

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS DE JULIA OBTENIDOS COMO ATRACTORES DE SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES

Mario Luis Viloria Pérez



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA

2023

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS DE JULIA OBTENIDOS COMO ATRACTORES DE SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES

Mario Luis Viloría Pérez

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Matemático

Asesor:

Dr. Luis Enrique Benítez Babilonia



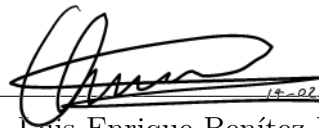
UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA

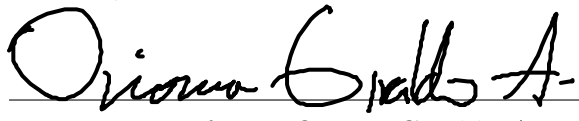
2023

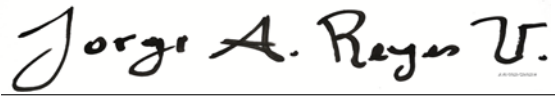
UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Los jurados abajo firmantes certifican que han leído y que aprueban el trabajo de grado titulado: **PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS DE JULIA OBTENIDOS COMO ATRACTORES DE SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES**, el cual es presentado por el estudiante **Mario Luis Viloría Pérez**.

Fecha: Febrero de 2023

Asesor: 
Dr. Luis Enrique Benítez Babilonia

Jurado: 
Profesora Oriana Giraldo Arcia

Jurado: 
M. Sc. Jorge Armando Reyes Vásquez

*A mis padres Libardo Vitoria y Cledys Pérez
Y a las personas que me han apoyado*

Resumen

En el presente trabajo se estudian propiedades de particulares formas fractales llamados conjuntos de Julia. Se analizan características fractales como la autosemejanza y la dimensión fractal, así como también su relación con distintas áreas de las matemáticas, entre ellas: el análisis matemático, los sistemas dinámicos y la topología, haciendo énfasis en uno de los conceptos más usados para la obtención de fractales, como son los Sistemas Iterados de Funciones (SIF), propuesto por Michael F. Barnsley en 1985. Se presenta la teoría fractal adecuada y se construyen conjuntos de Julia utilizando el método de Barnsley.

Abstract

In the present work we study properties of particular fractal forms called Julia sets. Fractal characteristics such as self-similarity and fractal dimension are analyzed, as well as their relationship with different areas of mathematics, among them: mathematical analysis, dynamic systems and topology, emphasizing one of the most used concepts for obtaining of fractals, such as the Iterated Functions Systems (IFS), proposed by Michael F. Barnsley in 1985. The appropriate fractal theory is presented and Julia sets are built using the Barnsley method.

Agradecimientos

Primero que todo, quiero agradecer a Dios por haberme mostrado el camino que me permite experimentar lo hermoso de la vida, y por brindarme la fuerza necesaria para seguir adelante. Le agradezco a mi familia, por el apoyo incondicional en todo momento, en especial a mis padres: Libardo Vilorio, mi padre, por sus valiosos consejos y palabras de aliento, que me han permitido crecer en todos los aspectos, y Cledys Pérez, mi madre, por su paciencia, infinito amor y enseñarme que el sacrificio y el esfuerzo son los medios para tener éxito. Igualmente, agradezco a la Universidad de Córdoba que me brindó una educación de calidad, al plantel de profesores del Departamento de Matemáticas y Estadística, que me mostraron el hermoso universo de las matemáticas, y a mi asesor, Luis Enrique Benítez Babilonia, por sus valiosas enseñanzas y dedicada atención frente a este trabajo. Por último, quiero agradecer a todas aquellas personas que de una u otra forma me ofrecieron su ayuda en este recorrido, a esas personas que me apoyaron en momentos de crisis, a mis compañeros y colegas con quienes compartí todos estos años; en particular, a personas como Larry Flores, Jean Carlos Sánchez, Duban Benítez, Jesús Javier Soto y Daniel Coy, quienes más que compañeros o amigos, han sido hermanos y les agradezco por haberme acompañado en este gran proyecto.

Montería, Colombia

Mario Luis Vilorio Pérez

Febrero de 2023

Índice general

Resumen	<i>iv</i>
Abstract	<i>v</i>
Introducción	1
1. Preliminares	4
1.1. Algunos espacios métricos importantes y el Teorema del punto fijo de Banach	4
1.2. Espacios cociente	7
1.3. $(\mathcal{H}(X), d_H)$: el espacio donde viven los fractales	9
2. Sistemas iterados de funciones y obtención de fractales	19
2.1. Definición y características de un fractal	19
2.2. SIF y atractor del SIF	22
2.3. Función de direccionamiento y espacios de Cantor	29
2.4. Dimensiones de un fractal	38
3. Sistemas dinámicos y conjuntos de Julia	55
3.1. Sistemas dinámicos vs. SIF	56
3.2. Conjuntos de Julia	60
3.3. SIF y conjuntos de Julia	67
3.4. Propiedades notables	72
Bibliografía	76

Introducción

Este trabajo se centra, principalmente, en las áreas de los sistemas dinámicos complejos y la geometría fractal, las cuales son bastante amplias en su desarrollo. Su estudio formal es relativamente reciente, siendo la geometría fractal más joven en cuanto a su formulación; se trata de un nuevo lenguaje, por lo que establecer bases para su investigación es de mucha relevancia.

Es importante entender la naturaleza de los fractales, pues parecen adentrarse cada vez más en otras ciencias, desentrañando los misterios del infinito matemático, que desde tiempos tan antiguos como la matemática misma, ha permanecido a nuestro lado como un enigma incomprensible, hasta la llegada de George Cantor, quien nos mostró como contarlo. Sin embargo, tras los descubrimientos realizados a mediados del siglo XIX y principio del siglo XX, por matemáticos como Karl Weierstrass, con **las funciones continuas y nunca diferenciables**; George Cantor, con **el conjunto de Cantor**; Von Koch, con **la curva de Koch**; y Waclaw Sierpiński, con **el triángulo de Sierpiński**, la comunidad científica del momento no se sentía conforme, pues dichos objetos no parecían ser aplicables y estaban fuera de los límites que disponía la geometría, de hecho, se les catalogaba como patologías o monstruos matemáticos. No fue hasta que las contribuciones de Felix Hausdorff, las cuales nos permiten tener una idea de medida de estos objetos, y las publicaciones de Gaston Julia y Pierre Fatou, sobre la dinámica compleja, que este tipo de objetos empezaron a producir interés científico. Poco después, con el asentamiento del ordenador, empiezan a aparecer teorías formales y rigurosas sobre estos conjuntos.

Los fractales nos ayudan a comprender fenómenos que ciertamente rigen nuestro vivir. En los efectos visuales, en el arte, en la música, en la biología, en los modelos

poblacionales, etc; ellos han dado con la respuesta a situaciones que hace poco parecían cosas del azar. En particular, los conjuntos de Julia, resultan de mucha utilidad no solo para ejemplificar la geometría fractal, sino también para fomentar el estudio de áreas como la teoría del caos, el análisis matemático, los sistemas dinámicos, la topología, entre otras. En relación con lo anterior, el matemático estadounidense Robert Luke Devaney formuló una definición simple y ampliamente utilizada de sistema dinámico caótico, la cual enuncia que un sistema dinámico denotado por el par $\{(X, d), f\}$, donde $f : X \rightarrow X$ es una función y (X, d) un espacio métrico, se dice caótico si: es transitivo, sensible a las condiciones iniciales y el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X . Aunque no se analizarán las características y consecuencias de esta definición, se hará la debida mención para intuir la demostración de que una función polinómica compleja es caótica en su conjunto de Julia.

Al estudiar los conjuntos de Julia, se acostumbra a enfocarse en los polinomios complejos debido la gran gama de fenómenos dinámicos que se presentan allí, así que para no desviarnos del contexto de este trabajo, también nos centraremos en funciones polinómicas complejas. Sin embargo, con modificaciones menores, esta teoría puede generalizarse a funciones racionales y, en gran parte, a cualquier función holomorfa. En las siguientes figuras se muestra lo complejo, exótico y, al mismo tiempo, la belleza de estos conjuntos.

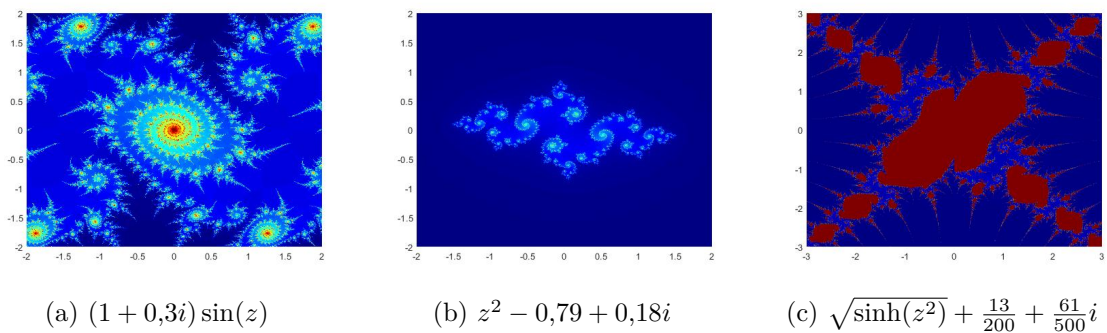


Figura 1: Conjuntos de Julia para diferentes funciones complejas.

El trato con la mayoría de los fractales descritos en este trabajo se hace en $\mathbb{R}^n$, lo cual nos lleva a hacer estudios basados en el análisis. Las primeras consideraciones

e inclusiones a la investigación fueron hechas por el matemático polaco Benoît Mandelbrot (1924–2010), quien descubrió que todos estos conjuntos u objetos naturales poseen “autosemejanza”, esto es, poseen la propiedad de que una pequeña sección suya puede ser vista como una replica, a menor escala, de sí mismo, y también una “dimensión extraña” no entera. En esta ocasión, utilizaremos la definición de autosemejanza propuesta por Michael Fielding Barnsley, basada en ciertas estructuras a las que denomina Sistema Iterado de Funciones, que nos ayudan en la construcción de fractales y nos permiten, bajo ciertas condiciones, obtener conjuntos de Julia.

En el Capítulo 1 nos interesamos en exponer algunos conceptos y resultados básicos con relación a los espacios métricos y los espacios cocientes, haciendo especial énfasis en cierto espacio métrico, que junto con el teorema del punto fijo de Banach, serán las bases para la comprensión de esta monografía.

Para el Capítulo 2, entramos al mundo de los fractales. Se muestra una forma rigurosa de obtenerlos y analizamos su funcionamiento con ejemplos tanto analíticos como visuales, así como también características arraigadas a la autosemejanza y a las dimensiones que podemos definir sobre ellos.

Finalmente, para el Capítulo 3, iniciamos con varios conceptos sobre los sistemas dinámicos discretos, necesarios para poder dar una definición estándar de lo que es un conjunto de Julia. Adicionalmente, se introducen varios ejemplos que nos ayudan a intuir el proceso de obtención de los conjuntos de Julia a través de un SIF, como también su relación con la teoría del caos. Luego, para dotar de algunas propiedades a los conjuntos de Julia, enunciamos una definición alterna basada en conceptos de la teoría del análisis complejo; más precisamente, en las familias normales de funciones, complementando con ejemplos e imágenes desarrolladas en el entorno de Matlab. Por último, demostramos el resultado principal que proporciona el conjunto de Julia de un polinomio complejo, mediante un SIF, para posteriormente ofrecer algunas propiedades con relación a ello.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo nos interesamos en presentar algunas definiciones y resultados que son estudiados en cursos básicos del análisis matemático y la topología. Estos conceptos son de mucha importancia para el desarrollo formal de una teoría acertada sobre los fractales. Para no extendernos demasiado, no se incluirán todas las demostraciones; no obstante, se sugiere consultar en [1, 5, 23, 24, 26, 29], para una mejor exploración de los temas expuestos.

1.1. Algunos espacios métricos importantes y el Teorema del punto fijo de Banach

Para tener constancia de los espacios métricos definidos en esta sección, iniciamos formalizando el concepto de distancia.

Definición 1.1.1 (Espacio métrico). Un espacio métrico es un par de la forma (X, d) , donde X es un conjunto no vacío y d es una función de $X \times X$ en $\mathbb{R}$ tal que para todo $p, q, r \in X$, se cumple lo siguiente:

(M1) Si $p \neq q$, $d(p, q) > 0$. Además, $d(p, p) = 0$;

(M2) $d(p, q) = d(q, p)$;

(M3) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$.

Cualquier función con las tres propiedades anteriores se llama **función distancia** o **métrica**. Si dicha función se restringe a $S \times S$, donde $S \subseteq X$, se dice que S es un **subespacio métrico** de X .

Para referirnos al espacio métrico (X, d) , escribiremos solo X . Por tanto, a menos que se diga lo contrario, d será una métrica para X .

Ejemplo 1. A continuación presentamos cuatro ejemplos de espacios métricos

1. Sea n un entero positivo. El conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}; i \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

con la distancia definida por

$$d_u(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \text{ donde } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ e } y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

llamada **distancia usual** o **euclidiana** sobre $\mathbb{R}^n$, forman el espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d_u)$, llamado **espacio euclídeo de n dimensiones**.

2. Sobre la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, se define la métrica

$$d_{\hat{\mathbb{C}}}(z, w) := \arccos \left(1 - \frac{1}{2} [d_u(\Pi(z) - \Pi(w))]^2 \right),$$

donde Π es la proyección estereográfica. Esta es llamada **distancia esférica** u **ortodrómica**. Luego, $(\hat{\mathbb{C}}, d_{\hat{\mathbb{C}}})$ es un espacio métrico.

3. En cualquier conjunto X no vacío, se puede definir la siguiente métrica:

$$d_0(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Esta es llamada **métrica discreta**, de modo que (X, d_0) es llamado **espacio métrico discreto**.

4. Sean N un entero positivo fijo y $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$. Se define el **espacio de los códigos**, denotado $\Sigma^{\mathbb{N}}$, como el conjunto

$$\Sigma^{\mathbb{N}} := \{x = x_1 x_2 x_3 \cdots : x_i \in \Sigma; i \in \mathbb{N}\}.$$

A cada elemento $x = x_1x_2x_3\cdots$ en $\Sigma^{\mathbb{N}}$ lo llamaremos **código** y a cada valor x_i se le dirá **componente del código** (o solo **componente**). Además, por el criterio de comparación para series, la función $d_c : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_c(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}, \text{ para todo par de códigos } x, y \in \Sigma^{\mathbb{N}}, \quad (1.1)$$

siempre converge y define una métrica sobre $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

La siguiente es una propiedad importante en el espacio métrico $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$.

Proposición 1.1.1. Sea $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$. Si $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots$ y $\beta = \beta_1\beta_2\cdots$ son códigos en $\Sigma^{\mathbb{N}}$, entonces $d_c(\alpha, \beta) < \frac{1}{(N+1)^k}$, para algún $k \in \mathbb{N}$ si, y solo si, $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Demostración. Sean $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots$ y $\beta = \beta_1\beta_2\cdots$ códigos. En primer lugar, supongamos que $d_c(\alpha, \beta) < \frac{1}{(N+1)^k}$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Si existe i_0 , con $1 \leq i_0 \leq k$, tal que $\alpha_{i_0} \neq \beta_{i_0}$, entonces

$$d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} \geq \frac{|\alpha_{i_0} - \beta_{i_0}|}{(N+1)^{i_0}}.$$

Pero $1 \leq |\alpha_{i_0} - \beta_{i_0}| \leq N$, lo cual indica que

$$d_c(\alpha, \beta) \geq \frac{|\alpha_{i_0} - \beta_{i_0}|}{(N+1)^{i_0}} \geq \frac{1}{(N+1)^{i_0}} \geq \frac{1}{(N+1)^k}.$$

Esto contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $\alpha_i = \beta_i$, para cada $i = 1, 2, \dots, k$.

Para la otra implicación, supongamos que $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Dado que $|\alpha_i - \beta_i| < N$, para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^i} = \frac{1}{(N+1)^k}.$$

Es decir, $d_c(\alpha, \beta) < \frac{1}{(N+1)^k}$, lo cual termina la prueba. $\square$

Es importante señalar que el espacio métrico $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$, definido como el espacio de los códigos, posee la particularidad de ser compacto, totalmente desconexo y perfecto. De hecho, más adelante se mostrará que posee características fractales.

A continuación, vamos a enunciar el teorema del punto fijo de Banach. Para ello es necesario reconocer algunos conceptos que tomarán relevancia en resultados

posteriores; a saber, un espacio métrico X es **completo**, si toda sucesión de Cauchy en X , converge en X . También, una función $f : X \rightarrow X$ es llamada **contracción**, si es lipschitziana con constante de Lipschitz $k \in [0, 1)$. Además, cualquier constante $r \in [k, 1)$ la llamaremos **factor de contracción**. Finalmente, si existe $r > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) = rd(x, y)$ para todo $x, y \in X$, decimos que f es una **similaridad** con **factor de escala** r .

Teorema 1.1.2 (Teorema del punto fijo). Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces, la función f tiene un único punto fijo $p \in X$, es decir, $f(p) = p$. Además, para cualquier $x \in X$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = p$, donde $f^{\circ n}(x)$ representa la n -ésima composición iterada.

Demostración. Véase [1], página 112. □

El **Teorema del punto fijo** o **principio de contracción de Banach** es de gran importancia para la teoría fractal, pues garantiza la existencia y unicidad de los fractales obtenidos por medio de ciertas familias de funciones.

1.2. Espacios cociente

Con respecto al concepto de espacio topológico, denotado por $(X, \mathcal{T}_X)$, y otros temas relacionados, puede encontrar información significativa en [23]. Para esta parte del capítulo recordemos que dado un espacio métrico X , la colección de todas las bolas abiertas $B_d(x, \epsilon)^1$, con $x \in X$ y $\epsilon > 0$, determina una base para una topología sobre X denominada la **topología métrica** inducida por d .

Pasamos directamente a definir conceptos relacionados a la topología cociente.

Definición 1.2.1. Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función sobreyectiva. f se dice **función cociente** siempre que $U \in \mathcal{T}_Y$ si, y solo si, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Equivalentemente, f es una función cociente si cualquier subconjunto O de Y , es cerrado en Y si, y solo si, $f^{-1}(O)$ es cerrado en X .

¹Bolas abiertas: $B_d(x; \epsilon) = \{z \in X : d(x, z) < \epsilon\}$.

