta = 1$, tenemos
$$E_{\alpha,\beta}(z) = E_{1,1}(z) = e^z.$$

3. Si $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, se tiene que

$$E_{\alpha,\beta}(-z^2) = E_{2,1}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \cos z.$$

4. Para $|z| < 1$, en la ecuación anterior, con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, se tiene que

$$E_{0,1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \frac{1}{1-z}.$$

Teorema 1.5. *Sean $\alpha < 2$, β un número real arbitrario y $\pi\alpha/2 < \mu < \text{mín}\{\pi, \pi\alpha\}$. Entonces existe $C > 0$ tal que,*

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}, \quad (\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi), \quad |z| \geq 0.$$

Demostración. Véase Podlubny, 1998, pág. 35. □

Capítulo 2

Cálculo Fraccionario

En el presente capítulo se dan las definiciones de los operadores fraccionarios (derivada e integral) según Riemann Liouville y Caputo, mostrando algunos resultados básicos acerca de la integral y la derivada fraccionaria.

2.1. Algunos antecedentes

La primera noción del cálculo fraccionario aparece hacia finales del siglo XVII alrededor de algunos comentarios de L'Hospital respecto al valor de n en la notación $\frac{d^n y}{dx^n}$ establecida por Leibniz. En 1738 Leonhard Euler trabajó con esta notación cuando n no es entero, aclarando que si bien la razón diferencial para el caso entero se calcula por diferenciación continua, se puede dar sentido al caso fraccionario por los métodos de interpolación. Después de ochenta años, S. F. Lacroix retomó el problema de las derivadas fraccionarias, encontrando una fórmula para el cálculo de $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^{\alpha}$.

En 1822 Jean Baptiste Joseph Fourier generalizó el caso anterior para α real, estableciendo la fórmula

$$\frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{\alpha} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\left(tx - t\lambda + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dt.$$

Entre los años de 1823 y 1826 Niels Henrik Abel, en relación con el problema de la tautocrona, planteó la ecuación

$$k(x) = \int_{a}^{x} (x-t)^{-1/2} f(t)\, dt.$$

Sin embargo, se resolvió el caso general

$$k(x) = \int_a^x (x-t)^\mu f(t)\,dt,\ x > a,\ \text{para todo } \mu \in (0,1).$$

Pese a todos los acercamientos anteriores, se reconoce a Liouville como el fundador del cálculo fraccionario. En 1832, Liouville, partiendo del hecho de que para n en los naturales se tiene que $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$, no vió inconveniente alguno en generalizar para el caso n no natural. De esta manera si una función f puede expandirse como la serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{a_k x},$$

Liouville definió la derivada de orden α como:

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k a_k^\alpha e^{a_k x}.\ \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Es claro que esta definición depende de la convergencia de la serie. Liouville fue un poco más allá de estos resultados y obtuvo, aunque de una forma no muy rigurosa, la fórmula

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x+t) t^{\alpha-1}\,dt,\ \ -\infty < x < \infty,\ \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

En 1847 Riemann basado en las series de Taylor estableció la siguiente definición de integral fraccionaria de orden $\alpha > 0$

$$I^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt,\ \ x > 0.$$

El cálculo fraccionario siguió evolucionando al margen del cálculo entero a través del concurso de muchos matemáticos como A.K. Grünwald (1867-1872), A. V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), H. Weyl (1917), H. T. Davis (1924-1936), D. V. Widder (1941) y M. Riesz (1949).

Desde 1974, el cálculo fraccionario empezó a tomar importancia como campo de investigación en matemáticas. En este año B. Ross organizó la primera conferencia de

Cálculo Fraccionario y sus aplicaciones en la universidad de New Haven. Las memorias de este evento las cuales se pueden ver en Ross, 2006, en conjunto con la primera monografía del cálculo fraccionario escrita por **Oldham**, se convirtieron en una fuente importante de trabajos en el campo del cálculo fraccionario y sus aplicaciones. Entre los trabajos teóricos y de aplicaciones hechos en el cálculo fraccionario cabe resaltar los resultados de Riemann-Louville y Caputo.

En la última decada, el cálculo fraccionario se ha convertido en una herramienta poderosa para modelar algunos fenómenos físicos que no pueden ser explicados por el cálculo entero y para abordar algunas aplicaciones del análisis numérico.

2.2. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

Sea $f \in L^1([a,b])$. Definamos para $t \in [a,b]$ la función

$$I^1 f(t) = \int_a^t f(s)\, ds.$$

Definiendo

$$I^2 f(t) = I^1\left(I^1 f\right)(t),$$

y aplicando el Teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} I^2 f(t) &= \int_a^t \int_a^s f(r)\, drds \\ &= \int_a^t \int_r^t f(r)\, dsdr \\ &= \int_a^t (t-r) f(r)\, dr. \end{aligned}$$

De forma similar podemos comprobar que

$$\begin{aligned} I^3 f(t) &= \frac{1}{2}\int_a^t (t-r)^2 f(r)\, dr \\ &= \int_a^t \int_a^r \int_a^s f(x)\, dxdrds. \end{aligned}$$

Esta fórmula puede generalizarse para $n \in \mathbb{Z}^+$ obteniendose la n-ésima integral de la función f como se indica a continuación.

Teorema 2.1. *Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f \in L^1([a,b])$. La n-ésima integral de la función f está dada por*

$$I^n f(t) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-r)^{n-1} f(r)\, dr, \;\; t > a, \; n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.1}$$

Demostración. Usamos inducción sobre n. Los casos $n = 1$ y $n = 2$ ya están demostrados. Supongamos que se tiene el resultado para $n = k$ y demostrémoslo para $n = k+1$. Aplicaremos el Teorema de Fubini y propiedades de la función Gamma.

$$\begin{aligned}
I^{k+1} f(t) &= \int_a^t \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t (s-r)^{k-1} f(r)\, drds \\
&= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t \int_r^t (s-r)^{k-1} f(r)\, dsdr \\
&= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t f(r) \left[\int_r^t (s-r)^{k-1}\, ds \right] dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t \frac{(t-r)^k}{k} f(r)\, dr \\
&= \frac{1}{k\Gamma(k)} \int_a^t (t-r)^k f(r)\, dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_a^t (t-r)^{(k-1)+1} f(r)\, dr.
\end{aligned}$$

□

El resultado anterior nos da una pista para entender una forma de definir la generalización de (2.1), la cual se da a continuación.

Definición 2.1. *Si $f \in L^1(0,T;X)$, $T > 0$, y X es un espacio de Banach, la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in (0,1)$ de f se define por*

$$I_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \; t \in [0,T].$$

Definición 2.2. *Sea $\alpha > 0$ y consideremos la función $g_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ dada por*

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, & si\ t > 0, \\ 0, & si\ t \leq 0. \end{cases}$$

Lema 2.1. *Sean $\alpha, \beta > 0$ y considere, $g_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$. Entonces*

$$g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}, \quad t > 0.$$

Demostración. En efecto, si $t > 0$, entonces

$$\begin{aligned} g_\alpha * g_\beta(t) &= \int_0^t g_\alpha(t-s) g_\beta(s)\, ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-s)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} s^{\beta-1}\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1}\, ds. \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $s = t\xi$, tenemos $ds = t d\xi$, de donde $t - s = t - t\xi = t(1-\xi)$. Cuando $s = 0$, $\xi = 0$, y si $s = t$, entonces $\xi = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g_\alpha * g_\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 [t(1-\xi)]^{\alpha-1} (t\xi)^{\beta-1} t\, d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha+\beta-1} (1-\xi)^{\alpha-1} \xi^{\beta-1}\, d\xi \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} \xi^{\beta-1}\, d\xi. \end{aligned}$$

Recordemos que

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 s^{z_1-1} (1-s)^{z_2-1}\, ds,$$

por lo tanto,

$$g_\alpha * g_\beta(t) = \frac{t^{\alpha\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\beta, \alpha).$$

De la relación

$$\Gamma(z_1)\Gamma(z_2) = \Gamma(z_1 + z_2) B(z_1, z_2),$$

tenemos

$$B(\beta, \alpha) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

con lo cual

$$g_\alpha * g_\beta(t) = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = g_{\alpha+\beta}(t).$$

□

Definición 2.3. *Si $f \in C([0,T];X), 0 < T \leq \infty$ es tal que $I_t^{1-\alpha} f \in W^{1,1}(0,T;X)$, la derivada fraccionaria de Caputo de orden α de f es definida por*

$$ {}^cD_t^\alpha f(t) := \frac{d}{dt}\left\{ I_t^{1-\alpha}[f(t)-f(0)] \right\} = \frac{d}{dt}\left\{ \int_0^t (t-s)^{-\alpha}[f(s)-f(0)]ds \right\}. $$

Aquí, $W^{1,1}(0,T;X)$ denota el conjunto de funciones f en $L^1(0,T;X)$ tales que $f_t \in L^1(0,T;X)$.

Lema 2.2. *Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ y $n-1 < \alpha < n$, el problema de Cauchy*

$$ {}^cD_x^\alpha y - \lambda y = f(x), $$

con condiciones iniciales

$$ y^{(j)}(0) = b_j \ (b_j \in \mathbb{R};\ j = 0, \cdots, n-1) $$

tiene solución única dada por

$$ y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j E_{\alpha,j+1}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-\tau)^\alpha\right] f(\tau)d\tau, $$

donde $E_{\alpha,j+1}$ y $E_{\alpha,\alpha}$ son funciones de Mittag-Leffler.

Demostración. Véase Kilbas, Hari M. y Juan J., 2006, pág. 231. □

Capítulo 3

Sistema Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) de orden fraccionario

En teoría cuántica de campos el objeto fundamental es el estado físico del vacío o del espacio-tiempo, es decir, estudia los aspectos cuánticos de campos continuos. Existen dos tipos básicos de partículas elementales en la naturaleza, estos son los bosones y los fermiones, entre estas partículas existen interacciones tales como la fuerza nuclear fuerte, la cual es una de las cuatro fuerzas fundamentales. Esta fuerza, se da entre un bosón denominado mesón y nucleones (protones-neutrones), es la encargada de mantener estable el núcleo atómico. El sistema clásico Klein-Gordon-Schrödinger, describe la interacción entre nucleones y mesones escalares neutros dado por (Fukuda y Masayoshi, 1978, Yukawa, 1955). Este sistema viene dado por

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = -uv, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ \partial_t^2 v - \Delta v + v = |u|^2, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t v(x,0) = v_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Aquí, los nucleones se describen mediante el campo escalar complejo $u(x,t)$ y los mesones mediante el campo escalar real $v(x,t)$, definidos en $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

A partir del sistema (3.1), es natural pensar en su generalización al contexto fraccionario, generalización motivada por razones de corte físico en donde se busca describir, por un lado el efecto de dispersiones no locales y por otro, una dinámica de tipo retardo en su variación temporal. Lo primero, es modelado considerando el Laplaciano de orden fraccionario, y lo segundo, considerando una derivada fraccionaria en tiempo, véase (Su, Zhao y Li, 2019) y (Ionescu y Pusateri, 2014).

Es importante resaltar que una de las primeras investigaciones de la ecuación fraccionaria en tiempo de Schrödinger fue dada por (Naber, 2004), el cual expone las razones para su uso como buen modelo matemático, también en (Achar, Yale y Hanneken, 2013) exponen otras razones para estudiar dicha ecuación fraccionaria en tiempo. Más recientemente, en (Laskin, 2018) el autor da una introducción sistemática sobre la ecuación fraccionaria de Schrödinger tanto en tiempo y espacio.

En esta tesis nos enfocamos en analizar la existencia de soluciones globales y locales de un sistema Klein-Gordon-Schrödinger de orden fraccionario en tiempo (dado por α y δ) y en espacio (dado por β y ν), con no linealidades generalizadas por los exponentes σ, λ y ρ en el contexto de los espacios L^p débiles. Este sistema viene dado por

$$\begin{cases} i\,{}^cD_t^\alpha u - (-\Delta)^{\beta/2} u = -u\,|u|^{\sigma-1}\, v\,|v|^{\lambda-1}, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ {}^cD_t^\delta v + (-\Delta)^{\nu/2} v + v = |u|^\rho, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ v_t(x,0) = v_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $\lambda, \sigma \geq 1$, $\rho \geq 2$, $0 < \alpha < 1$ y $1 < \delta < 2$. Note que este sistema generaliza el modelo clásico cuando $\alpha = \sigma = \lambda = 1$, $\rho = \delta = \beta = \nu = 2$. Cabe anotar que el sistema clásico de KGS, se puede utilizar para describir la fuerza nuclear fuerte entre nucleones, mediada por piones. Además es un modelo estándar para describir el acoplamiento entre el campo de Higgs y los campos de electrones y quarks sin masa (ver Yukawa, 1955).

Haciendo uso del cálculo fraccionario junto con algunos resultados afines, demostramos la existencia, unicidad y estabilidad de solución de una formulación integral para la primera y segunda ecuación del sistema (3.2).

3.1. Formulación integral del sistema KGS

Sea $F(u,v) := -u\,|u|^{\sigma-1}\,v\,|v|^{\lambda-1}$. Entonces la ecuación para u del sistema (3.2), se escribe como

$$i\,{}^cD_t^\alpha u - (-\Delta)^{\beta/2}\,u = F(u,v).$$

Aplicando transformada de Fourier en la variable x obtenemos

$$ {}^cD_t^\alpha \widehat{u}(\xi,t) + i\,|\xi|^\beta\,\widehat{u}(\xi,t) = -i\widehat{F}(u,v). \tag{3.3}$$

De acuerdo con el Lema 2.2, la solución de (3.3) viene dada por

$$\widehat{u}(\xi,t) = E_{\alpha,1}(-i\,|\xi|^\beta\,t^\alpha)\widehat{u}_0 - i\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-i\,|\xi|^\beta\,(t-\tau)^\alpha)\widehat{F}(u(\tau),v(\tau))d\tau.$$

Por lo tanto, aplicando transformada de Fourier inversa la ecuación integral para u, es

$$u(x,t) = S_{\alpha,1}(t)u_0 - i\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}S_{\alpha,\alpha}(t-\tau)F(u(\tau),v(\tau))d\tau, \tag{3.4}$$

donde $S_{\alpha,1}$ y $S_{\alpha,\alpha}$ son multiplicadores de Fourier dados por

$$\widehat{S_{\alpha,1}(t)f}(\xi) = E_{\alpha,1}(-i\,|\xi|^\beta\,t^\alpha)\widehat{f}(\xi), \tag{3.5}$$

$$\widehat{S_{\alpha,\alpha}(t)f}(\xi) = E_{\alpha,\alpha}(-i\,|\xi|^\beta\,t^\alpha)\widehat{f}(\xi). \tag{3.6}$$

Ahora, sea $G(u) := |u|^\rho$. Del sistema (3.2) para v tenemos

$$ {}^cD_t^\delta v + (-\Delta)^{\nu/2}\,v + v = G(u).$$

Aplicando transformada de Fourier en la variable x obtenemos

$$ {}^cD_t^\delta \widehat{v} + \left(1+|\xi|^\nu\right)\widehat{v} = \widehat{G}(u). \tag{3.7}$$

De acuerdo con el Lema 2.2, la solución de (3.7) viene dado por

$$\begin{aligned}\widehat{v}(\xi,t) &= E_{\delta,1}(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta})\widehat{v}_0 + tE_{\delta,2}(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta})\widehat{v}_1 \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\delta-1}E_{\delta,\delta}\left(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta}\right)\widehat{G}(u(\tau))d\tau.\end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando transformada de Fourier inversa, la ecuación integral para v es

$$v(x,t) = H_{\delta,1}(t)v_0 + tH_{\delta,2}(t)v_1 + \int_0^t (t-\tau)^{\delta-1}H_{\delta,\delta}(t-\tau)G(u(\tau))d\tau, \tag{3.8}$$

donde $H_{\delta,1}$, $H_{\delta,2}$ y $H_{\delta,\delta}$ son multiplicadores de Fourier dados por

$$\widehat{H_{\delta,1}(t)}f(\xi) = E_{\delta,1}\left(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta}\right)\widehat{f}(\xi), \tag{3.9}$$

$$\widehat{H_{\delta,2}(t)}f(\xi) = E_{\delta,2}\left(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta}\right)\widehat{f}(\xi), \tag{3.10}$$

$$\widehat{H_{\delta,\delta}(t)}f(\xi) = E_{\delta,\delta}\left(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta}\right)\widehat{f}(\xi). \tag{3.11}$$

Por lo tanto, el sistema (3.2), tiene el par solución $[u,v]$ dado por

$$\begin{cases} u(x,t) = S_{\alpha,1}(t)u_0 - i\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}S_{\alpha,\alpha}(t-\tau)F(u(\tau),v(\tau))d\tau, \\ v(x,t) = H_{\delta,1}(t)v_0 + tH_{\delta,2}(t)v_1 + \int_0^t (t-\tau)^{\delta-1}H_{\delta,\delta}(t-\tau)G(u(\tau))d\tau. \end{cases} \tag{3.12}$$

3.2. Estimativas lineales de decaimiento temporal

A continuación se presentan unas estimativas en tiempo para los multiplicadores de Fourier $S_{\alpha,k}(\cdot)$ y $H_{\delta,k}(\cdot)$, los cuales serán útiles para obtener los resultados de existencia de soluciones y demás resultados asociados al sistema (3.2).

Lema 3.1. *Sean* $0 < \alpha < 1$, $\beta > n$ *y* $k \in \mathbb{R}$. *Entonces existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|S_{\alpha,k}(t)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n\alpha}{\beta}\left(1-\frac{2}{p}\right)} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

con $2 \leq p < \infty$ *y* $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$.

Demostración. De acuerdo con (3.5) y (3.6)

$$S_{\alpha,k}(t)f(x) = \left[E_{\alpha,k}(-i\,|\xi|^{\beta}\,t^{\alpha})\right]^{\vee} * f(x).$$

Usando el cambio de variable $\eta = \xi t^{\frac{\alpha}{\beta}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left[E_{\alpha,k}(-i\,|\xi|^{\beta}\,t^{\alpha})\right]^{\vee}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} E_{\alpha,k}(-i\,|\xi|^{\beta}\,t^{\alpha})e^{ix\cdot\xi}d\xi \\ &= t^{-\frac{n\alpha}{\beta}}\int_{\mathbb{R}^n} E_{\alpha,k}(-i\,|\eta|^{\beta})e^{ix\cdot\eta t^{-\frac{\alpha}{\beta}}}d\eta.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left|\left[E_{\alpha,k}(-i\,|\xi|^{\beta}\,t^{\alpha})\right]^{\vee}(x)\right| \leq t^{-\frac{n\alpha}{\beta}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|E_{\alpha,k}(-i\,|\eta|^{\beta})\right|d\eta.$$

Ahora teniendo en cuenta el Teorema 1.5, existe $C > 0$ tal que

$$\left|E_{\alpha,k}(-i\,|\eta|^{\beta})\right| \leq \frac{C}{1+|\eta|^{\beta}}.$$

Así considerando $\beta > n$, se obtiene

$$\left|\left[E_{\alpha,k}(-i\,|\xi|^{\beta}\,t^{\alpha})\right]^{\vee}(x)\right| \leq Ct^{-\frac{n\alpha}{\beta}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\eta}{1+|\eta|^{\beta}} \leq Ct^{-\frac{n\alpha}{\beta}}.$$

Por desigualdad de Young (Teorema 1.1), se tiene que

$$\|S_{\alpha,k}(t)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n\alpha}{\beta}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.13}$$

Como $|E_{\alpha,k}(z)| \leq C$ para todo $z \in \mathbb{C}$, por Teorema de Plancherel, tenemos que

$$\begin{aligned} \|S_{\alpha,k}(t)f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|E_{\alpha,k}(-i\,|\xi|^\beta\, t^\alpha)\right|^2 \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = C\left\|\widehat{f}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = C\,\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|S_{\alpha,k}(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.14}$$

Ahora aplicando el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin Teorema 1.2 de (3.13) y (3.14) obtenemos que

$$\|S_{\alpha,k}(t)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n\alpha}{\beta}\left(1-\frac{2}{p}\right)} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

□

Ahora vamos a obtener la estimativa en los espacios L^p débiles para los multiplicadores de Fourier $S_{\alpha,k}(\cdot)$.