Definición 1.2.2. Dados los espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$, una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice **función abierta**, si para cada $U \in \mathcal{T}_X$, se tiene que $f(U) \in \mathcal{T}_Y$. Se dice que f es una **función cerrada** si para cada conjunto cerrado O de X , el conjunto $f(O)$ es cerrado en Y .

De las definiciones anteriores concluimos que si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, sobreyectiva que es abierta o cerrada, entonces f es una función cociente.

La familia de conjuntos $\mathcal{T}_f$ que se define a continuación es una topología.

Definición 1.2.3. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva. Entonces la colección $\mathcal{T}_f$ de subconjuntos de Y definida por $\mathcal{T}_f = \{G \subseteq Y : f^{-1}(G) \text{ es abierto en } X\}$, es una topología en Y llamada **topología cociente** inducida por f en Y . Cuando Y está dotada con esta topología, este es llamado **espacio cociente de X** .

Como caso especial, digamos que $X^* = \{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una partición de $(X, \mathcal{T}_X)$ y definamos $f : X \longrightarrow X^*$ tal que $f(x) = A_\alpha$, si $x \in A_\alpha$; esta función será llamada **función de descomposición**. Entonces, hay una relación de equivalencia sobre X en la que los elementos de X^* son clases de equivalencia, de modo que un subconjunto U de X^* es una colección de clases de equivalencia y $f^{-1}(U)$ es la unión de las clases de equivalencia que pertenecen a U . Luego, si U es un abierto de X^* , su unión es un abierto de X .

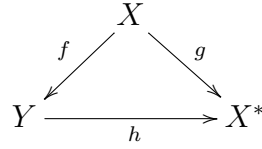
Definición 1.2.4. Si una partición X^* del espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ está dotada de la topología en la que $A \subseteq X^*$ es abierto si, y solo si, $\bigcup\{B : B \in A\}$ es abierto en X , entonces X^* es llamado un **espacio de descomposición de X** .

Con lo anterior, se obtiene que la topología en un espacio de descomposición X^* de X , coincide con la topología cociente inducida por la función de descomposición $f : X \longrightarrow X^*$.

Proposición 1.2.1. Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función continua y sobreyectiva. Sea X^* el espacio de descomposición de X cuyos elementos son los conjuntos $f^{-1}(\{y\})$, con $y \in Y$. Entonces, existe un homeomorfismo $h : Y \longrightarrow X^*$ tal que

$g = h \circ f$ es la función de descomposición de X en X^* si, y solo si, f es una función cociente.

Demostración. Véase [23], Página 142. □



Podemos concluir entonces que todo espacio de descomposición es un espacio cociente y viceversa. Esto implica que dichos espacios son homeomorfos.

1.3. $(\mathcal{H}(X), d_H)$: el espacio donde viven los fractales

A continuación, se presenta el espacio métrico, denominado por M. Barnsley como “el espacio donde viven los fractales”. Este espacio proporciona herramientas importantes para el estudio de dichos objetos, por ejemplo, es posible establecer propiedades fractales gracias a su completitud.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio métrico. Denotamos por $\mathcal{H}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X , es decir:

$$\mathcal{H}(X) := \{K \subseteq X : K \text{ es compacto, } K \neq \emptyset\}.$$

Usando conceptos básicos del análisis, se muestra que las distancias definidas a continuación siempre existen.

Definición 1.3.2. Sean X un espacio métrico, $a \in X$ y $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Se define la distancia del punto a al conjunto A y la distancia entre los conjuntos A y B , respectivamente, como:

$$\text{dist}(a, A) := \min\{d(a, x) : x \in A\} \quad \text{y} \quad \bar{d}(A, B) := \max\{\text{dist}(x, B) : x \in A\}.$$

Cabe resaltar que en general $\bar{d}$ no cumple con $\bar{d}(A, B) = \bar{d}(B, A)$, lo cual indica que no es una métrica. Sin embargo, debido a ciertas propiedades del máximo y el mínimo, se logra satisfacer lo siguiente:

- i. Si $A, B \in \mathcal{H}(X)$, entonces $A \subseteq B$ si, y solo si, $\bar{d}(A, B) = 0$;
- ii. $\bar{d}(A, B) \leq \bar{d}(A, C) + \bar{d}(C, B)$ para todo $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$;
- iii. $\bar{d}(A \cup B, C) = \max\{\bar{d}(A, C), \bar{d}(B, C)\}$.

Definición 1.3.3. Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Se define el valor $d_H(A, B)$ como lo siguiente:

$$d_H(A, B) := \max\{\bar{d}(A, B), \bar{d}(B, A)\}.$$

Proposición 1.3.1. $d_H(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{d_H(A, C), d_H(B, D)\}$ para todo A, B, C y D en $\mathcal{H}(X)$.

Demostración. Sean $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$. Teniendo en cuenta las propiedades de $\bar{d}$, se tiene, en primer lugar, que:

$$\begin{aligned}\bar{d}(A, C \cup D) &\leq \bar{d}(A, C) + \bar{d}(C, C \cup D) = \bar{d}(A, C); \\ \bar{d}(B, C \cup D) &\leq \bar{d}(B, D) + \bar{d}(D, C \cup D) = \bar{d}(B, D); \\ \bar{d}(C, A \cup B) &\leq \bar{d}(C, A) + \bar{d}(A, A \cup B) = \bar{d}(C, A); \\ \bar{d}(D, A \cup B) &\leq \bar{d}(D, B) + \bar{d}(B, A \cup B) = \bar{d}(D, B).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}d_H(A \cup B, C \cup D) &= \max\{\bar{d}(A \cup B, C \cup D), \bar{d}(C \cup D, A \cup B)\} \\ &= \max\left\{\max\{\bar{d}(A, C \cup D), \bar{d}(B, C \cup D)\}, \max\{\bar{d}(C, A \cup B), \bar{d}(D, A \cup B)\}\right\} \\ &= \max\{\bar{d}(A, C \cup D), \bar{d}(B, C \cup D), \bar{d}(C, A \cup B), \bar{d}(D, A \cup B)\} \\ &\leq \max\{\bar{d}(A, C), \bar{d}(B, D), \bar{d}(C, A), \bar{d}(D, B)\} \\ &= \max\left\{\max\{\bar{d}(A, C), \bar{d}(C, A)\}, \max\{\bar{d}(B, D), \bar{d}(D, B)\}\right\} \\ &= \max\{d_H(A, C), d_H(B, D)\}.\end{aligned}$$

Por tanto, $d_H(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{d_H(A, C), d_H(B, D)\}$. □

Teorema 1.3.2. Sea X un espacio métrico. Entonces d_H es una métrica sobre $\mathcal{H}(X)$.

Demostración. Sean $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$. Por definición de d_H , si $A \neq B$, se tiene que $d_H(A, B) > 0$ y $d_H(A, B) = d_H(B, A)$. Veamos que $d_H(A, B) = 0$ si, y solo si,

$A = B$. Supongamos primero que $d_H(A, B) = 0$ y tomemos $x \in A$ arbitrario. Entonces $\bar{d}(A, B) = \bar{d}(B, A) = 0$, lo cual indica que $\max\{\text{dist}(a, B) : a \in A\} = 0$. Luego, existe $a_0 \in A$ tal que $\text{dist}(a_0, B) = 0$, de modo que $\text{dist}(x, B) \leq \text{dist}(a_0, B) = 0$. Así, $\text{dist}(x, B) = 0$ y, en consecuencia, existe $b_0 \in B$ tal que $\text{dist}(x, B) = \text{dist}(x, b_0) = 0$. Concluimos finalmente que $x = b_0 \in B$, mostrando la contención $A \subseteq B$. Se prueba de manera análoga que $B \subseteq A$.

Recíprocamente, supongamos que $A = B$ y digamos, sin pérdida de generalidad, que $d_H(A, B) = \bar{d}(A, B)$. Como $A \subseteq B$, se tiene que $d_H(A, B) = \bar{d}(A, B) = 0$. Luego, d_H satisface las condiciones $M1$ y $M2$. Para verificar $M3$, tengamos en cuenta que $\bar{d}(A, B) \leq \bar{d}(A, C) + \bar{d}(C, B)$ y $\bar{d}(B, A) \leq \bar{d}(B, C) + \bar{d}(C, A)$, para obtener

$$\max\{\bar{d}(A, B), \bar{d}(B, A)\} \leq \max\{\bar{d}(A, C), \bar{d}(C, A)\} + \max\{\bar{d}(C, B), \bar{d}(B, C)\},$$

esto es, $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(B, C)$. □

La métrica d_H es llamada **métrica de Hausdorff** y el espacio métrico $(\mathcal{H}(X), d_H)$ será conocido como el espacio donde viven los fractales, el cual expresaremos simplemente por $\mathcal{H}(X)$.

Los conceptos y resultados mostrados a continuación serán de utilidad para obtener la completez de $\mathcal{H}(X)$.

Definición 1.3.4. Sean X un espacio métrico, $A \in \mathcal{H}(X)$ y $\epsilon > 0$. Se define la **nube abierta** y la **nube cerrada**, ambas con centro A y radio ϵ , respectivamente como los conjuntos:

$$N(A; \epsilon) := \{x \in X : \text{dist}(x, A) < \epsilon\} \quad \text{y} \quad \bar{N}(A; \epsilon) := \{x \in X : \text{dist}(x, A) \leq \epsilon\}.$$

Proposición 1.3.3. Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$ y $\epsilon > 0$. Entonces:

- i. $N(A; \epsilon)$ es abierto en $\mathcal{H}(X)$ y $\bar{N}(A; \epsilon)$ es cerrado en $\mathcal{H}(X)$;
- ii. $d_H(A, B) < \epsilon$ si, y solo si, $A \subseteq N(B; \epsilon)$ y $B \subseteq N(A; \epsilon)$;
- iii. $d_H(A, B) \leq \epsilon$ si, y solo si, $A \subseteq \bar{N}(B; \epsilon)$ y $B \subseteq \bar{N}(A; \epsilon)$.

Lema 1.3.4 (Lema de Extensión). Sean $\{A_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ y $\{n_j\}_j$ una sucesión creciente de naturales. Suponga que $\{x_{n_j}\}_j$ es una sucesión de Cauchy en X tal que $x_{n_j} \in A_{n_j}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Entonces existe una sucesión de Cauchy en X , $\{\bar{x}_n\}_n$, tal que $\bar{x}_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bar{x}_{n_j} = x_{n_j}$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Demostración. Construyamos la sucesión $\{\bar{x}_n\}_n$, como sigue: para cada $1 \leq n \leq n_1$, elijamos $\bar{x}_n \in A_n$ de tal manera que $\text{dist}(x_{n_1}, A_n) = d(x_{n_1}, \bar{x}_n)$. Ahora, consideremos $j \in \{2, 3, \dots\}$. Para cada $n \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$, tomemos $\bar{x}_n \in A_n$ tal que $\text{dist}(x_{n_j}, A_n) = d(x_{n_j}, \bar{x}_n)$; la existencia de cada $\bar{x}_n$ se debe a la compacidad de A_n . Bajo esta construcción, observe que $\bar{x}_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bar{x}_{n_j} = x_{n_j}$, para cada $j \in \mathbb{N}$, con lo cual, solo resta mostrar que $\{\bar{x}_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, sea $\epsilon > 0$. dado que $\{x_{n_j}\}_j$ es de Cauchy en X , existe $N_1 > 0$ tal que $n_k, n_j \geq N_1$ implica $d(x_{n_k}, x_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3}$. Por otra parte, como $\{A_n\}_n$ es de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$, existe $N_2 > 0$ tal que $m, n \geq N_2$ implica $d_H(A_m, A_n) < \frac{\epsilon}{3}$ y, por Proposición 1.3.3, se tendría que $A_n \subseteq N(A_m; \frac{\epsilon}{3})$ y $A_m \subseteq N(A_n; \frac{\epsilon}{3})$.

Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$, de modo que si $m, n \geq N$, entonces

$$d(\bar{x}_m, \bar{x}_n) \leq d(\bar{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \bar{x}_n),$$

donde $m \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$ y $n \in \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$ para algunos $j, k \geq 2$. También se tiene que $d_H(A_m, A_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3}$, así que $x_{n_j} \in N(A_m; \frac{\epsilon}{3})$ y con ello, $d(x_{n_j}, \bar{x}_m) < \frac{\epsilon}{3}$. De igual modo, $d(x_{n_k}, \bar{x}_n) < \frac{\epsilon}{3}$. Por lo tanto, $d(\bar{x}_m, \bar{x}_n) < \epsilon$, para cada $m, n \geq N$, lo cual termina la prueba. $\square$

En adelante, dada una sucesión $\{x_n\}_n$ en cualquier espacio métrico X , la expresión $x_n \rightarrow x$ tendrá el mismo significado que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Veamos finalmente el resultado central de esta sección, el cual nos ofrece la equivalencia entre la completez de $\mathcal{H}(X)$ y la completez de X .

Teorema 1.3.5. Sea X un espacio métrico. Entonces $\mathcal{H}(X)$ es completo si, y solo si, X es completo. Además, si $\{A_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ y $A_n \rightarrow A$, entonces A se puede caracterizar de la siguiente forma:

$$A = \{x \in X : \text{existe una sucesión } \{x_n\}_n \text{ en } X, \text{ con } x_n \rightarrow x \text{ y } x_n \in A_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{H}(X)$ es completo y mostremos que X es completo. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en X . Dado que cada conjunto de la forma $\{x_n\}$ es compacto y no vacío, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{\{x_n\}\}_n$ es una sucesión en $\mathcal{H}(X)$. Podemos notar que

$$d_H(\{x_n\}, \{x_m\}) = \bar{d}(\{x_n\}, \{x_m\}) = \text{dist}(x_n, \{x_m\}) = d(x_n, x_m),$$

por lo que $\{\{x_n\}\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$. Por hipótesis, existe un conjunto $B \in \mathcal{H}(X)$ tal que $\{\{x_n\}\} \rightarrow B$; esto es, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $d_H(B, \{x_n\}) < \frac{\epsilon}{2}$. Por otro lado, sean $b_0, b_1 \in B$ y tenga en cuenta que

$$\bar{d}(B, \{x_n\}) = \text{máx}\{\text{dist}(b, \{x_n\}) : b \in B\} = \text{máx}\{d(b, x_n) : b \in B\}.$$

De este modo, si $n \geq N$, entonces

$$d(b_0, b_1) \leq d(b_0, x_n) + d(b_1, x_n) \leq 2\bar{d}(B, \{x_n\}) \leq 2d_H(B, \{x_n\}) < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Luego, $b_0 = b_1$, así que B debe ser un conjunto unitario, digamos $B = \{b_0\}$.

En conclusión, para todo $\epsilon > 0$, si $n \geq N$, obtenemos que

$$d(x_n, b_0) = d_H(\{x_n\}, \{b_0\}) = d_H(\{x_n\}, B) < \epsilon.$$

De donde, $x_n \rightarrow b_0$, mostrando que X es completo.

De manera recíproca, supongamos que X es completo y mostremos que $\mathcal{H}(X)$ es completo. Sea $\{A_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ y definamos A como en el enunciado. Dividamos la prueba en los siguientes cinco pasos.

Paso 1: $A \neq \emptyset$. El hecho de que la sucesión $\{A_n\}_n$ es de Cauchy, nos permite escoger una sucesión creciente de naturales, $N_1 < N_2 < \dots < N_i < \dots$, tales que: para cada $i \in \mathbb{N}$, si $m, n \geq N_i$, entonces $d_H(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i}$. Debido a esto, tenemos $d_H(A_{N_1}, A_{N_2}) < \frac{1}{2}$, lo cual indica que $A_{N_1} \subseteq N(A_{N_2}; \frac{1}{2})$ y así, si $x_{N_1} \in A_{N_1}$, entonces $\text{dist}(x_{N_1}, A_{N_2}) < \frac{1}{2}$. Luego, existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) < \frac{1}{2}$. Asimismo, como $d_H(A_{N_2}, A_{N_3}) < \frac{1}{2^2}$, entonces $A_{N_2} \subseteq N(A_{N_3}; \frac{1}{2^2})$, por lo que debe existir $x_{N_3} \in A_{N_3}$ tal que $d(x_{N_2}, x_{N_3}) < \frac{1}{2^2}$. Siguiendo sucesivamente este proceso, obtenemos una sucesión $\{x_{N_i}\}_i$, con $x_{N_i} \in A_{N_i}$, tal que $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) < \frac{1}{2^i}$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $N_m \leq N_n$. Entonces

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \cdots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) \\ &< \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

De este modo, para todo $\epsilon > 0$, existe $N_{m_0} \in \mathbb{N}$ tal que $N_n \geq N_m \geq N_{m_0}$ implica

$$d(x_{N_m}, x_{N_n}) \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon.$$

Esto muestra que la sucesión $\{x_{N_i}\}_i$ es de Cauchy en X y además, $x_{N_i} \in A_{N_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por Lema 1.3.4, existe una sucesión $\{\bar{x}_n\}_n$ en X , la cual es de Cauchy, $\bar{x}_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y también, $\bar{x}_{N_i} = x_{N_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. La completez de X permite encontrar $x \in X$ tal que $\bar{x}_n \rightarrow x$, concluyendo que $x \in A$.

Paso 2: A es cerrado en X . Para mostrar esto, veamos que $\bar{A} \subseteq A$. En efecto, sea $a \in \bar{A}$. Entonces, existe una sucesión en A , digamos $\{a_k\}_k$, tal que $a_k \rightarrow a$. Por definición de A , para cada $a_k \in A$ existe una sucesión $\{x_n^k\}_n$, con $x_n^k \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x_n^k \rightarrow a_k$. Note que los términos de la sucesión $\{x_n^k\}_n$ son $\{\{x_n^1\}_n, \{x_n^2\}_n, \dots, \{x_n^i\}_n, \dots\}$, donde $\{x_n^i\}_n = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, \dots\}$ es una sucesión que tiende a a_i , para cada $i \in \mathbb{N}$. Dado que $a_k \rightarrow a$, es posible encontrar una sucesión creciente de naturales, digamos que son $N_1 < N_2 < \cdots < N_i < \cdots$, tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}$. También, como $x_n^{N_i} \rightarrow a_{N_i}$, existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{m_i}^{N_i}, a_{N_i}) < \frac{1}{i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $\epsilon > 0$. Es claro que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $i \geq M$ implica $\frac{2}{i} < \epsilon$. Por lo tanto, si $i \geq \max\{M, m_i\}$, obtenemos que

$$d(x_{m_i}^{N_i}, a) \leq d(x_{m_i}^{N_i}, a_{N_i}) + d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i} + \frac{1}{i} = \frac{2}{i} < \epsilon.$$

Esto muestra que la sucesión $\{x_{m_i}^{N_i}\}_i$ converge hacia a . Definamos $y_{m_i} := x_{m_i}^{N_i}$, de modo que $y_{m_i} \in A_{m_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $y_{m_i} \rightarrow a$. Luego, $\{y_{m_i}\}_i$ es una sucesión de Cauchy en X . Por Lema 1.3.4, existe una sucesión de Cauchy, $\{\bar{y}_m\}_m$, tal que $\bar{y}_m \in A_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\bar{y}_{m_i} = y_{m_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como X es completo, $\{\bar{y}_m\}_m$ debe ser convergente y dado que $y_{m_i} \rightarrow a$, debe ocurrir que $\bar{y}_m \rightarrow a$. De donde, $a \in A$.