Lema 3.2. *Si* $2 < p_0 < p < p_1 < \infty$,$0 < \alpha < 1$, $\beta > n$ *y* $k \in \mathbb{R}$. *Entonces existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|S_{\alpha,k}(t)f\|_{L^{(p,\infty)}} \leq Ct^{-\frac{n\alpha}{\beta}\left(1-\frac{2}{p}\right)} \|f\|_{L^{(p',\infty)}}$$

para todo $t > 0$.

Demostración. Sea $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$, con $0 < \theta < 1$. Por el Lema 3.1

$$\|S_{\alpha,k}(t)f\|_{L^{(p_0,p_0)}} \leq Ct^{-\frac{n\alpha}{\beta}\left(1-\frac{2}{p_0}\right)} \|f\|_{L^{(p_0',p_0')}} \quad \text{y} \quad \|S_{\alpha,k}(t)f\|_{L^{(p_1,p_1)}} \leq Ct^{-\frac{n\alpha}{\beta}\left(1-\frac{2}{p_1}\right)} \|f\|_{L^{(p_1',p_1')}}.$$

Usando una vez más el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin tenemos,

$$\begin{aligned}\|S_{\alpha,k}(t)f\|_{L^{(p,\infty)}} &\leq Ct^{-\frac{n\alpha}{\beta}\left(1-\frac{2}{p_0}\right)\theta}t^{-\frac{n\alpha}{\beta}\left(1-\frac{2}{p_1}\right)(1-\theta)}\|f\|_{L^{(p',\infty)}}\\ &= Ct^{-\frac{n\alpha}{\beta}\left[\left(1-\frac{2}{p_0}\right)\theta+\left(1-\frac{2}{p_1}\right)(1-\theta)\right]}\|f\|_{L^{(p',\infty)}}.\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2}{p_0}\right)\theta+\left(1-\frac{2}{p_1}\right)(1-\theta) &= \theta-\frac{2\theta}{p_0}+1-\theta-\frac{2}{p_1}+\frac{2\theta}{p_1} = 1+\frac{2\theta}{p_1}-\frac{2\theta}{p_0}-\frac{2}{p_1}\\ &= 1-\frac{2(1-\theta)}{p_1}-\frac{2\theta}{p_0} = 1-2\left(\frac{\theta}{p_0}+\frac{1-\theta}{p_1}\right) = 1-\frac{2}{p}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|S_{\alpha,k}(t)f\|_{L^{(p,\infty)}} \leq Ct^{-\frac{n\alpha}{\beta}\left(1-\frac{2}{p}\right)}\|f\|_{L^{(p',\infty)}}$$

con esto finalizamos la prueba del Lema. □

Lema 3.3. *Sea* $1<\delta<2$, $\nu>n$ *y* $k\in\mathbb{R}$. *Entonces existe una constante* $C>0$ *tal que*

$$\|H_{\delta,k}(t)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n\delta}{\nu}\left(1-\frac{2}{p}\right)}\|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

con $2\leq p<\infty$ *y* $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$.

Demostración. De acuerdo con (3.9) y (3.11)

$$H_{\delta,k}(t)f(x) = \left[E_{\delta,k}\left(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta}\right)\right]^{\vee} * f(x),$$

usando el cambio de variable $\eta=\xi t^{\frac{\delta}{\nu}}$, se tiene

$$\begin{aligned}\left[E_{\delta,k}\left(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta}\right)\right]^{\vee}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}E_{\delta,k}\left(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta}\right)e^{ix\cdot\xi}d\xi\\ &= t^{-\frac{n\delta}{\nu}}\int_{\mathbb{R}^n}E_{\delta,k}(-(t^{\delta}+|\eta|^{\nu})e^{ix\cdot\eta t^{-\frac{\delta}{\nu}}}d\eta.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left|\left[E_{\delta,k}\left(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta}\right)\right]^{\vee}(x)\right| \leq t^{-\frac{n\delta}{\nu}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|E_{\delta,k}(-(t^{\delta}+|\eta|^{\nu})\right|d\eta.$$

Ahora, teniendo en cuenta el Teorema 1.5, existe $C > 0$ tal que

$$\left|E_{\delta,k}(-(t^{\delta}+|\eta|^{\nu})\right| \leq \frac{C}{1+t^{\delta}+|\eta|^{\nu}}.$$

Así,

$$\left|\left[E_{\delta,k}\left(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta}\right)\right]^{\vee}(x)\right| \leq Ct^{-\frac{n\delta}{\nu}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{C}{1+t^{\delta}+|\eta|^{\nu}} \leq Ct^{-\frac{n\delta}{\nu}}, \text{ si } \nu > n.$$

Por desigualdad de Young (Teorema 1.1), se tiene que

$$\|H_{\delta,k}(t)f)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n\delta}{\nu}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.15}$$

Como $|E_{\alpha,k}(z)| \leq C$ para todo $z \in \mathbb{C}$, por Teorema de Plancherel tenemos que

$$\begin{aligned}\|H_{\delta,k}(t)f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|E_{\delta,k}\left(-\left(1+|\xi|^{\nu}\right)t^{\delta}\right))\right|^2\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = C\left\|\widehat{f}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|H_{\delta,k}(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.16}$$

Ahora aplicando el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin (Teorema 1.2) de (3.15) y (3.16) obtenemos que

$$\|H_{\delta,k}(t)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n\delta}{\nu}\left(1-\frac{2}{p}\right)}\|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Ahora vamos a obtener la estimativas en los espacios L^p débiles para el multiplicador de Fourier $H_{\delta,k}(\cdot)$.

Lema 3.4. *Si $2 < p_0 < p < p_1 < \infty$, $1 < \delta < 2$, $k \in \mathbb{R}$ y $\nu > n$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|H_{\delta,k}(t)f\|_{L^{(p,\infty)}} \leq Ct^{-\frac{n\delta}{\nu}\left(1-\frac{2}{p}\right)}\|f\|_{L^{(p',\infty)}}$$

para todo $t > 0$.

Demostración. Sea $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$, con $0 < \theta < 1$. Por el Lema 3.3

$$\|H_{\delta,k}(t)f\|_{L^{(p_0,p_0)}} \leq Ct^{-\frac{n\delta}{\nu}\left(1-\frac{2}{p_0}\right)}\|f\|_{L^{(p_0',p_0')}} \quad \text{y} \quad \|H_{\delta,k}(t)f\|_{L^{(p_1,p_1)}} \leq Ct^{-\frac{n\delta}{\nu}\left(1-\frac{2}{p_1}\right)}\|f\|_{L^{(p_1',p_1')}}.$$

Usando una vez más el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin tenemos,

$$\begin{aligned}\|H_{\delta,k}(t)f\|_{L^{(p,\infty)}} &\leq Ct^{-\frac{n\delta}{\nu}\left(1-\frac{2}{p_0}\right)\theta}t^{-\frac{n\delta}{\nu}\left(1-\frac{2}{p_1}\right)(1-\theta)}\|f\|_{L^{(p',\infty)}} \\ &= Ct^{-\frac{n\delta}{\nu}\left[\left(1-\frac{2}{p_0}\right)\theta+\left(1-\frac{2}{p_1}\right)(1-\theta)\right]}\|f\|_{L^{(p',\infty)}}.\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2}{p_0}\right)\theta + \left(1-\frac{2}{p_1}\right)(1-\theta) &= \theta - \frac{2\theta}{p_0} + 1 - \theta - \frac{2}{p_1} + \frac{2\theta}{p_1} = 1 + \frac{2\theta}{p_1} - \frac{2\theta}{p_0} - \frac{2}{p_1} \\ &= 1 - \frac{2(1-\theta)}{p_1} - \frac{2\theta}{p_0} = 1 - 2\left(\frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}\right) = 1 - \frac{2}{p}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|H_{\delta,k}(t)f\|_{L^{(p,\infty)}} \leq Ct^{-\frac{n\delta}{\nu}\left(1-\frac{2}{p}\right)}\|f\|_{L^{(p',\infty)}}.$$

□

3.3. Estimativas de las no linealidades del sistema

En esta sección utilizaremos las estimativas obtenidas en la sección anterior de los multiplicadores de Fourier $S_{\alpha,k}(\cdot)$ y $H_{\delta,k}(\cdot)$ para obtener estimativas de las partes no lineales del sistema (3.2).

Denotemos por

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\alpha(u,v) &:= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} S_{\alpha,\alpha}(t-\tau) F(u(\tau),v(\tau))d\tau,\\ \mathcal{N}_\delta(u) &:= \int_0^t (t-\tau)^{\delta-1} H_{\delta,\delta}(t) G(u(\tau))d\tau,\end{aligned}$$

las partes no lineales de las ecuaciones (3.4) y (3.8) respectivamente. Y también definamos, para $0 < t \leq T < \infty$,

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}} &:= \sup_{t\in[0,T]} t^{b_0}\|u(t)\|_{(q,\infty)},\\ \|v\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}} &:= \sup_{t\in[0,T]} t^{b_1}\|v(t)\|_{(\frac{\lambda q}{q-\sigma-1},\infty)},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} b_0 := -\alpha + 1 + \frac{n\alpha}{\beta}\left(1-\frac{2}{q}\right)\\ b_1 := -\delta + 1 + \frac{n\delta}{\nu}\left(1-\frac{2}{\widetilde{q}}\right)\\ \widetilde{q} := \frac{\lambda q}{q-\sigma-1} = \frac{q}{q-\rho} > 2.\end{cases} \tag{3.17}$$

La siguiente proposición será utilizada para obtener resultados de buena colocación local para el sistema (3.2).