Paso 3: Veamos que para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $A \subseteq \bar{N}(A_n; \epsilon)$. Sea $\epsilon > 0$. Como $\{A_n\}_n$ es de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

si $m, n \geq N_1$, entonces $d_H(A_n, A_m) \leq \epsilon$, de lo cual se tiene, por la Proposición 1.3.3, que $A_m \subseteq \bar{N}(A_n; \epsilon)$. Si tomamos $a \in A$, existe una sucesión $\{a_k\}_k$ tal que $a_k \rightarrow a$ y $a_k \in A_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por ende, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N_2$ implica $d(a_m, a) < \epsilon$.

Consideremos $N = \max\{N_1, N_2\}$, para que $\{a_{N+i}\}_i$ sea una sucesión en $\bar{N}(A_n; \epsilon)$ que converge hacia a , ya que para cada $m \geq N$, se sigue $A_m \subseteq \bar{N}(A_n; \epsilon)$. Esto último indica que $a \in \overline{\bar{N}(A_n; \epsilon)}$; pero $\bar{N}(A_n; \epsilon)$ es cerrado en $\mathcal{H}(X)$, lo cual implica que $a \in \bar{N}(A_n; \epsilon)$. Así, para $n \geq N$, obtenemos $A \subseteq \bar{N}(A_n; \epsilon)$.

Paso 4: $A \in \mathcal{H}(X)$. Por (1) y (2), solo será necesario mostrar que A es totalmente acotado². Supongamos lo contrario, es decir, existe $\epsilon > 0$ para el cual no existe cubrimiento finito, compuesto por bolas abiertas de radio ϵ , que recubra a A . Sea $x_1 \in A$, tal que $A \not\subseteq B_d(x_1; \epsilon)$, luego existe $x_2 \in A$ tal que $d(x_1, x_2) \geq \epsilon$. Del mismo modo, dado que $A \not\subseteq B_d(x_1; \epsilon) \cup B_d(x_2; \epsilon)$, existe $x_3 \in A$ tal que $d(x_3, x_1) \geq \epsilon$ y $d(x_3, x_2) \geq \epsilon$. De esta manera, se construye una sucesión $\{x_n\}_n$ de elementos de A tal que $d(x_m, x_k) \geq \epsilon$, para todo $m \neq k$. Por (3), existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq \bar{N}(A_{N_1}; \frac{\epsilon}{3})$, de modo que para todo $x_n \in A$, existe $y_n \in A_{N_1}$ tal que $d(x_n, y_n) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Al ser A_{N_1} compacto, existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}_k$ de $\{y_n\}_n$, que converge en A_{N_1} , lo cual indica que es de Cauchy y, por tanto, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $i, j \geq N_2$ implica $d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3}$. Así, si $i, j \geq N_2$, se tiene que

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

lo cual contradice la forma como fue construida la sucesión $\{x_n\}_n$.

Paso 5: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Teniendo en cuenta (4) y la Proposición 1.3.3, basta con mostrar que: para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $A_n \subseteq \bar{N}(A; \epsilon)$. En efecto, sea $\epsilon > 0$. Como $\{A_n\}_n$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$ implica $d_H(A_m, A_n) \leq \frac{\epsilon}{2}$; en particular, si $n, m \geq N$, entonces $A_n \subseteq \bar{N}(A_m; \frac{\epsilon}{2})$. En este orden de ideas, podemos escoger $N < N_1 < N_2 < \dots < N_j < \dots$, una sucesión creciente de

²Todo subconjunto de un espacio métrico completo es compacto si, y solo si, es cerrado y totalmente acotado.

naturales tal que $A_n \subseteq \bar{N}(A_m; \frac{\epsilon}{2^{k+1}})$, para cada $m, n \geq N_k$, con lo cual,

$$A_n \subseteq \bar{N}\left(A_{N_1}; \frac{\epsilon}{2}\right), \quad A_{N_1} \subseteq \bar{N}\left(A_{N_2}; \frac{\epsilon}{2^2}\right), \quad A_{N_2} \subseteq \bar{N}\left(A_{N_3}; \frac{\epsilon}{2^3}\right), \dots$$

Dado $y \in A_n$, existe $x_{N_1} \in A_{N_1}$ tal que $d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Como $x_{N_1} \in A_{N_1}$, existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\epsilon}{2^2}$. De manera similar, utilizamos inducción para conseguir una sucesión $\{x_{N_k}\}_k$ tal que $d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$ y $x_{N_k} \in A_{N_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Tenemos, entonces, que

$$d(y, x_{N_k}) \leq d(y, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_{N_2}) + \dots + d(x_{N_{k-1}}, x_{N_k}) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \dots + \frac{\epsilon}{2^k} < \epsilon,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Además, note que $\{x_{N_k}\}_k$ es una sucesión de Cauchy, por ende, $x_{N_k} \rightarrow x$ para algún $x \in X$, pues X es completo. También, $x \in A$.

Finalmente, veamos que $d(y, x) \leq \epsilon$. Si $d(y, x) > \epsilon$, entonces $d(y, x) - \epsilon > 0$. Como $x_{N_k} \rightarrow x$, existe $M > 0$ tal que $N_k > M$ implica $d(x_{N_k}, x) < d(y, x) - \epsilon$. Luego,

$$\epsilon < d(y, x) - d(x_{N_k}, x) \leq d(y, x_{N_k}) + d(x_{N_k}, x) - d(x_{N_k}, x) < \epsilon,$$

lo cual es una contradicción, concluyendo que $d(y, x) \leq \epsilon$. Se había afirmado que $x \in A$, entonces $y \in \bar{N}(A; \epsilon)$, por consiguiente, $A_n \subseteq \bar{N}(A; \epsilon)$, siempre que $n \geq N$. Esto completa la prueba de (5) y en consecuencia, $\mathcal{H}(X)$ es completo. $\square$

Para finalizar esta sección, presentamos algunos resultados que se derivan de los conceptos ya estudiados, los cuales serán de utilidad para el buen funcionamiento de los sistemas iterados de funciones.

Lema 1.3.6. Sean X un espacio métrico completo y $\{A_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ tal que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$. Entonces $A_n \rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Demostración. Consideremos A como en el Teorema 1.3.5. Por dicho resultado, $\mathcal{H}(X)$ es completo y $A_n \rightarrow A$. Veamos que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Si $x \in A$, existe una sucesión en X ,

$\{x_n\}_n$, tal que $x_n \rightarrow x$ y $x_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Debemos mostrar que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$; pero digamos lo contrario, es decir, supongamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin A_N$.

Como A_N es compacto, también se tiene que $x \notin \overline{A_N}$. Luego, existe $\epsilon > 0$ tal que

$B_d(x; \epsilon) \cap A_N = \emptyset$. Como $x_n \rightarrow x$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq M$ implica $d(x_n, x) < \epsilon$; en particular, tomando $P = \max\{N, M\}$, obtenemos $d(x_P, x) < \epsilon$ o, lo que es igual, $x_P \in B_d(x; \epsilon)$. Por hipótesis, $A_P \subseteq A_N$, y como $x_P \in A_P$, resulta que $x_P \in A_N$; contradicción, pues se había dicho que $B_d(x; \epsilon) \cap A_N = \emptyset$. Así pues, $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Recíprocamente, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que la sucesión $\{x_n\}_n$, donde $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (sucesión constante) cumple con las condiciones para que $x \in A$. por tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A$. $\square$

Lema 1.3.7. Sean X un espacio métrico completo y $\{A_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$. Entonces $A_n \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Una prueba similar a la del Lema 1.3.6 se tiene para el Lema 1.3.7, por lo que no será agregada.

Lema 1.3.8. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una contracción. Definimos la función $\hat{f} : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ por $\hat{f}(A) = f(A)$, para todo $A \in \mathcal{H}(X)$. Entonces $\hat{f}$ es una contracción en $\mathcal{H}(X)$.

Demostración. Teniendo en cuenta que toda contracción es continua y envía compactos en compactos, se tiene que $\hat{f}$ está bien definida. Como f es una contracción, existe $r \in [0, 1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Tenemos que

$$d_H(\hat{f}(A), \hat{f}(B)) = d_H(f(A), f(B)) = \max\{\bar{d}(f(A), f(B)), \bar{d}(f(B), f(A))\}.$$

Supongamos que $\bar{d}(f(A), f(B)) \geq \bar{d}(f(B), f(A))$. Entonces:

$$\begin{aligned} d_H(\hat{f}(A), \hat{f}(B)) &= \bar{d}(f(A), f(B)) = \max\{\min\{d(z, w) : z \in f(A)\} : w \in f(B)\} \\ &= \max\{\min\{d(f(a), f(b)) : a \in A\} : b \in B\} \\ &\leq \max\{\min\{rd(a, b) : a \in A\} : b \in B\} \\ &= r \max\{\min\{d(a, b) : a \in A\} : b \in B\} = r\bar{d}(A, B) \\ &\leq r \max\{\bar{d}(A, B), \bar{d}(B, A)\} = rd_H(A, B). \end{aligned}$$

Si $\bar{d}(f(A), f(B)) \leq \bar{d}(f(B), f(A))$, se procede de manera análoga. $\square$

Lema 1.3.9. Sean X un espacio métrico, $N \in \mathbb{N}$ fijo y $f_i : X \longrightarrow X$ contracciones en X , con $i = 1, 2, \dots, N$. Si se define $F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ por $F(A) = \bigcup_{i=1}^N f_i(A)$, para todo $A \in \mathcal{H}(X)$. Entonces F es una contracción en $\mathcal{H}(X)$. Además, si f_i tiene factor de contracción r_i , para cada $i = 1, 2, \dots, N$, entonces F tiene factor de contracción $r = \max\{r_i : i = 1, 2, \dots, N\}$.

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Observe que $f_i(A)$ es compacto para cada i en $\{1, 2, \dots, N\}$, y dado que la unión finita de compactos es compacto, F está bien definida. Sea r_i un factor de contracción de f_i , para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Entonces, por Proposición 1.3.1 y el Lema 1.3.8, obtenemos:

$$\begin{aligned} d_H(F(A), F(B)) &= d_H\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(A), \bigcup_{i=1}^N f_i(B)\right) \\ &\leq \max\{d_H(f_1(A), f_1(B)), d_H(f_2(A), f_2(B)), \dots, d_H(f_N(A), f_N(B))\} \\ &\leq \max\{r_1 d_H(A, B), r_2 d_H(A, B), \dots, r_N d_H(A, B)\} \\ &\leq r \max\{d_H(A, B)\} = r d_H(A, B), \end{aligned}$$

donde $r = \max\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$. □

Capítulo 2

Sistemas iterados de funciones y obtención de fractales

En este capítulo abordamos el estudio de uno de los métodos más usados para la construcción de fractales, los sistemas iterados de funciones. A partir de este método es posible extraer diversas propiedades topológicas, poco usuales en el contexto de los espacios métricos, las cuales empleamos para unificar, bajo un nombre común, a todos los fractales estudiados en este trabajo.

2.1. Definición y características de un fractal

En la actualidad los fractales son una herramienta matemática de gran importancia para el modelamiento de muchos fenómenos naturales que hasta hace poco se convirtieron en los pilares de una nueva y amplia rama de las matemáticas. Benoît Mandelbrot, quien en 1974 involucra estos objetos fractales en muchas ciencias, logra encontrar ciertos patrones presentes en diferentes contextos de la naturaleza, los cuales no podían ser descritos con exactitud por la matemática que existía en el momento. En 1980, Mandelbrot, con la publicación de su libro *The Fractal Geometry of Nature* [19] populariza la geometría fractal a nivel mundial, convirtiéndose en el punto de partida para muchos pensadores y científicos.

Es importante resaltar que debido a la gran gama de formas fractales existentes,

hoy en día no se cuenta con una definición formal de lo que es un fractal. Sin embargo, gracias a los trabajos de Mandelbrot y matemáticos como K. J. Falconer [14], J. E. Hutchinson [15] y M. S. Barnsley [5], entre otros, podemos definir dos características fundamentales que poseen muchos fractales, como la autosemejanza o autosimilitud y la dimensión fractal o dimensión de Hausdorff. Una de las definiciones más aceptadas, aunque no plenamente formal es la siguiente:

“Un fractal es un conjunto autosemejante y cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica”

Por la complejidad de estas características, pues son conceptos que presentan muchas aristas en la investigación, diremos que un conjunto A en un espacio métrico, es llamado fractal, si se puede evidenciar alguna de las siguientes:

- (1) Presenta alguna forma de autosimilitud, es decir, está conformado por copias de sí mismo en cualquier escala.
- (2) Posee una estructura “fina”: detalles en escalas arbitrariamente pequeñas.
- (3) Es demasiado irregular para ser descrito en el lenguaje geométrico tradicional, tanto local como globalmente.
- (4) Se obtiene por un procedimiento recursivo.
- (5) Su dimensión de Hausdorff es mayor que su dimensión topológica.

Algunos de los fractales clásicos más conocidos con estas características se construyen de manera geométrica como sigue:

Triángulo de Sierpiński. Consideremos una región triangular de $\mathbb{R}^2$, delimitada por un triángulo cualquiera y llamémosla T_0 . Se unen los puntos medios de los lados del triángulo, de tal manera que su interior queda dividido en cuatro nuevos triángulos, de los cuales eliminamos el triángulo central; llamemos T_1 a la figura resultante. En cada uno de los tres triángulos restantes se realiza la misma operación para obtener una figura con 3^2 triángulos interiores, el cual llamamos T_2 . Repetimos el proceso con los nueve triángulos para obtener 3^3 nuevos triángulos y así sucesivamente. Entonces, se tiene una sucesión de figuras $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ cuya “figura límite”, llamemosla $\mathbb{T}$, se le llama triángulo de Sierpiński (ver Fig. 2.1a).

La llamada figura límite puede ser obtenida formalmente como el límite de cierta

sucesión, como veremos en la siguiente sección. Sin embargo, al igual que las obtenidas en los siguientes ejemplos, podemos definir dicha figura límite como conjunto, mediante la intersección de la familia $\{T_n\}_n$, esto es, $\mathbb{T} = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n$; razón respaldada por el Lema 1.3.6.

Conjunto de Cantor. Tomemos un segmento C_0 de determinada longitud, se divide C_0 en tres segmentos de igual longitud y se elimina el segmento central, dando como resultado los segmentos C_{11} y C_{12} cuya unión será el conjunto C_1 ; $C_1 = C_{11} \cup C_{12}$. Este proceso se repite con C_{11} y C_{12} formando 4 nuevos segmentos que llamaremos C_{21} , C_{22} , C_{23} y C_{24} cuya unión será el conjunto C_2 . Si continuamos indefinidamente de esta forma, en el paso j se obtienen 2^j segmentos de la forma C_{jk} , con $k = 1, 2, \dots, 2^j$, de modo que $C_j = \bigcup_{k=1}^{2^j} C_{jk}$. Luego, el “conjunto límite” de este proceso, definido como $\mathcal{C} = \bigcap_{j=0}^{\infty} C_j$, es llamado el conjunto de Cantor (ver Fig. 2.1b).

Esponja de Menger. Partamos de un cubo M_0 de $\mathbb{R}^3$, el cual dividimos en 27 cubos cuyas aristas son $1/3$ de la arista de M_0 , y se elimina el cubo central de cada cara, incluyendo el cubo que queda exactamente en el centro de M_0 . Luego, resulta una figura con 20 cubos el cual llamaremos M_1 . En cada uno de los 20 cubos se repite el mismo proceso para obtener una figura con 20^2 diminutos cubos el cual llamaremos M_2 , y así sucesivamente. Se obtiene la sucesión de figuras $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ y se define la esponja de Menger como $\mathcal{M} = \bigcap_{j=0}^{\infty} M_j$ (ver Fig. 2.1c).

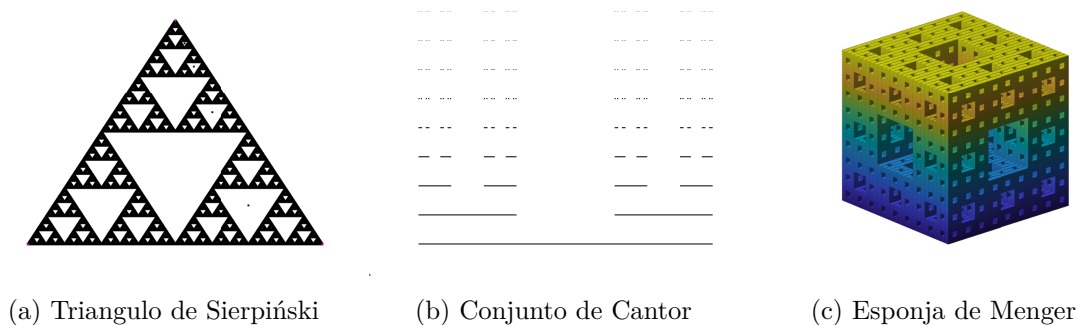


Figura 2.1

Además de poseer autosemejanza y una dimensión fractal, estos y muchos otros fractales poseen propiedades muy interesantes, las cuales los hacen objetos de estu-

dio muy aplicativos. Veremos ahora como podemos obtenerlos utilizando sistemas iterados de funciones.

2.2. SIF y atractor del SIF

En 1981, J. E. Hutchinson, utilizando propiedades comunes de la topología, fue el primer matemático en elaborar una teoría unificada para la obtención de una amplia clase de conjuntos fractales, a los que llamó “conjuntos estrictamente autosemejantes”. Luego, Michael F. Barnsley, utilizando funciones contractivas, generalizó el método de Hutchinson, ampliando notablemente la familia de fractales obtenidos y, con ello, la posibilidad de encontrar conjuntos que se aproximen, tanto como queramos, a un objeto natural.