Proposición 3.1. *Sean $\lambda, \sigma \geq 1$, $\rho \geq 2$ y $\frac{2n\rho}{n+\nu} < q < 2\rho$, además $\rho b_0, (\lambda b_1 + \sigma b_0) < 1$. Entonces existen constantes $C_1, C_2 > 0$ (independientes de T) tales que*

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{M}_\alpha(u,v) - \mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\\ &\leq C_1\Big\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}} + \|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]\\ &\quad + \|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}} + \|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}}\right]\Big\}\cdot T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0}\end{aligned} \tag{3.18}$$

y

$$\|\mathcal{N}_\delta(u)-\mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}} \leq C_2\,\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|u\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}+\|\widetilde{u}\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]T^{1-\rho b_0} \tag{3.19}$$

para toda u, v, $\widetilde{u}$ y $\widetilde{v}$ tal que el lado derecho de (3.18) *y* (3.19) *es finito.*

Demostración. Para la prueba de la estimativa (3.18), note que

$$\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}}=\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}S_{\alpha,\alpha}(t-\tau)\left(F(u,v)-F(\widetilde{u},\widetilde{v})\right)\,d\tau\right\|_{L^{(q,\infty)}}.$$

De acuerdo con el Lema 3.2

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}}\\
&\leq C\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1-\frac{n\alpha}{\beta}\left(1-\frac{2}{\widetilde{q}}\right)}\|F(u,v)-F(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q',\infty)}}\,d\tau\\
&= C\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\|F(u,v)-F(\widetilde{u},\widetilde{v})+F(\widetilde{u},v)-F(\widetilde{u},v)\|_{L^{(q',\infty)}}\,d\tau\\
&\leq C\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\|F(u,v)-F(\widetilde{u},v)\|_{L^{(q',\infty)}}\,d\tau\\
&\quad + C\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\|F(\widetilde{u},v)-F(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q',\infty)}}\,d\tau\\
&= C\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\|u\,|u|^{\sigma-1}\,v\,|v|^{\lambda-1}-\widetilde{u}\,|\widetilde{u}|^{\sigma-1}\,v\,|v|^{\lambda-1}\,\|_{L^{(q',\infty)}}\,d\tau\\
&\quad + C\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\|\widetilde{u}\,|\widetilde{u}|^{\sigma-1}\,v\,|v|^{\lambda-1}-\widetilde{u}\,|\widetilde{u}|^{\sigma-1}\,\widetilde{v}\,|\widetilde{v}|^{\lambda-1}\,\|_{L^{(q',\infty)}}\,d\tau\\
&= C\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\|\left(u\,|u|^{\sigma-1}-\widetilde{u}\,|\widetilde{u}|^{\sigma-1}\right)v\,|v|^{\lambda-1}\,\|_{L^{(q',\infty)}}\,d\tau\\
&\quad + C\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\|\left(v\,|v|^{\lambda-1}-\widetilde{v}\,|\widetilde{v}|^{\lambda-1}\right)\widetilde{u}\,|\widetilde{u}|^{\sigma-1}\,\|_{L^{(q',\infty)}}\,d\tau.
\end{aligned}$$

Ahora, usando desigualdad de Hölder y la Proposición 1.6 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}}\\
&\leq C\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\|u-\widetilde{u}\|_{L^{(q,\infty)}}\|v\|^{\lambda}_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{L^{(q,\infty)}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{L^{(q,\infty)}}\right]d\tau\\
&\quad + C\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\|v-\widetilde{v}\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{L^{(q,\infty)}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\right]d\tau\\
&= \|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\tau^{-b_0}\tau^{-\lambda b_1}\tau^{-(\sigma-1)b_0}d\tau\\
&\quad + \|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}}\right]\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\tau^{-b_1}\tau^{-\sigma b_0}\tau^{-(\lambda-1)b}d\tau.
\end{aligned}$$

Simplificando exponentes tenemos

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}}\\
&\leq \|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]\int_0^t(t-\tau)^{-b_0}\tau^{-\lambda b_1-\sigma b_0}d\tau\\
&\quad+\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\right]\int_0^t(t-\tau)^{-b_0}\tau^{-\lambda b_1-\sigma b_0}d\tau\\
&=\Bigg\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]\\
&\quad+\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{b}_{\tilde{q},T}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b}_{\tilde{q},T}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b}_{\tilde{q},T}}\right]\Bigg\}\cdot\int_0^t(t-\tau)^{-b_0}\tau^{-\lambda b_1-\sigma b_0}d\tau.
\end{aligned}
$$

Como $b_0<1$ y $\lambda b_1+\sigma b_0<1$, por Lema 1.1, llegamos a que

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}}\\
&\leq\Bigg\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]\\
&\quad+\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\right]\Bigg\}\cdot t^{1-b_0-\lambda b_1-\sigma b_0}.
\end{aligned}
$$

Luego multiplicando por t^{b_0} y tomando supremo en $0<t\leq T<\infty$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}t^{b_0}\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}}\\
&\leq\Bigg\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]\\
&\quad+\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\right]\Bigg\}\cdot T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0},
\end{aligned}
$$

y así,

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{M}_\alpha u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\\
&\leq C_1\Bigg\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]\\
&\quad+\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\tilde{q},T}}\right]\Bigg\}\cdot T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0}.
\end{aligned}
$$

Ahora, para la prueba de la estimativa (3.19), note que

$$\|\mathcal{N}_\delta(u)-\mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}=\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\delta-1}H_{\delta,\delta}(t-\tau)G(u(\tau))-G(\widetilde{u}(\tau))d\tau\right\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}.$$

Teniendo en cuenta el Lema 3.4, se llega a

$$\|\mathcal{N}_\delta(u)-\mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\leq C\int_0^t (t-\tau)^{\delta-1-\frac{n\delta}{\nu}\left(1-\frac{2}{\widetilde{q}}\right)}\left\||u(\tau)|^\rho-|\widetilde{u}(\tau)|^\rho\right\|_{L^{(\widetilde{q}',\infty)}}d\tau.$$

Luego, usando desigualdad de Hölder y la Proposición 1.6 tenemos que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N}_\delta(u)-\mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}&\leq C\int_0^t (t-\tau)^{-b_1}\|u(\tau)-\widetilde{u}(\tau)\|_{L^{(q,\infty)}}\left[\|u(\tau)\|^{\rho-1}_{L^{(q,\infty)}}+\|\widetilde{u}(\tau)\|^{\rho-1}_{L^{(q,\infty)}}\right]d\tau\\&\leq\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|u\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}+\|\widetilde{u}\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]\int_0^t (t-\tau)^{-b_1}\tau^{-\rho b_0}d\tau.\end{aligned}$$

Como $\rho b_0<1$ y $b_1<1$, por Lema 1.1, llegamos a que

$$\|\mathcal{N}_\delta(u)-\mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\leq\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|u\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}+\|\widetilde{u}\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]t^{1-b_1-\rho b_0}.$$

Luego, multiplicando por t^{b_1} y tomando supremo en $0<t<T$ se obtiene

$$\sup_{t\in[0,T]}t^{b_1}\|\mathcal{N}_\delta(u)-\mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\leq\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|u\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}+\|\widetilde{u}\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]T^{1-\rho b_0}.$$

Así,

$$\|\mathcal{N}_\delta(u)-\mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}}\leq C_2\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\left[\|u\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}+\|\widetilde{u}\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}}\right]T^{1-\rho b_0}.$$

□

Ahora definimos

$$\|u\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}:=\sup_{t>0}t^{a_0}\|u(t)\|_{(q,\infty)},$$

$$\|v\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}:=\sup_{t>0}t^{a_1}\|v(t)\|_{(\frac{\lambda q}{q-\sigma-1},\infty)},$$

donde a_0 y a_1 satisfacen el sistema

$$\begin{cases} 1 - b_0 - \lambda a_1 - (\sigma - 1)a_0 = 0, \\ 1 - b_1 - \rho a_0 + a_1 = 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Al resolver dicho sistema obtenemos que

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1-b_0+(1-b_1)\lambda}{\lambda\rho+\sigma-1}, \\ a_1 = \frac{\rho(1-b_0)-(1-b_1)(\sigma-1)}{\lambda\rho+\sigma-1}, \end{cases} \tag{3.21}$$

con $\lambda\rho + \sigma - 1 \neq 0$ y b_0, b_1 dados en la expresión (3.17).

La siguiente proposición nos permite obtener un resultado de buena colocación global para el sistema (3.2).