Definición 2.2.1 (SIF). Un **Sistema Iterado de Funciones (SIF)** es una colección finita de contracciones $f_i : X \longrightarrow X$, donde X es un espacio métrico completo, y todo factor de contracción de f_i es distinto de cero, para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Esta colección será denotada por $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$.

Dado un SIF $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$, definimos el factor de contracción del SIF como $r = \max\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$, donde r_i es un factor de contracción de f_i , para cada $i \in \{1, \dots, N\}$.

Si a un SIF dado le agregamos una función constante, es decir, $f_0 : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ definida por $f_0(K) = B$, para todo $K \in \mathcal{H}(X)$, entonces la colección $\{X; f_0, f_1, \dots, f_N\}$ se denomina **un SIF con condensación** y f_0 es llamada **la función de condensación**.

A continuación, presentamos una versión del teorema del punto fijo para elementos de $\mathcal{H}(X)$.

Teorema 2.2.1. Sea $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF. Se define la función F de $\mathcal{H}(X)$ en $\mathcal{H}(X)$ como $F(K) = \bigcup_{i=1}^N f_i(K)$, para todo $K \in \mathcal{H}(X)$. Entonces, existe un único conjunto $A \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^N f_i(A) = A. \quad (2.1)$$

Además, para todo $K \in \mathcal{H}(X)$, la sucesión $\{F^{\circ n}(K)\}_n$ converge hacia A .

Demostración. La función F está bien definida, pues la unión finita de compactos es otro compacto. Por Lema 1.3.9, la función F es una contracción en $\mathcal{H}(X)$ que es completo. Aplicando el Teorema 1.1.2 a F , debe existir un único $A \in \mathcal{H}(X)$ tal que $F(A) = A$. Más aún, para cualquier $K \in \mathcal{H}(X)$, se tiene que $F^{\circ n}(K) \rightarrow A$. $\square$

En adelante se utilizará la letra F para referirnos a la función definida en el Teorema 2.2.1 y el punto fijo obtenido será llamado el **atractor** del SIF. De manera análoga podemos demostrar este teorema para SIF con condensación.

Lema 2.2.2. Sea $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF con atractor A . Para todo $C, D \in \mathcal{H}(X)$ tales que $C \subseteq A \subseteq D$, se cumple que

$$A = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(C)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(D).$$

Demostración. Para empezar, recordemos que $F^{\circ n}(C)$ representa la n -ésima composición iterada y $F^{\circ 0}(C) = C$. Mostremos que $A = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(C)}$. En efecto, sea $z \in A$. Note que por Teorema 2.2.1, $\{F^{\circ n}(C)\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$, pues esta converge a A . Luego, por Teorema 1.3.5,

$$A = \{x \in X : \text{existe una sucesión } \{x_n\}_n \text{ en } X, \text{ con } x_n \rightarrow x \text{ y } x_n \in F^{\circ n}(C), n \in \mathbb{N}\}.$$

De este modo, existe una sucesión $\{z_n\}_n$ en X tal que $z_n \rightarrow z$ y $z_n \in F^{\circ n}(C)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto indica que $z_n \in \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(C)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\{z_n\}_n$ es una

sucesión en $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(C)$ tal que $z_n \rightarrow z$ y por tanto, $z \in \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(C)}$.

Ahora, dado que $C \subseteq A$, se tiene que $f_i(C) \subseteq f_i(A)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, de modo que $F^{\circ n}(C) \subseteq F^{\circ n}(A) = A$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así pues, $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(C) \subseteq A$,

y como A es cerrado, $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(C)} \subseteq \overline{A} = A$. Por tanto, $A = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(C)}$.

Veamos que $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(D)$. Por hipótesis, $A \subseteq D$, entonces $f_i(A) \subseteq f_i(D)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Así $A = F^{\circ n}(A) \subseteq F^{\circ n}(D)$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Esto implica $A \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(D)$. Recíprocamente, si $z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(D)$, entonces $z \in F^{\circ n}(D)$,

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por Teorema 1.3.5, en conjunto con el Teorema 2.2.1, se obtiene también

$$A = \{x \in X : \text{existe una sucesión } \{x_n\}_n \text{ en } X, \text{ con } x_n \rightarrow x \text{ y } x_n \in F^{\circ n}(D), n \in \mathbb{N}\}.$$

Por ende, considerando la sucesión constante $\{z_n\}_n$, donde $z_n = z$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $z_n \in F^{\circ n}(D)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se concluye que $z \in A$. Esto muestra que $\bigcap_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(D) \subseteq A$ y por la doble contención, $\bigcap_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(D) = A$. $\square$

La siguiente definición busca extender notablemente la familia de conjuntos fractales, que si bien, en algunos casos no es tan evidente la autosemejanza descrita por B. Mandelbrot, presentan alteraciones muy interesantes.

Definición 2.2.2. Un conjunto se dice **autosemejante** (o autosimilar) si es el atractor de un SIF.

El Teorema 2.2.1 representa una parte de uno de los resultados más importantes en la geometría fractal, el Teorema del Collage, descubierto por M. Barnsley. El segundo enfoque de este teorema busca resolver el **problema inverso del SIF**¹ y ofrece una idea de qué tan cerca está la aproximación del atractor de un SIF a una imagen o conjunto inicialmente dado.

Teorema 2.2.3. Sea $\{\mathbb{R}^n; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF (o SIF con condensación) con factor de contracción $r < 1$ y sea B un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$d_H(A, B) \leq \frac{1}{1-r} d_H \left(B, \bigcup_{i=1}^N f_i(B) \right),$$

donde A es el atractor del SIF.

Demostración. Utilizando la desigualdad triangular en la métrica de Hausdorff d_H ,

¹El problema inverso del SIF busca responder a la pregunta ¿Para cada conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, existe un SIF que lo genere?

el hecho de que A es el atractor del SIF y el Lema 1.3.9, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &\leq d_H\left(A, \bigcup_{i=1}^N f_i(B)\right) + d_H\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(B), B\right) \\ &= d_H\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(B), B\right) + d_H\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(B), \bigcup_{i=1}^N f_i(A)\right) \\ &\leq d_H\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(B), B\right) + r d_H(A, B), \end{aligned}$$

de lo cual se sigue el resultado. $\square$

Una consecuencia del Teorema 2.2.3 es que cualquier compacto de $\mathbb{R}^n$ puede ser aproximado de forma arbitrariamente cerca por un conjunto autosemejante.

Corolario 2.2.4. Sea B un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Dado $\epsilon > 0$, existe un SIF compuesto por similaridades $f_1, \dots, f_N$ con atractor A , tal que $d_H(A, B) < \epsilon$.

Demostración. Por la compacidad de B en $\mathbb{R}^n$, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar una colección finita de bolas abiertas, $U_1, \dots, U_N$, con centros en B , digamos $z_1, \dots, z_N$, respectivamente, y radios $\frac{\epsilon}{4}$, tal que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^N U_i$. Recordando la Definición 1.3.4, se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^N U_i \subseteq \bar{N}\left(B; \frac{\epsilon}{4}\right).$$

Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que k sea mayor que 4 veces el diámetro² de B y $\frac{\epsilon}{k} < \frac{1}{2}$. Luego, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, definamos la función $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f_i(w) = \begin{cases} z_i, & \text{si } w = z_i; \\ \frac{\epsilon}{k}w + (1 - \frac{\epsilon}{k})z_i, & \text{si } w \neq z_i. \end{cases}$$

Estas funciones son similaridades con factor de escala $\frac{\epsilon}{k}$, tales que $f_i(B) \subseteq U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Entonces $f_i(B) \subseteq U_i \subseteq \bar{N}(f_i(B); \frac{\epsilon}{2})$, de donde:

$$\bigcup_{i=1}^N f_i(B) \subseteq \bar{N}\left(B; \frac{\epsilon}{4}\right) \text{ y } B \subseteq \bigcup_{i=1}^N \bar{N}\left(f_i(B); \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Por la Proposición 1.3.3 (iii), inferimos que $d_H\left(B, \bigcup_{i=1}^N f_i(B)\right) \leq \frac{\epsilon}{2}$, y luego, aplicando el Teorema 2.2.3, se concluye que $d_H(A, B) < \epsilon$. $\square$

²El diámetro de un subconjunto S de un espacio métrico X es $\text{diam}(S) := \sup\{d(x, y) : x, y \in S\}$.

Al observar estos conjuntos autosemejantes, se puede notar que sus partes tienen la misma forma o estructura que todo el conjunto, pero a diferente escala, e incluso pueden estar ligeramente deformadas. En los siguientes ejemplos se evidencia esta característica con más detalle.

Ejemplo 2. El atractor del SIF $\{\mathbb{R}; f_1, f_2\}$, donde $f_1(x) = \frac{1}{3}x$ y $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, es el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$. En este caso, $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R})$ viene dada por $F(K) = f_1(K) \cup f_2(K)$, para todo $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$. Consideremos como conjunto inicial al intervalo $C_0 = [0, 1]$, de modo que:

$$\begin{aligned} C_1 &= F(C_0) = f_1(C_0) \cup f_2(C_0) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right]; \\ C_2 &= F(C_1) = f_1(C_1) \cup f_2(C_1) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right]; \\ &\vdots \\ C_n &= F(C_{n-1}) = \left[0, \frac{1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}\right] \cup \left[\frac{6}{3^n}, \frac{7}{3^n}\right] \cup \left[\frac{8}{3^n}, \frac{9}{3^n}\right] \cup \left[\frac{18}{3^n}, \frac{19}{3^n}\right] \cup \cdots; \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde C_n representa la unión de los primeros 2^n intervalos. Se tiene entonces la sucesión de conjuntos $C_0, C_1, C_2, \dots$, que es de Cauchy en $\mathcal{H}(\mathbb{R})$; en efecto, sea $\epsilon > 0$. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon 3^N > m - n$. Luego, si $m \geq n > N$, entonces

$$\begin{aligned} d_H(C_n, C_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d_H(C_k, C_{k+1}) = \frac{1}{6(3)^n} + \frac{1}{6(3)^{n+1}} + \frac{1}{6(3)^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{6(3)^{m-1}} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{3^{m-1}} \right) \\ &< \frac{1}{6} \left(\frac{m-n}{3^N} \right) < \epsilon. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_j \supseteq \cdots$, aplicando el Lema 1.3.6 y posteriormente el Teorema 2.2.1, concluimos que el atractor del SIF es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{on}(C_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \mathcal{C}.$$

De manera similar se puede demostrar que los siguientes dos fractales son los atractores de los SIF correspondientes.

Ejemplo 3. El atractor del SIF $\{\mathbb{C}; f_1(z) = \frac{1}{2}z, f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i\}$ es el triángulo de Sierpiński. Más preciso, es un objeto homeomorfo al triángulo de Sierpiński.

Si T_0 es la región triangular con vértices $(0, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 0)$, entonces:

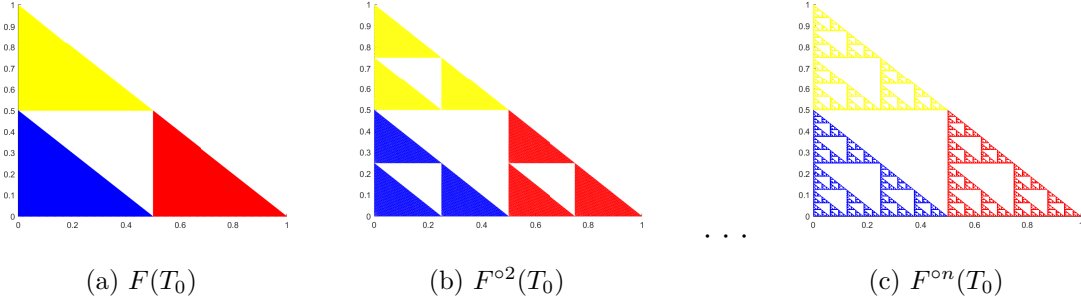


Figura 2.2

Ejemplo 4. El atractor del SIF $\{\mathbb{C}; f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$, donde:

$$f_1(z) = \frac{1}{3}z, \quad f_2(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}, \quad f_3(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}, \quad f_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i,$$

$$f_5(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}i, \quad f_6(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i, \quad f_7(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}i \text{ y } f_8(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i,$$

es llamado **carpeta de Sierpiński** y es una versión en $\mathbb{R}^2$ de la esponja de Menger.

Tomando como conjunto inicial al cuadrado K_0 de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$, obtenemos el fractal deseado como sigue:

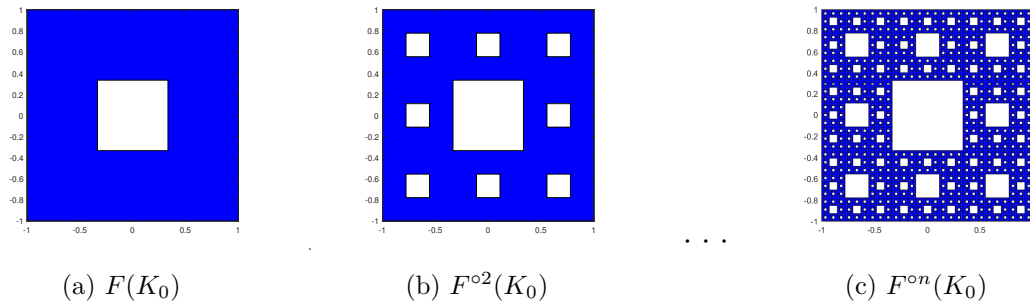


Figura 2.3

Existen fractales muy conocidos que no cumplen estrictamente la propiedad de autosemejanza descrita por Mandelbrot. El siguiente fractal es un claro ejemplo de ello, aunque puede obtenerse como atractor de un SIF con condensación.

Ejemplo 5. Considere el SIF con condensación $\{\mathbb{C}; f_0, f_1, f_2\}$, donde f_0 es la función de condensación dada por $f_0(K) = \{0\} \times [0, 1]$ para todo $K \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f_1(z) = \frac{1}{2}ze^{-i\frac{\pi}{4}} + i$ y $f_2(z) = \frac{1}{2}ze^{i\frac{\pi}{4}} + i$. En este caso, $F(K) = (\{0\} \times [0, 1]) \cup f_1(K) \cup f_2(K)$, para todo $K \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Si se toma como conjunto inicial al compacto $A_0 = \{0\} \times [0, 1]$, iterando varias veces obtenemos la siguiente sucesión de figuras que nos da una aproximación al fractal conocido como **árbol binario**, el cual es el atractor del SIF con condensación. Esto puede ser demostrado utilizando un argumento similar al del Ejemplo 2, pero esta vez teniendo en cuenta el Lema 1.3.7 y por supuesto el Teorema 2.2.1 para SIF con condensación.

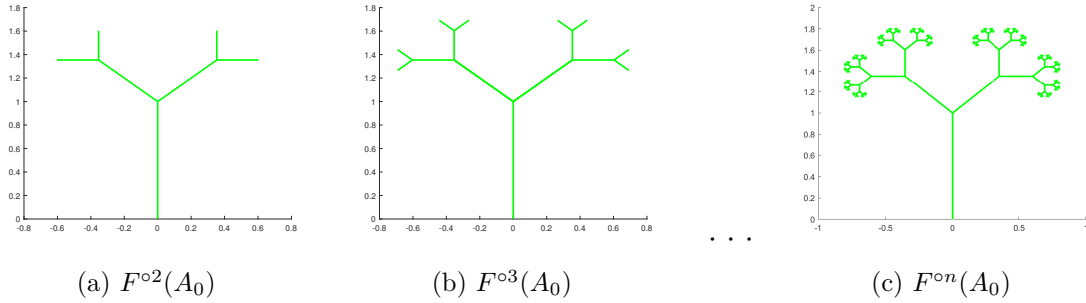


Figura 2.4

Usando el entorno programático de Matlab, podemos observar una buena aproximación al fractal conocido como **dragón de Heighway**, obtenido como atractor de SIF $\{\mathbb{C}; f_1, f_2\}$, donde $f_1(z) = \frac{1}{2}(1 + i)z$ y $f_2(z) = 1 - \frac{1}{2}(1 - i)z$. La función F viene dada por $F(K) = f_1(K) \cup f_2(K)$, para todo $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, de modo que si iniciamos con el compacto $H_0 = [0, 1] \times \{0\}$, iterando una cantidad prudente de veces, se obtiene la siguiente sucesión de figuras:

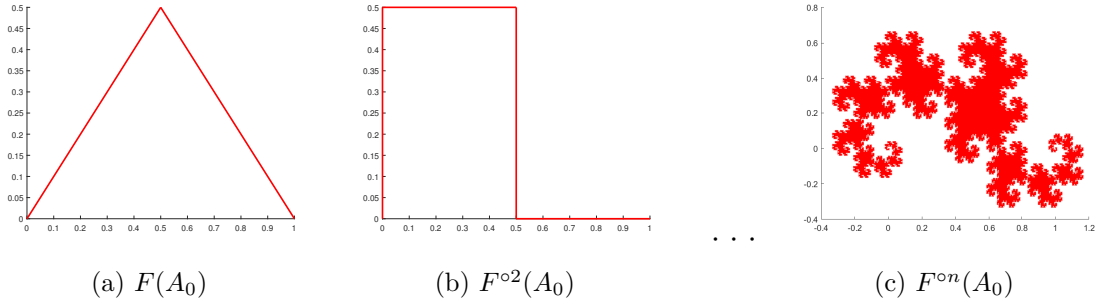


Figura 2.5

2.3. Función de direccionamiento y espacios de Cantor

A continuación mostraremos una forma de identificar los elementos del atractor de un SIF como códigos del espacio métrico $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$. Se introduce una función especial propuesta por A. Kameyama [16], que facilita la caracterización de ciertos conjuntos fractales y la obtención de los mismos como cocientes topológicos de $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$, el cual veremos que se trata de un espacio de Cantor.

Definición 2.3.1. Dado el SIF $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$, se define su **espacio de códigos asociado** como el espacio métrico $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$, donde $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$.

Veamos ahora la construcción de una función continua del espacio de códigos asociado a un SIF, sobre el atractor del SIF.

Proposición 2.3.1. Sean $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF y $K \in \mathcal{H}(X)$. Entonces existe un conjunto $\hat{K}$ tal que $K \subseteq \hat{K}$ y para cada $i = 1, 2, \dots, N$, la funciones $f_i : \hat{K} \rightarrow \hat{K}$ determinan el SIF $\{\hat{K}; f_1, f_2, \dots, f_N\}$.

Demostración. Consideremos el SIF con condensación $\{X; f_0, f_1, f_2, \dots, f_N\}$, donde f_0 es la función de condensación definida por $f_0(B) = K$, para todo $B \in \mathcal{H}(X)$. Este SIF posee atractor, es decir, existe $\hat{K} \in \mathcal{H}(X)$ que viene a ser el punto fijo de la contracción $F_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ dada por $F_0(B) = \bigcup_{n=0}^N F_n(B) = K \cup F(B)$, para todo $B \in \mathcal{H}(X)$. Así, $\hat{K}$ es un compacto tal que $F_0(\hat{K}) = \hat{K}$, con lo cual

$K \cup F(\hat{K}) = \hat{K}$. Esta última igualdad implica que $K \subseteq \hat{K}$ y $F(\hat{K}) \subseteq \hat{K}$, lo cual indica que las funciones $f_i : \hat{K} \rightarrow \hat{K}$, con $i = 1, 2, \dots, N$, están bien definidas. $\square$

La Proposición 2.3.1 nos dice que si queremos ver el comportamiento de un SIF, en un subconjunto compacto fijo de X , podemos restringir el SIF sobre algún espacio métrico compacto.

Proposición 2.3.2. Sean $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF con factor de contracción λ y $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ el espacio de los códigos asociado al SIF. Para cada $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, se define $\phi : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times X \rightarrow X$ como $\phi(\alpha, n, x) = f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x)$; cada α_i pertenece a $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$. Dado $K \in \mathcal{H}(X)$, existe una constante real $D > 0$ tal que $d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, n, x_2)) \leq D\lambda^{\min\{n, m\}}$, siempre que $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $m, n \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2 \in K$.

Demostración. Sean $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $m, n \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2 \in K$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $m < n$. Por Proposición 2.3.1 existe $\hat{K} \in \mathcal{H}(X)$ tal que $K \subseteq \hat{K}$ y cada contracción $f_i : \hat{K} \rightarrow \hat{K}$ está bien definida. Tenemos que

$$\phi(\alpha, n, x_2) = f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_m} \circ f_{\alpha_{m+1}} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x_2).$$

Luego, si se define $x_3 := f_{\alpha_{m+1}} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x_2)$, el cual es un elemento de $\hat{K}$, entonces $\phi(\alpha, n, x_2) = f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_m}(x_3) = \phi(\alpha, m, x_3)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, n, x_2)) &= d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, m, x_3)) \\ &= d(f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_m}(x_1), f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_m}(x_3)) \\ &\leq \lambda^m d(x_1, x_3) \leq \lambda^m D, \end{aligned}$$

donde $D = \max\{d(x, y) : x, y \in \hat{K}\}$, el cual existe por la compacidad de $\hat{K}$. $\square$

En adelante se utilizará el símbolo ϕ para referirnos a la función definida en la Proposición 2.3.2.

Teorema 2.3.3. Sean $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ con atractor A y $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ el espacio de códigos asociado al SIF. Considere la función $\varphi : (\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c) \rightarrow (A, d)$ definida por $\varphi(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha, n, x)$, para cada $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Entonces $\varphi(\alpha)$ siempre existe, pertenece a A y es independiente de x . Además, φ es continua y sobreyectiva.

Demostración. Sean $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $x \in X$ y $K \in \mathcal{H}(X)$ tal que $x \in K$. Por Teroema 2.2.1, sabemos que $A = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{\text{on}}(K)$. Consideremos la sucesión $\{s_n\}_n$ dada por $s_n = \phi(\alpha, n, x)$ y veamos que es de Cauchy en X . Sea $\epsilon > 0$. Como lo establece la Proposición 2.3.2, existe $D > 0$ tal que $d(s_n, s_m) \leq D\lambda^{\min\{n,m\}}$. Dado que $0 \leq \lambda < 1$, para n y m suficientemente grandes se tiene $d(s_n, s_m) < \epsilon$, indicando que $\{s_n\}_n$ es de Cauchy en X . Por ser X completo, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \varphi(\alpha)$ existe. En vista de que $s_n \in F^{\text{on}}(K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la caracterización de A mostrada en el Teorema 1.3.5, nos dice que $\varphi(\alpha) \in A$. Por otra parte, dados $x, y \in X$ y $K \in \mathcal{H}(X)$ tal que $x, y \in K$, se emplea nuevamente la proposición 2.3.2 para obtener $d(\phi(\alpha, m, x), \phi(\alpha, n, y)) \leq \lambda^{\min\{n,m\}}D$ y, por ende, $d(\phi(\alpha, m, x), \phi(\alpha, n, y)) < \epsilon$. Esto demuestra que $\varphi(\alpha)$ es independiente de x , pues $\varphi(\alpha) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(\alpha, m, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha, n, y)$.

Mostremos que φ es continua. Sean $\epsilon > 0$ y $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots$, $\beta = \beta_1\beta_2\cdots$ códigos de $\Sigma^{\mathbb{N}}$. Escojamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^{n_0} < \frac{\epsilon}{D}$, donde D es la constante obtenida por la Proposición 2.3.2, y digamos que $d_c(\alpha, \beta) < \delta = \frac{1}{(N+1)^{n_0}}$. Entonces $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n_0$, de ahí que para $m \geq n_0$,

$$\begin{aligned} d(\phi(\alpha, m, x), \phi(\beta, m, y)) &= d(f_{\alpha_1} \circ \cdots \circ f_{\alpha_m}(x), f_{\beta_1} \circ \cdots \circ f_{\beta_m}(y)) \\ &= d(\phi(\alpha, m, x), \phi(\alpha, n_0, z)) \leq \lambda^{n_0}D < \epsilon, \end{aligned}$$

donde $z = f_{\beta_{n_0+1}} \circ \cdots \circ f_{\beta_m}(y)$. Así pues, $d(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) < \epsilon$, mostrando la continuidad de φ . Por último, veamos que φ es sobreyectiva. Para ello, tomemos de manera arbitraria $a \in A$ y mostremos que existe $\beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $\varphi(\beta) = a$. Para cada $x \in X$ se tiene que $\{x\} \in \mathcal{H}(X)$, de modo que $A = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{\text{on}}(\{x\})$, donde

$$F^{\text{on}}(\{x\}) = \{f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \cdots \circ f_{\alpha_n}(x) : \alpha_i \in \{1, 2, \dots, N\}; 1 \leq i \leq n\}.$$

Dado que $\{F^{\text{on}}(\{x\})\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$, la caracterización de A nos permite encontrar una sucesión $\{a_n\}_n$ tal que $a_n \rightarrow a$ y $a_n \in F^{\text{on}}(\{x\})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dicho esto último, podemos definir una sucesión de códigos $\{\alpha^n\}_n$, donde $\alpha^n = \alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n\cdots$, de tal manera que $a_n = f_{\alpha_1^n} \circ f_{\alpha_2^n} \circ \cdots \circ f_{\alpha_n^n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de $\Sigma^{\mathbb{N}}$, $\{\alpha^n\}_n$ admite una subsucesión convergente, digamos $(\alpha^{k_n})_n \rightarrow \beta$. Note que las componentes iniciales de los códigos α^{k_n} se igualan a las de

β a medida que n aumenta, por consiguiente $d(\phi(\beta, n, x), \phi(\alpha^{k_n}, n, x)) \leq \lambda^t D$, donde t es el número de veces que ocurre $\alpha_m^{k_n} = \beta_m$, con $1 \leq m \leq t$, y como t aumenta a medida que n aumenta, entonces

$$\begin{aligned}\varphi(\beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\beta, n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\alpha^{k_n}, n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_1^{k_n}} \circ f_{\alpha_2^{k_n}} \circ \cdots \circ f_{\alpha_n^{k_n}}(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a.\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. $\square$

La función φ del Teorema 2.3.3 la llamaremos **función de direccionamiento**. Si $a \in A$, el conjunto $\varphi^{-1}(a) = \{\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}} : \varphi(\alpha) = a\}$, el cual es no vacío, será llamado **conjunto de direcciones** de a y a cualquiera de sus elementos le diremos **dirección** o **código** de a .

El siguiente resultado será relevante más adelante.

Proposición 2.3.4. Sean $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF con atractor A y $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$ la correspondiente función de direccionamiento. Entonces, para todo $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, se cumple $\varphi(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots) = f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2 \alpha_3 \cdots))$. Además, si f_i es inyectiva para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, entonces $\varphi(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots) = \varphi(\alpha_1 \beta_2 \beta_3 \cdots)$, para todo $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ si, y solo si, $\varphi(\alpha_2 \alpha_3 \cdots) = \varphi(\beta_2 \beta_3 \cdots)$, donde $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots$ y $\beta = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \cdots$.

Demostración. Sean $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y $x \in X$. Teniendo en cuenta la continuidad de f_{α_1} , obtenemos:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ f_{\alpha_3} \circ \cdots \circ f_{\alpha_n}(x) \\ &= f_{\alpha_1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_2} \circ f_{\alpha_3} \circ \cdots \circ f_{\alpha_n}(x) \right) \\ &= f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2 \alpha_3 \cdots)).\end{aligned}$$

Este argumento demuestra la primera parte del enunciado. Para la segunda parte, supongamos que $\varphi(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots) = \varphi(\alpha_1 \beta_2 \beta_3 \cdots)$. Luego, de la primera parte, se sigue que $f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2 \alpha_3 \cdots)) = f_{\alpha_1}(\varphi(\beta_2 \beta_3 \cdots))$, y por la inyectividad de f_{α_1} , se obtiene $\varphi(\alpha_2 \alpha_3 \cdots) = \varphi(\beta_2 \beta_3 \cdots)$. Procediendo de manera recíproca, si se tiene que $\varphi(\alpha_2 \alpha_3 \cdots) = \varphi(\beta_2 \beta_3 \cdots)$, basta con aplicar f_{α_1} en ambos lados de la igualdad y nuevamente emplear la primera parte. $\square$

Así pues, para cualquier punto del atractor de un SIF, podemos asignarle ahora un código que facilita la caracterización del atractor. Más aún, en el caso particular para el cual φ es además inyectiva, podemos establecer evidentemente un homeomorfismo como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. Consideremos el SIF del Ejemplo 2, cuyo atractor es el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$. Observe que tanto las contracciones del SIF como la función de direccionamiento son inyectivas; en efecto, sean $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots, \beta = \beta_1\beta_2\cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, con $\alpha_1 \neq \beta_1$ (sin pérdida de generalidad). Supongamos que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Por Proposición 2.3.4, obtenemos $f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2\alpha_3\cdots)) = f_{\beta_1}(\varphi(\beta_2\beta_3\cdots))$, lo cual indica que $f_{\alpha_1}(\mathcal{C}) \cap f_{\beta_1}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$. Pero $f_{\alpha_1}(\mathcal{C}) \cap f_{\beta_1}(\mathcal{C}) \subseteq f_{\alpha_1}([0, 1]) \cap f_{\beta_1}([0, 1]) = \emptyset$; contradicción. Por tanto, en este caso φ es un homeomorfismo.

Con esto, podemos finalmente dotar a $\mathcal{C}$ con algunas propiedades topológicas inducidas por $\Sigma^{\mathbb{N}}$. Es decir, $\mathcal{C}$ es compacto, perfecto y totalmente desconexo. De hecho, es el único conjunto (salvo homeomorfismos) que posee estas tres propiedades; esta demostración puede encontrarse, por ejemplo, en [30]. De este modo, cualquier espacio con dichas propiedades será llamado **espacio de Cantor**.

Definición 2.3.2. Sean $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF, $\Sigma^{\mathbb{N}}$ su espacio de códigos asociado y $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow A$ la respectiva función de direccionamiento. Se define la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\Sigma^{\mathbb{N}}$, como: $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

Bajo los supuestos de la Definición 2.3.2, podemos establecer un homeomorfismo entre el atractor del SIF y el espacio cociente $\Sigma^{\mathbb{N}} / \sim$, teniendo en consideración la Proposición 1.2.1. Veamos: en este caso resulta el siguiente diagrama triangular

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma^{\mathbb{N}} & \\ g \swarrow & & \searrow \varphi \\ \Sigma^{\mathbb{N}} / \sim & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & A \end{array} ,$$

donde $\Sigma^{\mathbb{N}} / \sim = \{[\alpha] : \alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}\} = \{\varphi^{-1}(\{a\}) : a \in A\}$ y $g : \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow \Sigma^{\mathbb{N}} / \sim$ es la función de descomposición. La función $\hat{\varphi} : A \longrightarrow \Sigma^{\mathbb{N}} / \sim$ se define como $\hat{\varphi}([\alpha]) = \varphi(\alpha)$,

para todo $[\alpha] \in \Sigma^{\mathbb{N}} / \sim$. Además, $g = \hat{\varphi} \circ \varphi$. De este modo, para probar que $\hat{\varphi}$ es un homeomorfismo, se debe verificar que φ es una función cociente. Dado que φ es continua y sobreyectiva, resta probar que es cerrada. En efecto, sea $V \subseteq \Sigma^{\mathbb{N}}$ un conjunto cerrado. Como $\Sigma^{\mathbb{N}}$ es compacto, resulta que V también lo es, así que, por la continuidad de φ , $\varphi(V)$ será compacto en A . Luego, $\varphi(V)$ es cerrado en A , pues A es un espacio de Hausdorff.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 7. Consideremos el SIF $\{\mathbb{C}; f_1, f_2 f_3, f_4, f_5, f_6\}$, donde:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{4}z, & f_2(z) &= \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)z + \frac{1}{4}i, & f_3(z) &= \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}i, \\ f_4(z) &= \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)z + \frac{1}{2}i, & f_5(z) &= \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}i, & f_6(z) &= \frac{1}{4}z + \frac{3}{4}i. \end{aligned}$$

El atractor de este SIF puede verse en la Figura 2.6a, donde se pinta de un color distinto cada una de las partes obtenidas por las contracciones.

En este caso, la función de direccionamiento no es un homeomorfismo por lo siguiente:

$$\varphi(2\bar{1}) = f_2(\varphi(\bar{1})) = f_2(0) = \frac{1}{4}i = f_3(0) = f_3(\varphi(\bar{1})) = \varphi(3\bar{1}).$$

Es decir, φ no es inyectiva.

Ejemplo 8. El conocido fractal llamado **Curva de Koch**, que denotaremos como $\mathcal{K}$, puede ser obtenido como atractor del SIF $\{I \times I; f_1, f_2, f_3, f_4\}$, donde $I = [0, 1]$, $f_1(z) = \frac{1}{3}z$, $f_2(z) = \frac{1}{3}ze^{\frac{\pi}{3}i} + \frac{1}{3}$, $f_3(z) = \frac{1}{3}ze^{-\frac{\pi}{3}i} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ y $f_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$. Comenzando con el compacto $I \times \{0\}$, el atractor del SIF resultante puede verse en la Figura 2.6b.

Visualmente se puede notar que, por ejemplo, el complejo $\frac{1}{3}$ pertenece a $\mathcal{K}$, y de hecho, se puede demostrar que $\varphi^{-1}(\frac{1}{3}) = \{1\bar{4}, 2\bar{1}\}$. Por definición de φ , se tiene evidentemente que $\varphi(1\bar{4}) = \varphi(2\bar{1}) = \frac{1}{3}$, del cual obtenemos $\{1\bar{4}, 2\bar{1}\} \subseteq \varphi^{-1}(\frac{1}{3})$. Para probar la otra contención, vamos a suponer que existe $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $\alpha \neq 1\bar{4}$, $\alpha \neq 2\bar{1}$ y $\varphi(\alpha) = \frac{1}{3}$. Luego, se tienen los siguientes cuatro casos que generan contradicciones: $\alpha_1 \neq 1$ y $\alpha_1 \neq 2$; $\alpha_1 \neq 1$ y $\alpha_{i_0} \neq 1$ para algún $i_0 \in \{2, 3, 4, \dots\}$; $\alpha_1 \neq 2$ y $\alpha_{j_0} \neq 4$ para algún $j_0 \in \{2, 3, 4, \dots\}$; $\alpha_{k_0} \neq 4$ y $\alpha_{k_0} \neq 1$ para algún

$k_0 \in \{2, 3, 4, \dots\}$. De este modo, se demuestra que las únicas direcciones de $\frac{1}{3}$ son $1\bar{4}$ y $2\bar{1}$.

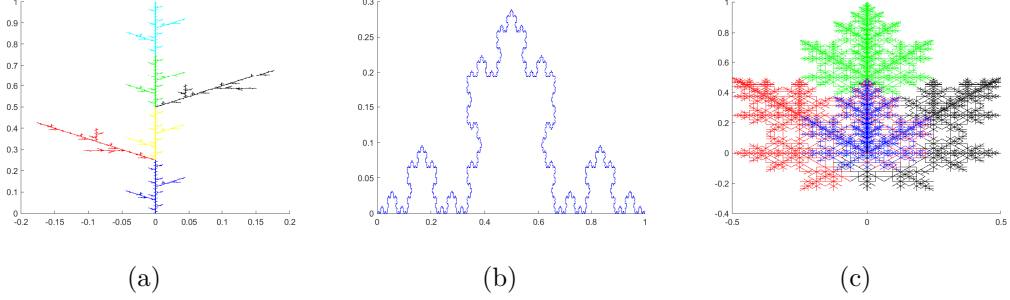


Figura 2.6

Hasta el momento se han obtenido fractales que en esencia están compuestos por partes similares a sí mismo. En el siguiente ejemplo veremos que estas partes pueden tener infinitos elementos en común, razón por el cual no se logra visualizar completamente la idea de autosemejanza de Mandelbrot.

Ejemplo 9. El SIF $\{\mathbb{C}; f_1, f_2, f_3, f_4\}$, donde:

$$f_1(z) = \frac{1}{2}z, \quad f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i, \quad f_3(z) = \frac{1}{2}(1+i)z \quad \text{y} \quad f_4(z) = \frac{1}{2}(1-i)z,$$

posee atractor A y se logra visualizar aproximadamente en la Figura 2.6c.

Consideremos el conjunto $K = \{a + bi : a = 0 \text{ y } b \in [0, 1]\}$, que es infinito, y note que $K = f_1(K) \cup f_2(K)$. Entonces $K \subseteq F(K)$, lo cual indica que la sucesión de Cauchy, $\{F^{on}(K)\}_n$, cumple con $K \subseteq F(K) \subseteq F^{\circ 2}(K) \subseteq F^{\circ 3}(K) \subseteq \dots$. Por Lema 1.3.7 y el Teorema 2.2.1, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{on}(K) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F^{on}(K)}.$$

En consecuencia, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F^{on}(K) \subseteq A$ y, en particular, $K \subseteq A$. Finalmente, como $f_3(f_4(K)) = f_4(f_3(K))$, $f_3(f_4(K)) \subseteq f_3(A)$ y $f_4(f_3(K)) \subseteq f_4(A)$, obtenemos que $f_3(A) \cap f_4(A)$ es infinito.