Proposición 3.2. *Sean $\lambda, \sigma \geq 1, \rho \geq 2$ y $\frac{2n\rho}{n+\nu} < q < 2\rho$, además $b_0, \rho a_0, (\lambda a_1 + \sigma a_0) < 1$. Entonces existen constantes C_3, $C_4 > 0$ tales que*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_\alpha(u,v) - \mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} \leq C_3 \Big\{ &\|u - \widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} \|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}} \left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} + \|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} \right] \\ &+ \|v - \widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}} \|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} \left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}} + \|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}} \right] \Big\} \end{aligned} \tag{3.22}$$

y

$$\|\mathcal{N}_\delta(u) - \mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}} \leq C_4 \|u - \widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} \left[\|u\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} + \|\widetilde{u}\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} \right], \tag{3.23}$$

para toda u, v, $\widetilde{u}$ y $\widetilde{v}$ tal que el lado derecho de (3.22) *y* (3.23) *es finito.*

Demostración. Para la prueba de la estimativa (3.22), procedemos tal como se hizo para la estimativa (3.18) de la Proposición 3.1, esto es,

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}}\\
&\leq C\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\|u-\widetilde{u}\|_{L^{(q,\infty)}}\|v\|^{\lambda}_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{L^{(q,\infty)}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{L^{(q,\infty)}}\right]d\tau\\
&\quad + C\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\|v-\widetilde{v}\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{L^{(q,\infty)}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\right]d\tau\\
&= \|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\right]\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\tau^{-a_0}\tau^{-\lambda a_1}\tau^{-(\sigma-1)a_0}d\tau\\
&\quad + \|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\right]\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\tau^{-a_1}\tau^{-\sigma a_0}\tau^{-(\lambda-1)a_1}d\tau\\
&= \|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\right]\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\tau^{-\lambda a_1-\sigma a_0}d\tau\\
&\quad + \|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\right]\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\tau^{-\lambda a_1-\sigma a_0}d\tau\\
&= \Bigg\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\right]\\
&\quad +\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\right]\Bigg\}\cdot\int_0^t (t-\tau)^{-b_0}\tau^{-\lambda a_1-\sigma a_0}d\tau.
\end{aligned}
$$

Como $b_0<1$ y $\lambda a_1+\sigma a_0<1$, por el Lema 1.1,

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}} \leq &\Bigg\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\right]\\
&+\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\right]\Bigg\}\cdot t^{1-b_0-\lambda a_1-\sigma a_0}.
\end{aligned}
$$

Luego, multiplicando por t^{a_0} y tomando supremo en $t>0$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
\sup_{t>0} t^{a_0}\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}} \leq &\Bigg\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\right]\\
&+\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\right]\Bigg\}\cdot T^{1-b_0-\lambda a_1-(\sigma-1)a_0}.
\end{aligned}
$$

Teniendo presente que de (3.20) $1-b_0-\lambda a_1-(\sigma-1)a_0=0$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} \leq C_3 &\Bigg\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\right]\\
&+\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Ahora, para la prueba de la estimativa (3.23), procedemos tal como se hizo para la estimativa (3.19) de la Proposición 3.1, esto es,

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{N}_\delta(u) - \mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}} \\
&\leq C \int_0^t (t-\tau)^{-b_1} \left\| |u(\tau)|^\rho - |\widetilde{u}(\tau)|^\rho \right\|_{L^{(\widetilde{q}',\infty)}} d\tau \\
&\leq C \int_0^t (t-\tau)^{-b_1} \|u(\tau) - \widetilde{u}(\tau)\|_{L^{(q,\infty)}} \left[\|u(\tau)\|_{L^{(q,\infty)}}^{\rho-1} + \|\widetilde{u}(\tau)\|_{L^{(q,\infty)}}^{\rho-1} \right] d\tau \\
&\leq \|u - \widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}} \left[\|u\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}}^{\rho-1} + \|\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}}^{\rho-1} \right] \int_0^t (t-\tau)^{-b_1} \tau^{-\rho a_0} d\tau.
\end{aligned}
$$

Como $\rho a_0 < 1$ y $b_1 < 1$, por el Lema 1.1, se llega a

$$
\|\mathcal{N}_\delta(u) - \mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}} \leq \|u - \widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}} \left[\|u\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}}^{\rho-1} + \|\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}}^{\rho-1} \right] t^{1-b_1-\rho a_0}.
$$

Luego multiplicando por t^{a_1} y tomando supremo en $t > 0$ se obtiene

$$
\sup_{t>0} t^{a_1} \|\mathcal{N}_\delta(u) - \mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}} \leq \|u - \widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}} \left[\|u\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}}^{\rho-1} + \|\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}}^{\rho-1} \right] t^{1-b_1-\rho a_0+a_1}.
$$

Como de (3.20) se tiene que $1 - b_1 - \rho a_0 + a_1 = 0$, encontramos que

$$
\|\mathcal{N}_\delta(u) - \mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{\mathcal{Y}_{\widetilde{q},\infty}^{a_1}} \leq C_4 \|u - \widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}} \left[\|u\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}}^{\rho-1} + \|\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,\infty}^{a_0}}^{\rho-1} \right].
$$

□

3.4. Solución local y global del sistema

Definición 3.1. *Definimos $E^T_{b_0,b_1}$ como el espacio de Banach que consta de todas las parejas $[u,v]$ con la norma*

$$\|[u,v]\|_{E^T_{b_0,b_1}} := \|u(t)\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}} + \|v(t)\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}}, \tag{3.24}$$

para b_0, b_1 y $\widetilde{q}$ dados en (3.17). Adicionalmente sea E^T_0 el espacio de condiciones iniciales $[u_0, v_0, v_1]$ con la norma

$$\|[u_0, v_0, v_1]\|_{E^T_0} := \|S_{\alpha,1}(t)u_0\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}} + \|H_{\delta,1}(t)v_0 + tH_{\delta,2}(t)v_1\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}} < \infty.$$

Teorema 3.1. *Sean $\lambda, \sigma \geq 1$, $\rho \geq 2$ y $\frac{2n\rho}{n+\nu} < q < 2\rho$, además $\rho b_0, (\lambda b_1 + \sigma b_0) < 1$, y suponga que la norma*

$$\|S_{\alpha,1}(t)u_0\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}} + \|H_{\delta,1}(t)v_0 + tH_{\delta,2}(t)v_1\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}}$$

es finita. Entonces existe $0 < t \leq T < \infty$, tal que el sistema (3.2) *tiene una única solución local $[u,v] \in E^T_{b_0,b_1}$ y además, la aplicación dato-solución es Lipschitz continua de E^T_0 en $E^T_{b_0,b_1}$.*

Demostración. Para la prueba nos basaremos en el Teorema del punto fijo de Banach. Sean

$$\gamma([u,v]) = [S_{\alpha,1}(t)u_0, H_{\delta,1}(t)v_0 + tH_{\delta,2}(t)v_1] + [\mathcal{M}_\alpha(u,v), \mathcal{N}_\delta(u)]$$

y

$$B_\epsilon = \left\{ [u,v] : \|[u,v]\|_{E^T_{b_0,b_1}} < \epsilon \right\}$$

con la metrica $d_{loc}([u,v],[\widetilde{u},\widetilde{v}]) = \|[u-\widetilde{u}, v-\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}}$.

Así,

$$\begin{aligned} d_{loc}(\gamma[u,v], \gamma[\widetilde{u},\widetilde{v}]) &= \|\gamma[u,v] - \gamma[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}} \\ &= \|[\mathcal{M}_\alpha(u,v) - \mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v}), \mathcal{N}_\delta(u) - \mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})]\|_{E^T_{b_0,b_1}} \\ &= \|\mathcal{M}_\alpha(u,v) - \mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{\mathcal{X}^{b_0}_{q,T}} + \|\mathcal{N}_\delta(u) - \mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{\mathcal{Y}^{b_1}_{\widetilde{q},T}}. \end{aligned}$$

Luego de acuerdo con las estimativas (3,18) y (3,19) , obtenemos

$$
\begin{aligned}
& d_{loc}\left(\gamma\left[u,v\right],\gamma\left[\widetilde{u},\widetilde{v}\right]\right) \\
& \leq C_1\left\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,T}^{b_0}}\|v\|_{\mathcal{Y}_{\bar{q},T}^{b_1}}^{\lambda}\left[\|u\|_{\mathcal{X}_{q,T}^{b_0}}^{\sigma-1}+\|\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,T}^{b_0}}^{\sigma-1}\right]\right. \\
& \quad \left.+\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}_{\bar{q},T}^{b_1}}\|\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,T}^{b_0}}^{\sigma}\left[\|v\|_{\mathcal{Y}_{\bar{q},T}^{b_1}}^{\lambda-1}+\|\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}_{\bar{q},T}^{b_1}}^{\lambda-1}\right]\right\}\cdot T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0} \\
& \quad +C_2\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,T}^{b_0}}\left[\|u\|_{\mathcal{X}_{q,T}^{b_0}}^{\rho-1}+\|\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,T}^{b_0}}^{\rho-1}\right]T^{1-\rho b_0} \\
& \leq 2C_1\left\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,T}^{b_0}}\epsilon^{\lambda}\epsilon^{\sigma-1}+\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}_{\bar{q},T}^{b_1}}\epsilon^{\sigma}\epsilon^{\lambda-1}\right\}\cdot T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0} \\
& \quad +2C_2\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}_{q,T}^{b_0}}\epsilon^{\rho-1}T^{1-\rho b_0} \\
& \leq 2C_5\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E_{b_0,b_1}^T}\left(\epsilon^{\sigma+\lambda-1}T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0}+\epsilon^{\rho-1}T^{1-\rho b_0}\right)
\end{aligned}
$$

con $C_5 = \text{máx}\{C_1, C_2\}$. Por lo tanto, para $\epsilon > 0$ fijo, existe $T > 0$ tal que

$$
0 < C_5\left(\epsilon^{\sigma+\lambda-1}T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0}+\epsilon^{\rho-1}T^{1-\rho b_0}\right) < \frac{1}{2}.
$$

Tomando $C_\epsilon = 2C_5\left(\epsilon^{\sigma+\lambda-1}T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0}+\epsilon^{\rho-1}T^{1-\rho b_0}\right)$, tenemos que

$$
\|\gamma\left[u,v\right]-\gamma\left[\widetilde{u},\widetilde{v}\right]\|_{E_{b_0,b_1}^T} \leq C_\epsilon\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E_{b_0,b_1}^T},
$$

donde $0 < C_\epsilon < 1$.