En general, si $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ es un SIF con atractor A , debido a la expresión (2.1), resulta lógico pensar en A como la unión finita de “copias alteradas” de si mismo, ya que cada $f_i(A)$ puede interpretarse como una alteración de A y como resultado, cuando estas alteraciones presentan elementos en común, existirán elementos de A con dos o mas direcciones, acabando en la no inyectividad de φ . Más preciso, cada elemento de A posee una única dirección si, y solo si, $f_i(A) \cap f_j(A) = \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, con $i \neq j$. Observe además que si φ es inyectiva, se tiene la inyectividad de cada contracción, pero lo contrario no es cierto (véase Ejemplo 7).

En ocasiones resulta imposible determinar, observando al atractor, las alteraciones $f_i(A)$, como ocurre en el Ejemplo 9; en todo caso, dicho atractor es autosemejante por la Definición 2.2.2, pero no es tan notable como en los fractales $\mathbb{T}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{M}$. Esto se debe a que la sobreposición o intersección de los $f_i(A)$ son muy grandes.

Teorema 2.3.5. Sea $\{X; f_1, f_2\}$ un SIF con atractor A . Supongamos que f_1 y f_2 son contracciones inyectivas en A . Si $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$, entonces A es totalmente desconexo. Si $f_1(A) \cap f_2(A) \neq \emptyset$, entonces A es conexo.

Demostración. Sean $\Sigma^{\mathbb{N}}$ el espacio de los códigos asociado al SIF y φ la respectiva función de direccionamiento. Si $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$, entonces, un argumento similar al del Ejemplo 6 muestra que φ es inyectiva y, por Teorema 2.3.3, φ es un homeomorfismo. Esto indica que A es un espacio de Cantor; en particular, es totalmente desconexo.

Supongamos ahora que $f_1(A) \cap f_2(A) \neq \emptyset$. Entonces, existe y tal que $y \in f_1(A)$ y $y \in f_2(A)$. Como $y \in f_1(A)$, existe $z \in A$ tal que $y = f_1(z)$. Por la sobreyectividad de φ , existe $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $z = \varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots)$, de modo que $y = f_1(\varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots)) = \varphi(1\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots)$, por Proposición 2.3.4. De igual manera, obtenemos que $y = \varphi(2\beta_1\beta_2\beta_3\cdots)$ para algún código $\beta_1\beta_2\beta_3\cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Luego, y posee las dos direcciones, $1\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ y $2\beta_1\beta_2\beta_3\cdots$. Supongamos que A no es conexo. Como A es compacto, existen conjuntos compactos no vacíos, E y F , tales que $A = E \cup F$ y $E \cap F = \emptyset$. Por la compacidad de estos conjuntos, existe $\delta > 0$ tal que $d(a, b) \geq \delta$ para todo $a \in E$ y todo $b \in F$. De la Proposición 2.3.4 y el hecho de que el punto $y \in A$ tiene dos direcciones, se garantiza que por lo menos existen

dos códigos que coinciden en su primera componente, tales que la imagen bajo φ de uno de ellos pertenece a E y la imagen bajo φ del otro pertenece a F . Tomemos ahora un par de códigos $\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots$ y $\omega = \omega_1\omega_2\cdots$ en $\Sigma^{\mathbb{N}}$, tales que $\gamma_i = \omega_i$, para cada $i = 1, 2, \dots, k$, donde $k \in \mathbb{N}$, con $\varphi(\gamma) \in E$ y $\varphi(\omega) \in F$. Por Proposición 2.3.2, tenemos que $d(\varphi(\gamma), \varphi(\omega)) \leq s^k \text{diam}(A)$, donde s es un factor de contracción del SIF. Luego, $\delta \leq s^k \text{diam}(A)$, lo cual implica que

$$k \leq \frac{\ln\left(\frac{\delta}{\text{diam}(A)}\right)}{\ln(s)}.$$

Así pues, si $a \in E$ y $b \in F$, debe existir un número máximo M , que indique la cantidad de componentes iniciales que coinciden entre una dirección de a y una de b . Digamos que M se alcanza con algún par de elementos $a \in E$ y $b \in F$, de tal forma que podamos encontrar $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M \in \{1, 2\}$ tales que

$$\varphi(\rho_1\rho_2\cdots\rho_M 1\cdots) = a \quad \text{y} \quad \varphi(\rho_1\rho_2\cdots\rho_M 2\cdots) = b.$$

Entonces, si consideramos el punto $v \in A$ que posee las dos direcciones

$$v = \varphi(\rho_1\rho_2\cdots\rho_M 1\alpha_2\alpha_3\cdots) = \varphi(\rho_1\rho_2\cdots\rho_M 2\beta_2\beta_3\cdots),$$

Se obtiene lo siguiente: si $v \in E$, al tener $M+1$ componentes iniciales coincidentes con los de la dirección de $b \in F$, tenemos una contradicción. Si $v \in F$, se tienen igualmente $M+1$ componentes iniciales coincidentes con los de la dirección de $a \in E$, llegando nuevamente a una contradicción. Por lo tanto, A debe ser conexo. $\square$

Hasta la fecha se han estudiado diversas maneras de definir formalmente la autosemejanza, con las cuales se clasifican distintas familias de conjuntos fractales; por ejemplo, la **autosemejanza estricta**, propuesta por Hutchinson [15], que busca reducir la sobreposición de los $f_i(A)$ empleando la medida de Hausdorff y una propiedad conocida como **condición del conjunto abierto**; estas se definen en la siguiente sección, pues serán de utilidad para calcular la dimensión del atractor de un SIF. Otro tipo de autosemejanza es la propuesta por G. Lewellen [18], presente en conjuntos invariantes bajo los miembros de una colección de contracciones indizadas por un conjunto compacto. Aunque estas definiciones se acercan en mayor o menor medida a la

idea de autosemejanza de Mandelbrot, en algunos casos reduce el número de fractales obtenidos y por tanto su aplicabilidad. Para no desviarnos del objetivo principal de este trabajo, no se analizarán estos tipos de autosemejanza. Sin embargo, es preciso mencionar, como dato adicional, la definición de autosemejanza propuesta por W. J. Charatonik y A. Dilks [8, 28], nombrada **autosemejanza topológica**, la cual es una generalización del trabajo de M. Barnsley, pues se emplea en el contexto amplio de los espacios topológicos. Esta última se define a continuación.

Definición 2.3.3. Un espacio topológico X se dice autosemejante topológicamente, si todo abierto no vacío de X contiene un subespacio homeomorfo a X .

Empleando esta definición, es posible encontrar conjuntos autosemejantes que no son necesariamente atractores de un SIF. Note que el conjunto de los naturales con la topología de los complementos finitos es uno de ellos.

2.4. Dimensiones de un fractal

Es un hecho que dependiendo del área de las matemáticas en el que estemos trabajando, la dimensión toma distintas definiciones, y al ser esta otra de las características que nos permite definir un conjunto fractal, es necesario introducir su importancia y funcionamiento.

Desde los inicios de la geometría se ha tenido la necesidad de comparar figuras conociendo sus propiedades. Esta comparación resultaba más sencilla si se tenía alguna referencia sobre la dimensión en la que se encontraban. Hoy en día somos capaces de asignarle este valor a figuras compuestas por puntos, curvas, superficies o sólidos; Euclides define la dimensión en *Los Elementos de Euclides*, como: unidimensional si la frontera de la figura está compuesta por puntos, bidimensional si está compuesta por curvas y tridimensional si está compuesta de superficies. Henri Poincaré generaliza esta definición, mediante la llamada dimensión topológica, la cual proporciona una dimensión entera a un conjunto en cualquier espacio topológico.

Hay diferentes versiones que definen la dimensión topológica y resultan ser similares en cuanto a su funcionamiento, pero en el contexto general de los espacios

métricos no siempre se tiene la equivalencia; esto solo ocurre cuando se trata de un espacio métrico separable, como es el caso de $(\mathbb{R}^n, d_u)$. La siguiente versión es llamada **dimensión de Lebesgue**, se aplica eficazmente en espacios métricos y puede ser profundamente analizada, al igual que otras versiones, en [10, 12].

Definición 2.4.1. Sea $n \geq -1$ un entero. El **orden** de una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos es menor o igual que n si, y solo si, cualesquiera $n+2$ de los conjuntos tiene intersección vacía. Si $n \geq 0$, decimos que $\mathcal{A}$ tiene orden n si, y solo si, tiene orden menor o igual que n , pero no tiene orden menor o igual que $n-1$.

Note que una familia de conjuntos tiene orden -1 si, y solo si, es vacía o el singleton $\{\emptyset\}$. Igualmente, una familia de conjuntos no vacíos son disjuntos dos a dos si, y solo si, su orden es cero.

Definición 2.4.2. Sean X un espacio métrico y $n \geq -1$ un entero. Decimos que X tiene **dimensión topológica** menor o igual que n si, y solo si, toda cubierta abierta y finita de X posee un refinamiento de orden menor o igual que n . La dimensión topológica es n si, y solo si, la dimensión topológica es menor o igual que n , pero no menor o igual que $n-1$.

En adelante escribiremos $Dim_T(X)$ para referirnos a la dimensión topológica de X . Si para todo entero n no se cumple que $Dim_T(X) \leq n$, entonces decimos que $Dim_T(X) = \infty$.

Una forma equivalente de presenciar los conjuntos cero-dimensionales es la siguiente: un espacio métrico X tiene $Dim_T(X) = 0$ si, y solo si, toda cubierta abierta y finita de X posee un refinamiento conformado por subconjuntos **clopen**³ disjuntos dos a dos.

Ejemplo 10. El conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ con la métrica discreta posee $Dim_T(X) = 0$, pues toda cubierta de X puede ser refinada por la colección de conjuntos unipuntuales $\{x_i\}$, la cual tiene orden cero.

³Un subconjunto B de un espacio métrico X es llamado clopen en X si, y solo si, es abierto y a la vez cerrado, en X .

En base a la definición, podemos establecer la dimensión topológica para el atractor de los siguientes SIF:

Ejemplo 11. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Si $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ es un SIF con atractor A y se cumple que $f_i(A) \cap f_j(A) = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces $\dim_T(A) = 0$. Verifiquemos esto: sea $\mathcal{F}$ una cubierta abierta de A . Para todo $x \in X$, existen $F \in \mathcal{F}$ y $r > 0$ tales que $B_d(x, r) \cap A \subseteq F$. Gracias a que $f_i(A) \cap f_j(A) = \emptyset$ para todo $i \neq j$, sabemos que el conjunto A está separado por $f_1(A), f_2(A), \dots, f_N(A)$. Asimismo, cada $f_i(A)$ se encuentra separado por los conjuntos $f_i(f_1(A)), f_i(f_2(A)), \dots, f_i(f_N(A))$, los cuales también se encuentran separados por N nuevos conjuntos, y así sucesivamente. Dicho de otro modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A = \bigcup_{\alpha \in \Sigma^n} \phi(\alpha, n, A)$, donde $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$. De este manera, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \phi(\alpha', n, A)$ para algún $\alpha' \in \Sigma^n$ y el diámetro de $\phi(\alpha', n, A)$ es menor que r , de ahí que $\phi(\alpha', n, A) \subseteq B_d(x, r)$. En síntesis, para todo $x \in X$, escogemos un conjunto de la forma $\phi(\alpha', n, A)_x$ tal que $x \in \phi(\alpha', n, A)_x \subseteq F$ para algún $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \Sigma^n$ y $F \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, la colección $\mathcal{F}_1 = \{\phi(\alpha', n, A)_x : x \in A\}$ es una cubierta de A en donde se puede observar que cada conjunto $\phi(\alpha', n, A)_x$ es clopen en A . Como A es compacto, pues es el atractor de un SIF, existe una colección finita de conjuntos de $\mathcal{F}_1$ que viene a ser un refinamiento de $\mathcal{F}$.

Un argumento similar al anterior se utiliza para verificar lo siguiente:

Ejemplo 12. Dado $X \subseteq \mathbb{R}^n$, sea $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF, donde f_i es una similitud para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, y cuyo atractor es A . Si la colección de conjuntos $\{f_1(A), \dots, f_N(A)\}$ es de orden 1, entonces $\dim_T(A) = 1$. Por ejemplo, $\dim_T(\mathcal{K}) = 1$ y $\dim_T(\mathbb{T}) = 1$.

La Definición 2.4.2, así como también algunos conceptos de la teoría de la medida, son útiles para determinar la dimensión de una gran cantidad de conjuntos, pero con la llegada de conjuntos “anormales” como el conjunto de Cantor o las curvas continuas y nunca diferenciables, no resultan ser útiles, debido al nivel de irregularidad que presentan dichos conjuntos. De ahí que han sido propuestas diversas definiciones que en su mayoría buscan generalizar la idea de que puntos, curvas de clase C^∞ y

superficies, tienen dimensiones 0, 1 y 2, respectivamente. La más antigua, y posiblemente la más importante, es la dimensión de Hausdorff, pues tiene la ventaja de estar definida para cualquier conjunto.

En 1914, Carathéodory, basado en construcciones anteriores de Borel y Lebesgue, introdujo las más generales **medidas exteriores de Carathéodory**, de las cuales definió la medida 1-dimensional en el espacio euclídeo n -dimensional, indicando que medidas s -dimensionales podían ser definidas de forma parecida para otros enteros s . Felix Hausdorff, en 1919, señala que la definición de Carathéodory también era válida para s no entero, naciendo así el concepto de conjuntos con dimensión fraccionaria o dimensión fractal, aunque fue Besicovitch quien haría un estudio mucho más extensivo y a quien se deben teoremas concernientes tanto a la **medida de Hausdorff** como a la dimensión fractal.

A partir de la dimensión de Hausdorff, que por su importante valor teórico analizaremos en lo sucesivo, han aparecido diferentes definiciones sobre dimensión fractal que dependiendo de la construcción o forma del fractal, resultan ser muy útiles. Todas estas dimensiones no enteras, no siempre coinciden, pero pueden ser usadas para comparar conjuntos del mundo real con “fractales de laboratorio”, y nos permiten cuantificar aquella idea subjetiva que tenemos acerca de cuán densamente ocupa un fractal el espacio métrico en el que se encuentra. Analizaremos con ejemplos varios resultados que relacionan la dimensión fractal con un SIF.

Naturalmente, la dimensión de Hausdorff puede ser definida de la forma más general posible, inclusive para **conjuntos de Borel**, pues muchas de sus investigaciones, así como también de dimensiones fractales alternas como la dimensión de Minkowski, se basan mayormente en la teoría de la medida. Aunque, siguiendo el objetivo de este trabajo, introducimos estas definiciones para subconjuntos de $(\mathbb{R}^n, d_u)$ y espacios equivalentes.

Definición 2.4.3. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una colección contable de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, con $0 \leq \text{diam}(U_i) \leq \delta$ para cada $i \in I$, diremos que $\{U_i\}_{i \in I}$ es una δ -cubierta de A .

Siguiendo la Definición 2.4.3, consideremos un número $p \in [0, \infty)$. Entonces, para

cualquier $\delta > 0$, definimos

$$H(A, p, \delta) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} (\text{diam}(U_i))^p : \{U_i\}_{i \in I} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } A \right\}. \quad (2.2)$$

Por convención, digamos que $(\text{diam}(A_i))^0 = 0$, cuando $A_i = \emptyset$, de modo que el valor $H(A, p, \delta)$ puede ser cero, finito o infinito. Además, note que si δ disminuye, el valor en (2.2) aumenta y tiende a un límite cuando $\delta \rightarrow 0$, pues se reducen las cubiertas posibles de A . Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.4.4. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Para cada $p \in [0, \infty)$ definimos la cantidad $H(A, p) = \sup\{H(A, p, \delta) : \delta > 0\}$, que es llamada **medida p -dimensional de Hausdorff** del conjunto A .

El supremo de la Definición 2.4.4 puede ser (y generalmente lo es) cero o infinito. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 13. Si A es un conjunto formado por siete puntos de $(\mathbb{R}^2, d_u)$, entonces $H(A, 0) = 7$ y $H(A, p) = 0$ para $p > 0$. Esto se tiene porque al tomar δ menor que la mitad de la distancia mínima entre dos puntos de A , nos quedamos con una sola δ -cubierta que son los conjuntos unipuntuales $\{x_i\}$, cuyos diámetros son cero.

Ejemplo 14. $H(\mathbb{T}, 1) = \infty$ y $H(\mathbb{T}, 2) = 0$. Consideremos la sucesión de valores de δ coincidentes con el diámetro de los subtriángulos de $\mathbb{T}$, de modo que cada cubierta de $\mathbb{T}$ esté formada por dichos subtriángulos. Por la construcción de $\mathbb{T}$, si d es el diámetro de $\mathbb{T}$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos cubrir a $\mathbb{T}$ con mínimo 3^n triángulos que tienen diámetro $d2^{-n}$. Así, para cada n , se tiene un valor de p para el cual la cantidad $3^n d^p 2^{-np}$ es un candidato a ínfimo. Cuando $n \rightarrow \infty$, para p pequeño, esta cantidad es creciente, y para p grande, converge a cero, lo cual indica que tenemos un ínfimo para todos los valores de δ . Por tanto, analizando la sucesión $\{3^n d^p 2^{-np}\}_n$, si $p = 1$, se tiene $H(\mathbb{T}, p) = \infty$, y si $p = 2$, se tiene $H(\mathbb{T}, p) = 0$. Por otra parte, note que el valor de p para el cual $3^n d^p 2^{-np}$ es un número finito distinto de cero, se tiene cuando independientemente de n , se cumple que $3^n = 2^{np}$; este valor es $p = \log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ y justo allí, $H(\mathbb{T}, p) = d^p$.

Observe que si $t > s > 0$ son reales y $\{U_i\}_{i \in I}$ es una δ -cubierta de A , donde $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$\sum_{i \in I} (\text{diam}(U_i))^t \leq \sum_{i \in I} (\text{diam}(U_i))^{t-s} (\text{diam}(U_i))^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i \in I} (\text{diam}(U_i))^s.$$

Tomamos ínfimos y obtenemos $H(A, t, \delta) \leq \delta^{t-s} H(A, s, \delta)$. Luego, si $H(A, s) < \infty$,

$$H(A, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H(A, t, \delta) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} H(A, s, \delta) = 0 \cdot H(A, s) = 0.$$

En conclusión, si $H(A, s) < \infty$, entonces $H(A, t) = 0$ y, de igual modo, si $H(A, t) > 0$, entonces $H(A, s) = \infty$. Este hecho nos muestra que existe un único “valor crítico” p_0 para el cual la función $H(A, p_0)$ cambia de ∞ a 0, como se muestra en la siguiente figura

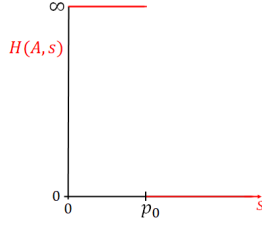


Figura 2.7

Como resultado, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Sea $H(A, p)$ la función de $p \in [0, \infty)$ dada en la Definición 2.4.4. Entonces, existe un único número real $p_0 \in [0, m]$ tal que

$$H(A, p) = \begin{cases} \infty, & \text{si } p < p_0; \\ 0, & \text{si } p > p_0. \end{cases}$$

Finalmente, definimos la **dimensión de Hausdorff** o **dimensión de Hausdorff-Besicovitch** del conjunto A , como el número p_0 del Teorema 2.4.1 y lo denotaremos como $\text{Dim}_H(A)$. Este valor también puede ser expresado como sigue:

$$\text{Dim}_H(A) = \sup\{p : H(A, p) = \infty\} = \inf\{p : H(A, p) = 0\}.$$

Pongamos a prueba esta definición con el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ que se obtuvo en el Ejemplo 2, como subconjunto de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 15. Sabemos por la construcción de $\mathcal{C}$, que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto C_n está compuesto por la unión de 2^n segmentos de longitud 3^{-n} . Consideremos $\delta = 3^{-n}$, de modo que al escoger δ -cubiertas de $\mathcal{C}$, estas consistan de los segmentos de C_n . Entonces, si $p = p_0 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, obtenemos que $H(\mathcal{C}, p_0, 3^{-n}) \leq 2^n 3^{-np_0} = 1$. De donde, $H(\mathcal{C}, p_0) \leq 1$, cuando $n \rightarrow \infty$. Veamos ahora que $H(\mathcal{C}, p_0) \geq \frac{1}{2}$. Para ello, mostremos que

$$\sum_{i \in I} (\text{diam}(U_i))^{p_0} \geq 3^{-p_0}, \quad (2.3)$$

para cualquier δ -cubierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{C}$. Por la compacidad de $\mathcal{C}$, es suficiente mostrar (2.3) para cualquier colección $\{U_i\}_{i \in I}$ de subintervalos cerrados de $[0, 1]$ tales que $U_i \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, para cada $i \in I$. Para cada U_i , tomemos un entero k tal que $3^{-(k+1)} \leq \text{diam}(U_i) < 3^{-k}$. Entonces, U_i intersecta, a lo más, uno de los 2^k segmentos que conforman a C_k . Más aún, si $j \geq k$, por la construcción de $\mathcal{C}$, U_i intersecta máximo 2^{j-k} segmentos de los que conforman a C_j y, en dicho caso, $2^{j-k} = 2^j 3^{-p_0 k} \leq 2^j 3^{p_0} (\text{diam}(U_i))^{p_0}$. Escogemos j lo suficientemente grande para que $3^{-(j+1)} \leq \text{diam}(U_i)$ para todo U_i , y dado que para cada uno de los 2^j segmentos de longitud 3^{-j} que conforman a C_j , existe un conjunto de $\{U_i\}_{i \in I}$ que lo intersecta, obtenemos $2^j \leq \sum_{i \in I} 2^j 3^{p_0} (\text{diam}(U_i))^{p_0}$; de donde, $H(\mathcal{C}, p_0) \geq 3^{-p_0} = \frac{1}{2}$. Así, por Teorema 2.4.1, $p_0 = \text{Dim}_H(\mathcal{C})$.

Veamos ahora la construcción de dimensiones fractales alternas y su relación con la dimensión de Hausdorff.

Sean X un espacio métrico completo, $A \in \mathcal{H}(X)$ y $N_\epsilon(A)$ el menor entero $M > 0$ tales que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^M B_d(x_n, \epsilon)$, para algún conjunto $\{x_n : n = 1, 2, \dots, M\} \subseteq X$. Usando la compacidad de A se tiene que el número $N_\epsilon(A)$ siempre existe. La idea intuitiva es que un conjunto A tiene dimensión fractal D si

$$N_\epsilon(A) \approx C \epsilon^{-D}, \quad (2.4)$$

para alguna constante positiva C , donde “ $\approx$ ” se utiliza de la siguiente manera: si $f(\epsilon)$ y $g(\epsilon)$ son funciones real-valuadas de la variable positiva ϵ , entonces $f(\epsilon) \approx g(\epsilon)$

significa que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(f(\epsilon))}{\ln(g(\epsilon))} = 1$. De esta manera, si resolvemos para D en 2.4, obtenemos

$$D \approx \frac{\ln(N_\epsilon(A)) - \ln(C)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}.$$

En general se tiene la siguiente definición:

Definición 2.4.5. Sea A un subconjunto acotado no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sea $N_\epsilon(A)$ el menor número de conjuntos de diámetro a lo más $\epsilon > 0$ necesarios para cubrir a A . Definimos la **dimensión inferior** y **superior** de **box-counting** de A como:

$$\begin{aligned} \underline{Dim}_B(A) &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\epsilon(A))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} \\ \overline{Dim}_B(A) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\epsilon(A))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}. \end{aligned}$$

Si ambos límites son iguales, llamaremos **dimensión box-counting** de A al valor común

$$Dim_B(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\epsilon(A))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}.$$

Por definición se sigue que $\underline{Dim}_B(A) \leq \overline{Dim}_B(A)$.

Al desarrollar la teoría general de la dimensión de box-counting, se asume que los conjuntos considerados son no vacíos y están acotados, lo cual evita problemas con $\ln(0)$ y $\ln(\infty)$. Existen otras versiones de la definición de dimensión box-counting que a veces resultan más convenientes de usar y se obtienen reemplazando a $N_\epsilon(A)$ por:

(1) El menor número de bolas abiertas/cerradas de radio ϵ con centros en $\mathbb{R}^n$ necesarias para cubrir a A ;

(2) El menor número de bolas abiertas/cerradas de radio ϵ con centros en A necesarias para cubrir a A ;

(3) El mayor cardinal de los conjuntos $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $d_u(x_i, x_j) \geq \epsilon$, para cada $1 \leq i, j \leq k$;

(4) El mayor número de bolas abiertas/cerradas disjuntas que poseen radio ϵ y centros en A ;

(5) N_0 dado como sigue. Considere la colección de cajas en la malla de ϵ -coordenadas de $\mathbb{R}^n$, es decir, cajas de la forma $[m_1\epsilon, (m_1 + 1)\epsilon] \times \dots \times [m_n\epsilon, (m_n + 1)\epsilon]$, donde

$m_1, m_2, \dots, m_n$ son enteros. N_0 denota el número de cajas de la ϵ -malla que interseccan a A .

Esta lista podría extenderse aún más; en la práctica se adopta la definición más conveniente para una aplicación particular (puede indagar sobre estas definiciones equivalentes en [14]). Vale la pena notar, por ejemplo, que para cada límite en la Definición 2.4.5, es suficiente considerar límites cuando ϵ tiende a 0 a través de cualquier sucesión decreciente ϵ_k tal que $\epsilon_{k+1} \geq r\epsilon_k$ para alguna constante $0 < r < 1$; en particular para $\epsilon_k = r^k$. Para verificar esto, note que si $\epsilon_{k+1} \leq \epsilon < \epsilon_k$, entonces, tomando $N_\epsilon(A)$ como el menor número de conjuntos que puede tener una ϵ -cubierta de A , resulta

$$\frac{\ln(N_\epsilon(A))}{-\ln(\epsilon)} \leq \frac{\ln(N_{\epsilon_{k+1}}(A))}{-\ln(\epsilon)} = \frac{\ln(N_{\epsilon_{k+1}}(A))}{-\ln(\epsilon_{k+1}) + \ln(\frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k})} \leq \frac{\ln(N_{\epsilon_{k+1}}(A))}{-\ln(\epsilon_{k+1}) + \ln(r)}.$$

Luego,

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\epsilon(A))}{-\ln(\epsilon)} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_{\epsilon_k}(A))}{-\ln(\epsilon_k)}.$$

Se obtiene la igualdad teniendo en cuenta que para $\epsilon < \epsilon_k$, se sigue $N_\epsilon(A) \geq N_{\epsilon_k}(A)$.

Por otro lado, si $\epsilon_{k+1} < \epsilon \leq \epsilon_k$, un argumento similar demuestra que

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\epsilon(A))}{-\ln(\epsilon)} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_{\epsilon_k}(A))}{-\ln(\epsilon_k)}.$$

Debido a lo anterior se tienen los siguientes resultados, los cuales facilitan el cálculo de la dimensión box-counting de un subconjunto acotado A de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.4.2. Sea A un subconjunto acotado y no vacío de $\mathbb{R}^n$. Sea $\epsilon_n = kr^n$ para números reales $0 < r < 1$ y $k > 0$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\text{Dim}_B(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_{\epsilon_n}(A))}{\ln(\frac{1}{\epsilon_n})},$$

siempre que este límite exista.

Demostración. Véase [5], página 174. □

Lema 2.4.3. Sea A un subconjunto acotado y no vacío de $\mathbb{R}^n$. Si cubrimos a $\mathbb{R}^n$ con una ϵ -malla, donde $\epsilon = \frac{1}{2^n}$, y $N_n(A)$ denota el número de cubos de lado $\frac{1}{2^n}$ que

intersectan a A , entonces

$$Dim_B(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_n(A))}{\ln(2^n)},$$

siempre que este límite exista.

Demostración. Véase [5], página 175. □

Podemos pensar que la dimensión box-counting indica la eficiencia con la que un conjunto puede cubrirse con pequeños conjuntos de igual medida, mientras que para la dimensión de Hausdorff intervienen cubiertas con conjuntos de medida variable. En este sentido, la dimensión box-counting es de mayor utilidad práctica, y es de hecho la más empleada por métodos computacionales. Pero, siguiendo las investigaciones de K. Falconer, el cual hace depender de ciertas propiedades a cualquier definición razonable de dimensión para que resulte matemáticamente manipulable, se tienen diferencias en la dimensión box-counting, ya que no satisface la propiedad que Falconer denomina **estabilidad contable**, a saber: si $A_1, A_2, \dots$ es una sucesión contable de subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$, entonces $Dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{Dim_B(A_i)\}$.

Veamos un ejemplo, pero antes mostremos la siguiente proposición.

Proposición 2.4.4. $\underline{Dim}_B(\bar{A}) = \underline{Dim}_B(A)$ y $\overline{Dim}_B(\bar{A}) = \overline{Dim}_B(A)$ para todo subconjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $A_1, A_2, \dots, A_k$ una colección finita de bolas cerradas de radio ϵ tal que el conjunto $C = \bigcup_{i=1}^k A_i$ contiene a A . Como C es cerrado, también contiene a $\bar{A}$. Por tanto, el menor número de bolas cerradas de radio ϵ requeridos para cubrir a A también es el requerido para cubrir a $\bar{A}$. De aquí se sigue el resultado. □

Si A es el conjunto de números racionales en el intervalo $[0, 1]$, entonces $\bar{A} = [0, 1]$. Utilizando el Lema 2.4.3 se obtiene fácilmente que $Dim_B([0, 1]) = 1$, de modo que $\underline{Dim}_B(A) = \overline{Dim}_B(A) = 1$. Se puede ver fácilmente que la dimensión box-counting de cada conjunto de la forma $\{x\}$, donde $x \in A$, es cero. Esto indica que la unión contable de los conjuntos $\{x\}$ es A y posee dimensión box-counting 1, pero se tiene $\sup\{Dim_B(\{x\}) : x \in A\} = 0$, lo cual muestra que en este caso no se cumple la

estabilidad contable. Puede encontrarse más información sobre las propiedades de Dim_H y Dim_B en [10, 14].

Veamos ahora un ejemplo donde $\underline{Dim}_B$ no satisfaga la estabilidad contable y un ejemplo donde se calcula $Dim_B(\mathcal{K})$.

Ejemplo 16. Empezamos construyendo un conjunto A tal que $\underline{Dim}_B(A) < \overline{Dim}_B(A)$. Basándonos en la construcción del conjunto de Cantor, eliminamos los $\frac{3}{5}$ medios de los intervalos en ciertas escalas o etapas en lugar de los $\frac{1}{3}$ medios. Más preciso: sea $k_n = 10^n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, y sea $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$, donde $A_0 = [0, 1]$ y

- para $k_0 \leq k \leq k_1$, $k_2 < k \leq k_3$, $k_4 < k \leq k_5, \dots$, cada A_k se obtiene eliminando el $\frac{1}{3}$ medio de cada intervalo en A_{k-1} ;
- para $k_1 \leq k \leq k_2$, $k_3 < k \leq k_4$, $k_5 < k \leq k_6, \dots$, cada A_k se obtiene eliminando los $\frac{3}{5}$ medio de cada intervalo en A_{k-1} .

Para calcular la dimensión inferior de box-counting, definimos $N_\epsilon(A)$ como el menor número de intervalos cerrados de longitud ϵ necesarios para cubrir a A . Si n es par, entonces A_k está compuesta por 2^{k_n} intervalos, todos de longitud

$$\epsilon_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{5}\right)^{k_2-k_1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k_3-k_2} \left(\frac{1}{5}\right)^{k_4-k_3} \cdots \left(\frac{1}{3}\right)^{k_{n-1}-k_{n-2}} \left(\frac{1}{5}\right)^{k_n-k_{n-1}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{k_n-k_{n-1}}.$$

Tomando estos intervalos como una cubierta de A , se tiene que $N_\epsilon(A) \leq N_{\epsilon_n}(A)$, por lo cual

$$\begin{aligned} \underline{Dim}_B(A) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_{\epsilon_n}(A))}{-\ln(\epsilon_n)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{k_n})}{\ln(5^{k_n-k_{n-1}})} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n \ln(2)}{(k_n - k_{n-1}) \ln(5)} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{10k_{n-1} \ln(2)}{9k_{n-1} \ln(5)} \\ &= \frac{10 \ln(2)}{9 \ln(5)}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si n es impar, entonces A_{k_n} está compuesta por 2^{k_n} intervalos, todos de longitud

$$\epsilon_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{5}\right)^{k_2-k_1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k_3-k_2} \cdots \left(\frac{1}{5}\right)^{k_{n-1}-k_{n-2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{k_n-k_{n-1}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{k_{n-1}} \left(\frac{1}{3}\right)^{k_n-k_{n-1}}.$$

Note que cualquier intervalo de longitud ϵ_n intersecta como máximo dos intervalos en A_{k_n} y como A posee puntos en cada intervalo de A_{k_n} , se tiene que $N_\epsilon(A) \geq \frac{N_{\epsilon_n}(A)}{2}$, por lo cual

$$\begin{aligned} \overline{Dim}_B(A) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_{\epsilon_n}(A))}{-\ln(\epsilon_n)} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{2^{k_n}}{2}\right)}{\ln(5^{k_{n-1}} 3^{k_n - k_{n-1}})} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n \ln(2) - \ln(2)}{k_{n-1} \ln(5) (k_n - k_{n-1}) \ln(3)} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{10k_{n-1} \ln(2) - \ln(2)}{k_{n-1} \ln(5) + 9k_{n-1} \ln(3)} \\ &= \frac{10 \ln(2)}{\ln(5) + 9 \ln(3)} \geq \frac{10 \ln(2)}{11 \ln(3)}. \end{aligned}$$

Como $\frac{10 \ln(2)}{9 \ln(5)} < \frac{10 \ln(2)}{11 \ln(3)}$, se sigue que $\underline{Dim}_B(A) < \overline{Dim}_B(A)$.

Construyamos un segundo conjunto E de la misma manera que A , con la diferencia de que $E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$, donde $E_0 = [2, 3]$ (para que $A \cap E = \emptyset$) y los intervalos que conforma E_k son complementarios a los de A_k . Es decir, realizamos eliminaciones correspondientes a los complementos de los $\frac{1}{3}$ medios y los $\frac{2}{3}$ medios de cada E_k . Un procedimiento similar al anterior nos lleva a concluir que $\underline{Dim}_B(A), \underline{Dim}_B(E) \leq \frac{10 \ln(2)}{9 \ln(5)}$ y $\underline{Dim}_B(A \cup E) > \frac{10 \ln(2)}{9 \ln(5)}$. De donde, $\underline{Dim}_B(A \cup E) > \sup\{\underline{Dim}_B(A), \underline{Dim}_B(E)\}$.

Ejemplo 17. Consideremos la curva de Koch obtenida por el SIF en el Ejemplo 8. Sea $N_\epsilon(\mathcal{K})$ el menor número de conjuntos de diámetro a lo sumo $\epsilon > 0$ necesarios para cubrir a $\mathcal{K}$. Por construcción geométrica, este fractal puede ser definido como $\mathcal{K} = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, donde K_j está conformado por 4^j segmentos de recta de longitud 3^{-j} , como se puede ver en cada iteración del compacto $I \times \{0\}$ bajo la función F . Ahora, escojamos $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de tal manera que $3^{-j} < \epsilon \leq 3^{-j+1}$. Luego, para cada segmento de recta de K_j tomemos un disco cerrado de diámetro $\epsilon_j = 3^{-j}$ y centro en el punto medio del segmento, y sea E la colección de los 4^j discos formados de esta forma, los cuales forman una cubierta para $\mathcal{K}$. En consecuencia, como $N_\epsilon(\mathcal{K}) \leq 4^j$, obtenemos

$$\overline{Dim}_B(\mathcal{K}) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\epsilon(\mathcal{K}))}{-\ln(\epsilon)} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln(4^j)}{\ln(3^j)} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}.$$

Por otra parte, si $3^{-j-1} \leq \epsilon < 3^{-j}$, cualquiera de los $N_\epsilon(\mathcal{K})$ conjuntos intersecta, a lo sumo, tres discos de E . Luego, se requieren mínimo $\frac{4^j}{3}$ discos de diámetro ϵ para

cubrir a $\mathcal{K}$, por lo que $N_\epsilon(\mathcal{K}) \geq \frac{4^j}{3} \geq 4^{j-1}$ y así,

$$\underline{Dim}_B(\mathcal{K}) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\epsilon(\mathcal{K}))}{-\ln(\epsilon)} \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln(4^{j-1})}{\ln(3^{j+1})} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}.$$

En conclusión, $\underline{Dim}_B(\mathcal{K}) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$.