Ahora veamos que si $[u,v] \in B_\epsilon$, entonces $\|[u,v]\|_{E_{b_0,b_1}^T} < \epsilon$. Note que si $[\widetilde{u},\widetilde{v}] = 0$ en Proposición 3.1, tenemos

$$
\begin{aligned}
\|\gamma\left[u,v\right]\|_{E_{b_0,b_1}^T} &\leq \frac{\epsilon}{2}+\left(C_1\epsilon\epsilon^{\lambda}\epsilon^{\sigma-1}\right)T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0} \\
&\quad +C_2\epsilon\epsilon^{\rho-1}T^{1-\rho b_0} \\
&= \frac{\epsilon}{2}+\epsilon\cdot C_1\epsilon^{\sigma+\lambda-1}T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0} \\
&\quad +\epsilon\cdot C_2\epsilon^{\rho-1}T^{1-\rho b_0} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}+\epsilon\cdot C_5\left(\epsilon^{\sigma+\lambda-1}T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0}+\epsilon^{\rho-1}T^{1-\rho b_0}\right) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}+\epsilon\cdot\frac{1}{2}=\epsilon.
\end{aligned}
$$

En consecuencia $\|\gamma[u,v]\|_{E^T_{b_0,b_1}} \leq \epsilon$. Por lo tanto, por el Teorema del punto fijo de Banach existe un único $[u,v] \in E^T_{b_0,b_1}$ tal que

$$\gamma([u,v]) = [u,v].$$

Ahora, veamos que la aplicación dato-solución es Lipschitz continua de E^T_0 en $E^T_{b_0,b_1}$. Sean $[u,v]$ y $[\widetilde{u},\widetilde{v}]$ soluciones al problema (3,2) con datos iniciales $[u_0,v_0,v_1]$ y $[\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0,\widetilde{v}_1]$, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\|[u,v]-[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}}\\
&\leq \|[S_{\alpha,1}(t)(u_0-\widetilde{u}_0), H_{\delta,1}(t)(v_0-\widetilde{v}_0)+tH_{\delta,2}(t)(v_1-\widetilde{v}_1)]\|_{E^T_{b_0,b_1}}\\
&+\|[\mathcal{M}_\alpha([u,v]-[\widetilde{u},\widetilde{v}]),\mathcal{N}_\delta(u-\widetilde{u})]\|_{E^T_{b_0,b_1}}\\
&\leq \|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E^T_0}+2C_1\epsilon^{\sigma+\lambda-1}T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0}\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}}\\
&+2C_2\epsilon^{\rho-1}T^{1-\rho b_0}\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}}\\
&=\|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E^T_0}\\
&+2\left(C_1\epsilon^{\sigma+\lambda-1}T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0}+C_2\epsilon^{\rho-1}T^{1-\rho b_0}\right)\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}}\\
&\leq \|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E^T_0}\\
&+2C_5\left(\epsilon^{\sigma+\lambda-1}T^{1-\lambda b_1-\sigma b_0}+\epsilon^{\rho-1}T^{1-\rho b_0}\right)\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}}\\
&=\|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E^T_0}+C_\epsilon\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}}.
\end{aligned}$$

Así, obtenemos que

$$\|[u,v]-[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}}-C_\epsilon\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}} \leq \|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E^T_0}.$$

Por lo tanto, $(1-C_\epsilon)\|[u,v]-[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}} \leq \|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E^T_0}$, de donde se llega a

$$\|[u,v]-[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{E^T_{b_0,b_1}} \leq (1-C_\epsilon)^{-1}\|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E^T_0}.$$

□

Definición 3.2. *Definimos $E^{\infty}_{a_0,a_1}$ como el espacio de Banach que consta de todas las parejas $[u,v]$ con la norma*

$$\|[u,v]\|_{E^{\infty}_{a_0,a_1}} := \|u(t)\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} + \|v(t)\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}}, \tag{3.25}$$

para a_0 y a_1 dados en (3.21). Adicionalmente sea E^{∞}_0 el espacio de condiciones iniciales $[u_0,v_0,v_1]$ con la norma

$$\|[u_0,v_0,v_1]\|_{E^{\infty}_0} := \|S_{\alpha,1}(t)u_0\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} + \|H_{\delta,1}(t)v_0 + tH_{\delta,2}(t)v_1\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}} < \infty.$$

Teorema 3.2. *Sean $\lambda, \sigma \geq 1$, $\rho \geq 2$ y $\frac{2n\rho}{n+\nu} < q < 2\rho$, además $b_0, \rho a_0, (\lambda a_1 + \sigma a_0) < 1$, y suponga también que existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|S_{\alpha,1}(t)u_0\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} + \|H_{\delta,1}(t)v_0 + tH_{\delta,2}(t)v_1\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}} < \frac{\delta}{2}.$$

Entonces el sistema (3.2) *tiene una única solución global y además, la aplicación dato solución es Lipschitz continua de E^{∞}_0 en $E^{\infty}_{a_0,a_1}$.*

Demostración. Para la prueba nos basaremos en el Teorema del punto fijo de Banach. Sea

$$\Gamma([u,v]) = [S_{\alpha,1}(t)u_0, H_{\delta,1}(t)v_0 + tH_{\delta,2}(t)v_1] + [\mathcal{M}_{\alpha}(u,v), \mathcal{N}_{\delta}(u)],$$

y definamos la bola centrada en cero de radio δ

$$B_{\delta} = \left\{ [u,v] : \|[u,v]\|_{E^{\infty}_{a_0,a_1}} < \delta \right\}$$

con la metrica $d_{glo}([u,v],[\widetilde{u},\widetilde{v}]) = \|[u-\widetilde{u}, v-\widetilde{v}]\|_{E^{\infty}_{a_0,a_1}}$. Así,

$$\begin{aligned} d_{glo}(\Gamma[u,v], \gamma[\widetilde{u},\widetilde{v}]) &= \|\Gamma[u,v] - \Gamma[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{E^{\infty}_{a_0,a_1}} \\ &= \|[\mathcal{M}_{\alpha}(u,v) - \mathcal{M}_{\alpha}(\widetilde{u},\widetilde{v}), \mathcal{N}_{\delta}(u) - \mathcal{N}_{\delta}(\widetilde{u})]\|_{E^{\infty}_{a_0,a_1}} \\ &= \|\mathcal{M}_{\alpha}(u,v) - \mathcal{M}_{\alpha}(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} + \|\mathcal{N}_{\delta}(u) - \mathcal{N}_{\delta}(\widetilde{u})\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}}. \end{aligned}$$

Así, de acuerdo con las estimativas (3.22) y (3.23), obtenemos

$$\begin{aligned}
d_{glo}\left(\Gamma\left[u,v\right],\gamma\left[\widetilde{u},\widetilde{v}\right]\right) &\leq C_3\left\{\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\right]\right.\\
&\quad\left.+\|v-\widetilde{v}\|_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,T}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}}\right]\right\}\\
&\quad+C_4\|u-\widetilde{u}\|_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\left[\|u\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}+\|\widetilde{u}\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\right]\\
&\leq 2C_3\left\{\|u-\widetilde{u}\|^{\lambda}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\delta^{\lambda}\delta^{\sigma-1}+\|v-\widetilde{v}\|^{\sigma}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\tilde{q},\infty}}\delta^{\sigma}\sigma^{\lambda-1}\right\}\\
&\quad+2C_4\|u-\widetilde{u}\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\sigma^{\rho-1}\\
&\leq 2C_6\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E^{\infty}_{a_0,a_1}}\left(\delta^{\sigma+\lambda-1}+\delta^{\rho-1}\right)
\end{aligned}$$

con $C_6 = \text{máx}\{C_3, C_4\}$. Por lo tanto, para $\delta > 0$ fijo, tenemos que

$$0 < C_6\left(\delta^{\sigma+\lambda-1}+\delta^{\rho-1}\right) < \frac{1}{2}.$$

Tomando $C_\delta = 2C_6\left(\delta^{\sigma+\lambda-1}+\delta^{\rho-1}\right)$, tenemos que

$$\|\Gamma\left[u,v\right]-\Gamma\left[\widetilde{u},\widetilde{v}\right]\|_{E^{\infty}_{a_0,a_1}} \leq C_\delta\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E^{\infty}_{a_0,a_1}},$$

donde $0 < C_\delta < 1$.

Ahora, veamos que si $[u,v] \in B_\delta$, entonces $\|[u,v]\|_{E^{\infty}_{a_0,a_1}} < \delta$. Note que si $[\widetilde{u},\widetilde{v}] = 0$ en la Proposición 3.2, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma\left[u,v\right]\|_{E^{\infty}_{a_0,a_1}} &\leq \frac{\delta}{2}+\left(C_3\delta\delta^{\lambda}\delta^{\sigma-1}\right)+C_4\delta\delta^{\rho-1}\\
&= \frac{\delta}{2}+\delta\cdot C_3\delta^{\sigma+\lambda-1}+\delta\cdot C_4\delta^{\rho-1}\\
&\leq \frac{\delta}{2}+\delta\cdot C_6\left(\delta^{\sigma+\lambda-1}+\delta^{\rho-1}\right)\leq\frac{\delta}{2}+\delta\cdot\frac{1}{2}=\delta.
\end{aligned}$$

Así que $\|\Gamma\left[u,v\right]\|_{E^{\infty}_{a_0,a_1}} \leq \delta$, por lo tanto, por el Teorema del punto fijo de Banach, existe un único par $[u,v] \in E^{\infty}_{a_0,a_1}$ tal que

$$\Gamma\left([u,v]\right) = [u,v].$$

Ahora, veamos que la aplicación dato-solución es Lipschitz continua de E_0^∞ en E_{a_0,a_1}^∞. Sean $[u,v]$ y $[\widetilde{u},\widetilde{v}]$ soluciones globales al problema (**3**,**2**) con datos iniciales $[u_0,v_0,v_1]$ y $[\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0,\widetilde{v}_1]$, respectivamente. Entonces,

$$
\begin{aligned}
&\|[u,v]-[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}\\
&\leq \|[S_{\alpha,1}(t)\,(u_0-\widetilde{u}_0)\,,H_{\delta,1}(t)(v_0-\widetilde{v}_0)+tH_{\delta,2}(t)(v_1-\widetilde{v}_1)]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}\\
&+\|[\mathcal{M}_\alpha([u,v]-[\widetilde{u},\widetilde{v}]),\mathcal{N}_\delta(u-\widetilde{u})]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}\\
&\leq \|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E_0^\infty}+2C_3\delta^\lambda\delta^{\sigma-1}\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}\\
&+2C_4\delta^{\rho-1}\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}\\
&=\|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E_0^\infty}+2\left(C_3\delta^{\sigma+\lambda-1}+C_4\delta^{\rho-1}\right)\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}\\
&\leq \|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E_0^\infty}+2C_6\left(\delta^{\sigma+\lambda-1}+\delta^{\rho-1}\right)\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}\\
&=\|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E_0^\infty}+C_\delta\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}\,.
\end{aligned}
$$

Así, obtenemos que

$$
\|[u,v]-[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}-C_\delta\|[u-\widetilde{u},v-\widetilde{v}]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}\quad\leq\quad\|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E_0^\infty}\,.
$$

Luego $(1-C_\delta)\,\|[u,v]-[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}\;\leq\;\|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E_0^\infty}$, de donde se llega a

$$
\|[u,v]-[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{E_{a_0,a_1}^\infty}\leq(1-C_\delta)^{-1}\|[u_0-\widetilde{u}_0,v_0-\widetilde{v}_0,v_1-\widetilde{v}_1]\|_{E_0^\infty}\,.
$$

Lo que termina la prueba. □

3.5. Comportamiento asintótico

Ahora estudiamos el comportamiento asintótico para las soluciones globales del sistema (3.2)

Teorema 3.3. *Sean* $[u,v]$ *y* $[\widetilde{u},\widetilde{v}] \in E^{\infty}_{a_0,a_1}$ *soluciones globales para (3.2) dadas por Teorema 3.2, con datos iniciales* $[u_0,v_0,v_1]$ *y* $[\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0,\widetilde{v}_1]$*, respectivamente. Entonces*

$$\lim_{t\to\infty}\left\{t^{a_0}\left\|S_{\alpha,1}(t)\left[u_0-\widetilde{u}_0\right]\right\|_{L^{(q,\infty)}}+t^{a_1}\left\|H_{\delta,1}(t)\left[v_0-\widetilde{v}_0\right]+tH_{\delta,2}(t)\left[v_1-\widetilde{v}_1\right]\right\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\right\}=0.$$

si, y solo si,

$$\lim_{t\to\infty}\left\{t^{a_0}\left\|u-\widetilde{u}\right\|_{L^{(q,\infty)}}+t^{a_1}\left\|v-\widetilde{v}\right\|_{L^{(q,\infty)}}\right\}=0.$$

Demostración. Defina $A(t) := t^{a_0}\left\|u-\widetilde{u}\right\|_{L^{(q,\infty)}}+t^{a_1}\left\|v-\widetilde{v}\right\|_{L^{(q,\infty)}}$. Entonces, usando las formulaciones integrales dadas en (3.12), se obtiene que

$$\begin{aligned}A(t)\leq{}& t^{a_0}\left\|S_{\alpha,1}(t)\left[u_0-\widetilde{u}_0\right]\right\|_{L^{(q,\infty)}}+t^{a_1}\left\|H_{\delta,1}(t)\left[v_0-\widetilde{v}_0\right]+tH_{\delta,2}(t)\left[v_1-\widetilde{v}_1\right]\right\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\\&+t^{a_0}\left\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\right\|_{L^{(q,\infty)}}+t^{a_1}\|\mathcal{N}_\delta(u)-\mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Note que de la prueba de la estimativa (3.22) se obtiene

$$\begin{aligned}&t^{a_0}\|\mathcal{M}_\alpha(u,v)-\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}}\\&\leq Ct^{a_0}\int_0^t(t-\tau)^{-b_0}\|\left(u-\widetilde{u}\right)(\tau)\|_{L^{(q,\infty)}}\|v\|^{\lambda}_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{L^{(q,\infty)}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{L^{(q,\infty)}}\right]d\tau\\&\quad+Ct^{a_0}\int_0^t(t-\tau)^{-b_0}\|\left(v-\widetilde{v}\right)(\tau)\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{L^{(q,\infty)}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\right]d\tau\\&\leq Ct^{a_0}\|v\|^{\lambda}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\left[\|u\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}+\|\widetilde{u}\|^{\sigma-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\right]\int_0^t(t-\tau)^{-b_0}\tau^{-\lambda a_1-\sigma a_0}\left[\tau^{a_0}\|\left(u-\widetilde{u}\right)(\tau)\|_{L^{(q,\infty)}}\right]d\tau\\&\quad+Ct^{a_0}\|\widetilde{u}\|^{\sigma}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\left[\|v\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}+\|\widetilde{v}\|^{\lambda-1}_{\mathcal{Y}^{a_1}_{\widetilde{q},\infty}}\right]\int_0^t(t-\tau)^{-b_0}\tau^{-\lambda a_1-\sigma a_0}\left[\tau^{a_1}\|\left(v-\widetilde{v}\right)(\tau)\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\right]d\tau.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $s = \tau/t \to \tau = st$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&t^{a_0}\|\mathcal{M}_\alpha(u,v) - \mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}} \\
&\leq 2Ct^{a_0}\delta^{\lambda+\sigma-1}\int_0^1 (t-st)^{-b_0}(st)^{-\lambda a_1-\sigma a_0}\left[(st)^{a_0}\|\,(u-\widetilde{u})\,(st)\|_{L^{(q,\infty)}}\right]tds \\
&\quad + 2Ct^{a_0}\delta^{\lambda+\sigma-1}\int_0^1 (t-st)^{-b_0}(st)^{-\lambda a_1-\sigma a_0}\left[(st)^{a_1}\|\,(v-\widetilde{v})\,(st)\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\right]tds \\
&\leq 2C\delta^{\lambda+\sigma-1}\int_0^1 (1-s)^{-b_0}s^{-\lambda a_1-\sigma a_0}\left[(st)^{a_0}\|(st)^{a_0}\,(u-\widetilde{u})\,(st)\|_{L^{(q,\infty)}}\right. \\
&+ \left.(st)^{a_1}\|\,(v-\widetilde{v})\,(st)\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\right]t^{1-b_0-\lambda a_1-(\sigma-1)a_0}ds.
\end{aligned}
$$

De (3.20) se llega a que $1 - b_0 - \lambda a_1 - (\sigma - 1)a_0 = 0$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
&t^{a_0}\|\mathcal{M}_\alpha(u,v) - \mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}} \\
&\leq 2C\delta^{\lambda+\sigma-1}\int_0^1 (1-s)^{-b_0}s^{-\lambda a_1-\sigma a_0}\left[(st)^{a_0}\|\,(u-\widetilde{u})\,(st)\|_{L^{(q,\infty)}}(st)^{a_1}\|\,(v-\widetilde{v})\,(st)\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\right]ds.
\end{aligned}
$$

Así que

$$
t^{a_0}\|\mathcal{M}_\alpha(u,v) - \mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{L^{(q,\infty)}} \leq 2C\delta^{\lambda+\sigma-1}\int_0^1 (1-s)^{-b_0}s^{-\lambda a_1-\sigma a_0}[A(st)]ds. \quad (3.27)
$$

Ahora de la prueba de la estimativa (3.23), se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&t^{a_1}\|\mathcal{N}_\delta(u) - \mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}} \\
&\leq Ct^{a_1}\int_0^t (t-\tau)^{-b_1}\,\|u(\tau)-\widetilde{u}(\tau)\|_{L^{(q,\infty)}}\left[\|u(\tau)\|^{\rho-1}_{L^{(q,\infty)}} + \|\widetilde{u}(\tau)\|^{\rho-1}_{L^{(q,\infty)}}\right]d\tau \\
&\leq Ct^{a_1}\left[\|u(\tau)\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} + \|\widetilde{u}(\tau)\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\right]\int_0^t (t-\tau)^{-b_1}\tau^{-\rho a_0}\left[\tau^{a_0}\,\|(u-\widetilde{u})\,(\tau)\|_{L^{(q,\infty)}}\right]d\tau.
\end{aligned}
$$

Haciendo el cambio de variable $s = \tau/t \to \tau = st$, encontramos que

$$
\begin{aligned}
&t^{a_1}\|\mathcal{N}_\delta(u) - \mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}} \\
&\leq Ct^{a_1}\left[\|u(\tau)\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}} + \|\widetilde{u}(\tau)\|^{\rho-1}_{\mathcal{X}^{a_0}_{q,\infty}}\right]\int_0^t (t-st)^{-b_1}(st)^{-\rho a_0}\left[(st)^{a_0}\,\|(u-\widetilde{u})\,(st)\|_{L^{(q,\infty)}}\right]td\tau \\
&\leq 2C\delta^{\rho-1}\int_0^t (1-s)^{-b_1}s^{-\rho a_0}\left[(st)^{a_0}\,\|(u-\widetilde{u})\,(st)\|_{L^{(q,\infty)}}\right]t^{1-b_1-\rho a_0+a_1}d\tau.
\end{aligned}
$$

Note que de (3.20) se tiene $1 - b_1 - \rho a_0 + a_1 = 0$. Entonces,

$$t^{a_1}\|\mathcal{N}_\delta(u) - \mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}} \leq 2C\delta^{\rho-1}\int_0^t (1-s)^{-b_1}s^{-\rho a_0}\left[(st)^{a_0}\|(u-\widetilde{u})(st)\|_{L^{(q,\infty)}}\right]d\tau.$$

Por lo tanto,

$$t^{a_1}\|\mathcal{N}_\delta(u) - \mathcal{N}_\delta(\widetilde{u})\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}} \leq 2C\delta^{\rho-1}\int_0^t (1-s)^{-b_1}s^{-\rho a_0}\left[A(st)\right]d\tau. \tag{3.28}$$

Luego de (3.27) y (3.28), la desigualdad (3.26) se convierte en

$$\begin{aligned} A(t) \leq\ & t^{a_0}\|S_{\alpha,1}(t)[u_0-\widetilde{u}_0]\|_{L^{(q,\infty)}} + t^{a_1}\|H_{\delta,1}(t)[v_0-\widetilde{v}_0] + tH_{\delta,2}(t)[v_1-\widetilde{v}_1]\|_{L^{(q,\infty)}} \\ & +2C\delta^{\lambda+\sigma-1}\int_0^1 (1-s)^{-b_0}s^{-\lambda a_1-\sigma a_0}[A(st)]ds \\ & +2C\delta^{\rho-1}\int_0^t (1-s)^{-b_1}s^{-\rho a_0}\left[A(st)\right]d\tau. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Sabemos que $A_0 := \limsup_{t\to\infty} A(t)$ es finito, ya que $[u,v]$ y $[\widetilde{u},\widetilde{v}] \in E^\infty_{a_0,a_1}$. Tomando $\limsup_{t\to\infty}$ en (3.29) y teniendo encuenta la hipótesis dada, se tiene que

$$\begin{aligned} A_0 &\leq 0 + A_0\left[2C\delta^{\lambda+\sigma-1}\int_0^1 (1-s)^{-b_0}s^{-\lambda a_1-\sigma a_0}ds + 2C\delta^{\rho-1}\int_0^t (1-s)^{-b_1}s^{-\rho a_0}d\tau\right] \\ &= A_0\left(2C\delta^{\lambda+\sigma-1} + 2C\delta^{\rho-1}\right) < A_0, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo si $A_0 \neq 0$. Por lo tanto, $A_0 = 0$, lo cual implica que

$$\lim_{t\to\infty}\left\{t^{a_0}\|u-\widetilde{u}\|_{L^{(q,\infty)}} + t^{a_1}\|v-\widetilde{v}\|_{L^{(q,\infty)}}\right\} = 0.$$

Para probar el recíproco, note que

$$\begin{aligned} & t^{a_0}\|S_{\alpha,1}(t)[u_0-\widetilde{u}_0]\|_{L^{(q,\infty)}} + t^{a_1}\|H_{\delta,1}(t)[v_0-\widetilde{v}_0] + tH_{\delta,2}(t)[v_1-\widetilde{v}_1]\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}} \\ & \leq A(t) + t^{a_0}\|\mathcal{M}_\alpha(\widetilde{u},\widetilde{v}) - \mathcal{M}_\alpha(u,v)\|_{L^{(q,\infty)}} + t^{a_1}\|\mathcal{N}_\delta(\widetilde{u}) - \mathcal{N}_\delta(u)\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}. \end{aligned}$$

Usando (3.27) y (3.28), se llega a

$$
\begin{aligned}
& t^{a_0} \left\| S_{\alpha,1}(t)\left[u_0-\widetilde{u}_0\right]\right\|_{L^{(q,\infty)}} + t^{a_1} \left\| H_{\delta,1}(t)\left[v_0-\widetilde{v}_0\right] + tH_{\delta,2}(t)\left[v_1-\widetilde{v}_1\right]\right\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}} \\
& \leq A(t) + 2C\delta^{\lambda+\sigma-1}\int_0^1 (1-s)^{-b_0} s^{-\lambda a_1-\sigma a_0}[A(st)]ds \\
& + 2C\delta^{\rho-1}\int_0^t (1-s)^{-b_1} s^{-\rho a_0}\left[A(st)\right] d\tau.
\end{aligned}
$$

Por hipótesis y tomando $\limsup\limits_{t\to\infty}$ en la expresión anterior se llega a

$$
\begin{aligned}
& \lim_{t\to\infty}\sup \left[t^{a_0} \left\| S_{\alpha,1}(t)\left[u_0-\widetilde{u}_0\right]\right\|_{L^{(q,\infty)}} + t^{a_1} \left\| H_{\delta,1}(t)\left[v_0-\widetilde{v}_0\right] + tH_{\delta,2}(t)\left[v_1-\widetilde{v}_1\right]\right\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\right] \\
& \leq \lim_{t\to\infty}\sup A(t) + \lim_{t\to\infty}\sup 2C\delta^{\lambda+\sigma-1}\int_0^1 (1-s)^{-b_0} s^{-\lambda a_1-\sigma a_0}[A(st)]ds \\
& + \lim_{t\to\infty}\sup 2C\delta^{\rho-1}\int_0^t (1-s)^{-b_1} s^{-\rho a_0}\left[A(st)\right] d\tau \\
& \leq 0+0+0 \leq 0.
\end{aligned}
$$

En la última línea se ha aplicado el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Por lo tanto, encontramos que

$$
\lim_{t\to\infty}\left\{t^{a_0} \left\| S_{\alpha,1}(t)\left[u_0-\widetilde{u}_0\right]\right\|_{L^{(q,\infty)}} + t^{a_1} \left\| H_{\delta,1}(t)\left[v_0-\widetilde{v}_0\right] + tH_{\delta,2}(t)\left[v_1-\widetilde{v}_1\right]\right\|_{L^{(\widetilde{q},\infty)}}\right\} = 0.
$$

Lo que termina la prueba del teorema. □

Capítulo 4

Conclusiones

4.1. Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se tuvieron los siguientes resultados:

1. Se obtuvieron estimativas de decaimiento en tiempo para los multiplicadores de Fourier del par solución (3.12) en los espacios L^p débiles.

2. Se consiguieron estimativas en tiempo para los términos no lineales del par solución (3.12) en los espacios L^p débiles.

3. Se probó existencia y unicidad de soluciones locales del sistema (3.2). Y también que la aplicación dato-solución es Lipschitz continua del espacio E_0^T en el espacio E_{b_0,b_1}^T, ambos espacios basados en espacios L^p débiles.

4. Se demostró existencia y unicidad de soluciones globales del sistema (3.2). Y también que la aplicación dato-solución es Lipschitz continua del espacio E_0^∞ en el espacio E_{a_0,a_1}^∞, ambos espacios basados en espacios L^p débiles.

5. Se mostró la estabilidad asintótica de la solución global del sistema (3.2).

4.2. Trabajos futuros

Como trabajos futuros, se espera hacer un análisis de este tipo de sistemas fraccionarios en los espacios de modulación o en los espacios de Besov, tomando diferentes

nolinealidades, y determinar si se puede obtener un resultado de buena colocación local o global.

Bibliografía

Achar, B Narahari, Bradley T Yale y John W Hanneken (2013). «Time fractional Schrodinger equation revisited». En: *Advances in Mathematical Physics* 2013, págs. 1-11.

Amann, Herbert y Escher Joachim (2009). *Analysis III*. Birkhauser.

Bachelot, Alain (1984). «Problème de Cauchy pour des systèmes hyperboliques semi-linéaires». En: *Annales de lÍnstitut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire* 1, págs. 453-478.

Baillon, Jean y Chadam John (1978). *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*. North-Holland.

Banquet, Carlos, Ferreira Lucas CF y Villamizar-Roa Elder J. (2015). «On existence and scattering theory for the Klein–Gordon–Schrödinger system in an infinite L^2-norm setting». En: *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)* 194, págs. 781-804.

Bisognin, Vanilde y col. (2008). «Uniform decay for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations with locally distributed damping». En: *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA* 15, págs. 91-113.

Cavalcanti, Marcelo y Domingos Cavalcanti Valeria (2000). «Global existence and uniform decay for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations». En: *Nonlinear Differential Equations and Applications* 7, págs. 285-307.

Colliander, James, Holmer Justin y Tzirakis Nikolaos (2008). «Low regularity global well-posedness for the Zakharov and Klein-Gordon-Schrödinger systems». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 360, págs. 4619-4638.

Fukuda, Isamu y Tsutsumi Masayoshi (1978). «On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations, II». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 66, págs. 358-378.

– (1979). «On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations III». En: *Japanese Journal of Mathematics* 24, págs. 307-321.

Grafakos, Loukas (2014). *Classical Fourier Analysis*. Springer.

Hayashi, Nakao y Wolf Wahl (1987). «On the global strong solutions of coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations». En: *Journal of The Mathematical Society of Japan - J MATH SOC JPN* 39, págs. 489-497.

Huang, Chunyan y col. (2016). «Global well-posedness of the fractional Klein-Gordon-Schrödinger system with rough initial data». En: *Science China Mathematics* 59, págs. 1345-1366.

Ionescu, Alexandru D y Fabio Pusateri (2014). «Nonlinear fractional Schrödinger equations in one dimension». En: *Journal of Functional Analysis* 266, págs. 139-176.

Kilbas, Anatoly A., Srivastava Hari M. y Trujillo Juan J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier.

Kreyszig, Erwin (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons.

Laskin, Nikolai (2018). *Fractional Quantum Mechanics*. World Scientific.

Naber, Mark (2004). «Time fractional Schrödinger equation». En: *Journal of mathematical physics* 45, págs. 3339-3352.

Pecher, Hartmut (2002). «Global solutions of the Klein-Gordon-Schrödinger system with rough data». En: *Differential Integral Equations* 17, págs. 179-214.

– (2010). «Low regularity well-posedness for the 3D Klein-Gordon-Schrödinger system». En: *Communications on Pure and Applied Analysis* 11, págs. 1081-1096.

– (2012). «Some new well-posedness results for the Klein-Gordon-Schrödinger system». En: *Differential and Integral Equations* 25, págs. 117 -142.

Podlubny, Igor (1998). *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Academic Press.

Ross, Bertram (2006). *Fractional calculus and its applications: proceedings of the international conference held at the University of New Haven, June 1974*. Springer.

Shi, Qihong y Yong Li (2010). «Wellposedness for the nonlinear Klein-Gordon-Schröinger equations with heterointeractions». En: *Journal of Mathematical Physics* 51, pág. 032102.

Su, Xiaoyan, Shiliang Zhao y Miao Li (2019). «Local well-posedness of semilinear space-time fractional Schrödinger equation». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 479, págs. 1244-1265.

Tzirakis, Nikolaos (2005). «The Cauchy Problem for the Klein–Gordon–Schrödinger System in Low Dimensions Below the Energy Space». En: *Communications in Partial Differential Equations* 30, págs. 605-641.

Veeresha, Pundikala y col. (2020). «Fractional Klein-Gordon-Schrödinger equations with Mittag-Leffler memory». En: *Chinese Journal of Physics* 68, págs. 65-78.

Yukawa, Hideki (1955). «On the Interaction of Elementary Particles. I». En: *Progress of Theoretical Physics Supplement* 1, págs. 1-10.