El siguiente resultado muestra que las dimensiones descritas hasta el momento, así como muchas otras, se encuentran ordenadas.

Teorema 2.4.5. Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$Dim_T(A) \leq Dim_H(A) \leq \underline{Dim}_B(A) \leq \overline{Dim}_B(A) \leq n.$$

Demostración. El subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ puede ser encerrado en una caja grande C , de modo que al contar las cajas de la ϵ -malla, se tiene $N_\epsilon(A) \leq N_\epsilon(C) \leq k\epsilon^{-n}$ para alguna constante k . En la desigualdad $N_\epsilon(A) \leq c\epsilon^{-n}$ aplicamos logaritmo para obtener que $\frac{\ln(N_\epsilon(A)) - \ln(k)}{\ln(\epsilon)} \leq n$ y por ende,

$$\overline{Dim}_B(A) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\epsilon(A)) - \ln(k)}{\ln(\epsilon)} \leq n.$$

Mostremos que $Dim_H(A) \leq \underline{Dim}_B(A)$. Consideremos una cubierta para A compuesta por $N_\epsilon(A)$ conjuntos de diámetro ϵ . Por definición de $H(A, p, \epsilon)$ tenemos que $H(A, p, \epsilon) \leq N_\epsilon(A)\epsilon^p$. Luego,

$$H(A, p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H(A, p, \epsilon) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} N_\epsilon(A)\epsilon^p.$$

Tomemos los valores de p para los cuales $H(A, p) \geq 1$. Entonces para ϵ suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} 1 \leq H(A, p) &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} N_\epsilon(A)\epsilon^p \implies 1 \leq N_\epsilon(A)\epsilon^p \\ &\implies 0 \leq \ln(N_\epsilon(A)) + p \ln(\epsilon) \\ &\implies p \leq \frac{\ln(N_\epsilon(A))}{-\ln(\epsilon)} \\ &\implies p \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\epsilon(A))}{-\ln(\epsilon)} = \underline{Dim}_B(A). \end{aligned}$$

Por Teorema 2.4.1, esta última desigualdad se tiene para todo $p < Dim_H(A)$, por lo que $Dim_H(A) \leq \underline{Dim}_B(A)$. Para demostrar la desigualdad $Dim_T(A) \leq Dim_H(A)$,

son necesarios varios conceptos de la teoría de la medida, los cuales no se incluyen en este trabajo; pero una prueba basada en la **integración de Lebesgue** puede encontrarse en [11]. $\square$

Veamos ahora una forma relativamente fácil de calcular una dimensión fractal para el atractor de un SIF. Para ello tengamos en cuenta la siguiente definición:

Definición 2.4.6. Sea $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF con atractor A .

1. Diremos que el SIF es **totalmente desconexo**, si cada punto de su atractor posee una única dirección o, en otras palabras, si la respectiva función de direccionamiento es un homeomorfismo;
2. Diremos que el SIF satisface la **condición del conjunto abierto de Moran**⁴ (**OSC**), si existe un conjunto abierto no vacío V , que llamaremos **conjunto abierto de Moran**, tal que $\bigcup_{i=1}^N f_i(V) \subseteq V$ y $f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset$, para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ con $i \neq j$;
3. Diremos que el SIF se **superpone** si no es totalmente desconexo y tampoco satisface la OSC;
4. Si cada f_i es una similaridad con factor de escala k_i , se define la **dimensión de similaridad** de A , como el número s que satisface la ecuación $\sum_{i=1}^N (k_i)^s = 1$ y sera denotada por $Dim_S(A)$.

El inciso (4) de la Definición 2.4.6 se justifica como sigue: dadas las constantes $k_i \in (0, 1)$, donde $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, definimos la función $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ por $f(s) = \sum_{i=1}^N (k_i)^s$ para todo $s \in [0, \infty)$. Esta función es continua, $f(0) = N \geq 1$ y $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0 < 1$. Entonces, utilizando el teorema del valor intermedio y teniendo en cuenta que f es estrictamente decreciente, se demuestra que existe solo una solución s para el cual $f(s) = \sum_{i=1}^N (k_i)^s = 1$.

⁴P. A. P. Moran (1917-1988) fue un estadístico australiano que hizo importantes contribuciones a la teoría de la probabilidad y su aplicación a la genética poblacional y evolutiva. También escribió algunos artículos sobre la medida de Hausdorff durante la guerra.

Veamos tres ejemplos: el SIF $\{\mathbb{R}; \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$ posee atractor $[0, 1]$ y se superpone; el SIF del Ejemplo 2 es totalmente desconexo y $V = (0, 1)$ es un conjunto abierto de Moran; el SIF del Ejemplo 8 no es totalmente desconexo, pero tiene como conjunto abierto de Moran al conjunto de puntos interiores del triangulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$.

Proposición 2.4.6. Sea $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF con atractor A y $r_1, \dots, r_N$ factores de contracción de $f_1, \dots, f_N$, respectivamente. Si dicho SIF es totalmente desconexo, entonces satisface la OSC.

Demostración. Tengamos en cuenta que el conjunto A , el cual es cerrado, satisface las dos condiciones de la OSC. Ahora, sea

$$d = \min \left\{ \bar{d}(f_i(A), f_j(A)) : i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j \right\}.$$

Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $r_i \epsilon < \frac{d}{2}$, con $i = 1, \dots, N$ y definamos $V = \bigcup_{x \in A} B(x; \epsilon)$. Observe que para cada $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$f_i(V) = \bigcup_{x \in A} f_i(B(x; \epsilon)) = \bigcup_{x \in A} B(f_i(x); \epsilon) = \bigcup_{y \in f_i(A)} B(y; r_i \epsilon),$$

de modo que $f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset$, si $i \neq j$. Además, $f_i(V) \subseteq V$ para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, mostrando que V es un conjunto abierto de Moran. $\square$

Teorema 2.4.7. Sea $\{\mathbb{R}^n; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF con atractor A , donde cada f_i es una similaridad con factor de escala $r_i \in (0, 1)$, con $i \in \{1, \dots, N\}$. Si el SIF satisface la OSC, entonces $\dim_H(A) = \dim_B(A) = \dim_S(A)$.

Demostración. Véase [14], Teorema 9.3. $\square$

La prueba del Teorema 2.4.7 pueden adaptarse para estimar la dimension del atractor de un SIF que consta de contracciones que no son similaridades, como podemos ver en las siguientes dos proposiciones.

Proposición 2.4.8. Sean A el atractor del SIF $\{\mathbb{R}^n; f_1, \dots, f_N\}$ y $r_1, \dots, r_N$ factores de contracción de $f_1, \dots, f_N$, respectivamente. Entonces $\dim_H(A) \leq s_0$ y $\overline{\dim}_B(A) \leq s_0$, donde $\sum_{i=1}^N (r_i)^{s_0} = 1$.

Demostración. Véase [14], Proposición 9.6. $\square$

Proposición 2.4.9. Sea $\{\mathbb{R}^n; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF con atractor A . Supongamos que para cada contracción f_i , existe una constante b_i , con $0 < b_i < 1$, tal que

$$b_i |z_1 - z_2| \leq |f_i(z_1) - f_i(z_2)|,$$

para todo z_1 y z_2 en algún subconjunto cerrado $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f_i(A) \cap f_j(A) = \emptyset$, con $i \neq j$. Entonces, $\dim_H(A) \geq s_0$, donde $\sum_{i=1}^N (b_i)^{s_0} = 1$.

Demostración. Véase [14], Proposición 9.7. $\square$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 18. En la construcción de la esponja de Menger vista en la Sección 2.1, consideramos como conjunto inicial al cubo $M_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ de volumen 1. En la primera iteración, M_0 se transforma en una figura de 20 cubos, cada uno con volumen $\frac{1}{3^3}$, el cual llamamos M_1 . Así pues, se necesitan 20 contracciones $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para continuar con el proceso y obtener a $\mathcal{M}$; estas contracciones pueden definirse como $f_i(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z) + v_i$, donde $v_i \in \mathbb{R}^3$ es un vector de traslación, para cada $i \in \{1, \dots, 20\}$. Más preciso, cada f_i es una similaridad con factor de escala $r_i = \frac{1}{3}$ y conforman al SIF $\{\mathbb{R}^3; f_1, \dots, f_{20}\}$ con atractor $\mathcal{M}$. Note que el interior de M_0 es un conjunto abierto de Moran para el SIF, de modo que al aplicar el Teorema 2.4.7, se tiene $\dim_H(\mathcal{M}) = \dim_B(\mathcal{M}) = s$, donde $\sum_{i=1}^{20} (r_i)^s = 1$; esto es, $20(\frac{1}{3})^s = 1$, el cual resolvemos para obtener $s = \frac{\ln(20)}{\ln(3)}$.

De manera similar se puede demostrar que $\dim_H(\mathbb{T}) = \dim_B(\mathbb{T}) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ y $\dim_H(\mathcal{K}) = \dim_B(\mathcal{K}) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$.

En ocasiones, el mayor problema para estimar la dimensión fractal de un conjunto A , dado como atractor del SIF $\{\mathbb{R}^n; f_1, \dots, f_N\}$, es encontrar un conjunto abierto de Moran. Esto se debe a la cardinalidad de los conjuntos $f_i(A) \cap f_j(A)$, con $i \neq j$; mientras dichas intersecciones sean finitas, como hemos visto en ejemplos anteriores, no parece ser complicado encontrar un conjunto abierto de Moran. Aún así, la OSC se ha convertido en uno de los medios más aceptados para la búsqueda de conjuntos

estrictamente autosemejantes y el cálculo de la dimension fractal, razón por la cual han aparecido diversas equivalencias que buscan facilitar su aplicabilidad y dar una demostración para la siguiente afirmación:

“Un SIF $\{\mathbb{R}^n; f_1, \dots, f_N\}$ con atractor A tal que el conjunto $f_i(A) \cap f_j(A)$ es finito, con $i \neq j$, satisface la OSC”.

A pesar de los esfuerzos realizados, esto solo se ha demostrado para el caso $n = 2$, donde el SIF está formado por similaridades y A es conexo. C. Bandt y H. Rao, quienes realizan esta demostración, muestran además un ejemplo en el que la afirmación no se cumple para $n = 1$ (véase [2]).

Capítulo 3

Sistemas dinámicos y conjuntos de Julia

Cuando tratamos el estudio de los fractales es común hacer mención de dos importantes tipos: los conjuntos de Julia y el conjunto de Mandelbrot, no solo por sus peculiares y llamativas formas, sino porque representan una gran motivación para el estudio de los sistemas dinámicos complejos.

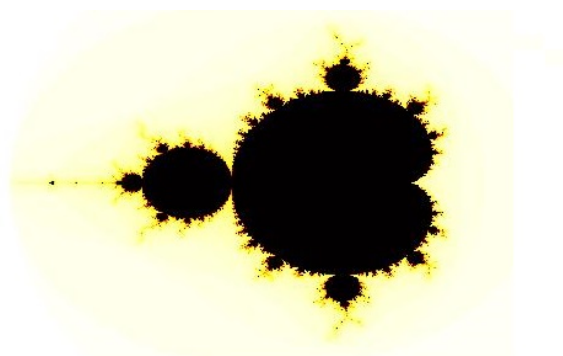


Figura 3.1: Conjunto de Mandelbrot.

En este capítulo estudiaremos las condiciones necesarias que se requieren para obtener conjuntos de Julia de polinomios complejos, como atractores de un SIF. Estas condiciones necesitan de algunos conceptos relacionados con los sistemas dinámicos, los cuales se introducen en la Sección 3.1, al igual que su relación con los SIF. Finalmente, se define formalmente el concepto de conjunto de Julia de un polinomio y se

estudian varias de sus propiedades.

3.1. Sistemas dinámicos vs. SIF

Nos centramos específicamente en los **sistemas dinámicos discretos**, de los cuales solo necesitaremos los siguientes dos ingredientes: un espacio métrico (X, d) y una función $f : X \rightarrow X$, donde es posible definir, para cada $x \in X$, una sucesión de puntos en X conocida como la **órbita** de x bajo f ,

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^{\circ 2}(x), f^{\circ 3}(x), \dots\}.$$

De este modo, diremos que el par $\{X; f\}$ es un sistema dinámico; por ejemplo, el par $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; f\}$, donde la función $f : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}$ se define como $f(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots) = \alpha_2\alpha_3\alpha_4\cdots$, es un sistema dinámico.

Estamos interesados en el comportamiento de $o(x, f)$, cuando $n \rightarrow \infty$. Veamos algunas definiciones de interés.

Definición 3.1.1. Sea $\{X; f\}$ un sistema dinámico.

1. Un **punto periódico** de f es un punto $x_0 \in X$ tal que $f^{\circ n}(x_0) = x_0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos $Per(f)$;
2. Si x_0 es un punto periódico de f y $k = \min\{n \in \mathbb{N} : f^{\circ n}(x_0) = x_0\}$, diremos que x_0 tiene **periodo** k ;
3. Llamaremos **ciclo** a la órbita de un punto periódico de f .

Definición 3.1.2. Sean $\{X; f\}$ un sistema dinámico y $x_f \in X$ un punto fijo de f . El punto x_f es llamado **punto fijo atractor** de f , si existe un número $\epsilon > 0$ tal que f es una contracción en $\bar{B}(x_f; \epsilon)$ que mapea la bola cerrada $\bar{B}(x_f; \epsilon)$ en sí misma. El punto x_f es llamado **punto fijo repulsor** de f , si existen números $\epsilon > 0$ y $r > 1$ tales que $d(f(x_f), f(y)) \geq rd(x_f, y)$ para todo $y \in \bar{B}(x_f; \epsilon)$.

Siguiendo la Definición 3.1.2, un punto periódico de f de periodo n será llamado **atractor**, si es un punto fijo atractor de $f^{\circ n}$. Decimos que un ciclo es un **ciclo**

atractor de f , si el ciclo contiene un punto periódico atractor de f . Asimismo, un punto periódico de f de periodo n es **repulsor**, si es un punto fijo repulsor de f^{on} . Además, diremos que un ciclo es un **ciclo repulsor** de f , si el ciclo contiene un punto periódico repulsor de f .

Lo anterior puede adaptarse de manera equivalente para funciones racionales definidas en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, como sigue:

Definición 3.1.3. Para un ciclo $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ de una función racional f , donde cada $z_1, z_2, \dots, z_n \neq \infty$, definimos el valor

$$\lambda := \frac{d}{dz} f^{on}(z) \big|_{z=z_1} = \frac{d}{dz} f(z_1) \frac{d}{dz} f(z_2) \cdots \frac{d}{dz} f(z_n),$$

llamado **multiplicador del ciclo**. El ciclo es llamado **ciclo atractor** si $|\lambda| < 1$, **ciclo repulsor** si $|\lambda| > 1$ y **ciclo indiferente** si $|\lambda| = 1$; aquí $|\cdot|$ es la métrica en $\hat{\mathbb{C}}$.

Por simplicidad, $|\cdot|$ seguirá siendo la métrica en $\hat{\mathbb{C}}$, a menos que se especifique lo contrario.

El siguiente ejemplo nos ayudan a intuir la relación entre un sistema dinámico y un SIF.

Ejemplo 19. Veamos una situación particular en el sistema dinámico $\{\mathbb{R}; f_\lambda\}$, donde $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ es conocida como la curva logística, utilizada para el estudio de la evolución de poblaciones en ecología (ver Figura 3.2¹). Digamos que $\lambda > \frac{43}{10}$ y consideremos las raíces de $f_\lambda(x) - 1 = 0$, las cuales son

$$a = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}} \quad \text{y} \quad 1 - a = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}.$$

Note que f_λ es creciente en el intervalo $[0, a]$ y decreciente en el intervalo $[1 - a, 1]$, más aún, las restricciones $\bar{f}_\lambda : [0, a] \rightarrow [0, 1]$ y $\hat{f}_\lambda : [1 - a, 1] \rightarrow [0, 1]$, donde $\bar{f}_\lambda(x) = f_\lambda(x)$, para todo $x \in [0, a]$ y $\hat{f}_\lambda(x) = f_\lambda(x)$, para todo $x \in [1 - a, 1]$, son biyectivas. Las funciones $g_1 : [0, 1] \rightarrow [0, a]$ y $g_2 : [0, 1] \rightarrow [1 - a, 1]$ dadas por

$$g_1(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x}{\lambda}} \quad \text{y} \quad g_2(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x}{\lambda}},$$

¹Imagen tomada de https://github.com/aglarick/Aglarick/blob/master/AplicacionLogistica_DiagramaBifurcacion_pruebas.ipynb.

para todo $x \in [0, 1]$, son las inversas de $\bar{f}_\lambda$ y $\hat{f}_\lambda$, respectivamente. Ahora bien, para $i = 1$ e $i = 2$, se tiene que $|g'_i(x)| = \frac{1}{2\lambda}(\frac{1}{4} - \frac{x}{\lambda})^{-\frac{1}{2}}$ (aquí $|\cdot|$ representa el valor absoluto). Luego, si $0 \leq x \leq 1$, entonces

$$\frac{1}{\lambda} \leq |g'_i(x)| \leq \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}} < 1.$$

Por la anterior desigualdad y el teorema del valor medio, si $x, y \in [0, 1]$, se obtiene

$$\frac{1}{\lambda} |x - y| \leq |g_i(x) - g_i(y)| \leq \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}} |x - y|.$$

Esto indica que g_1 y g_2 son contracciones en $[0, 1]$, por lo que forman un SIF con atractor $A \subseteq [0, 1]$ tal que $A = g_1(A) \cup g_2(A)$ y $g_1(A) \cap g_2(A) = \emptyset$. De donde, A es un espacio de Cantor y posee la particularidad de ser un “conjunto repulsor” para la función f_λ , es decir, las órbitas bajo f_λ de cada punto fuera de A , tienden a $\pm\infty$; veamos esto. Sea $x \notin A$. Si $x < 0$ o $x > 1$, por la forma polinomial de f_λ nos lleva a que $f_\lambda^{on}(x) \rightarrow -\infty$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por otro lado, el Lema 2.2.2 nos dice que $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{on}([0, 1])$, de modo que si $x \in [0, 1] \setminus A$, debe existir un entero positivo k tal que $x \notin F^{ok}([0, 1])$. Dado que

$$F^{ok}([0, 1]) = \bigcup \{ (g_{i_1} \circ g_{i_2} \circ \cdots \circ g_{i_k})([0, 1]) : i_1, \dots, i_k \in \{1, 2\} \},$$

la función $f_\lambda^{ok} = f_\lambda \circ f_\lambda^{o(k-1)}$ nos devuelve nuevamente al intervalo $[0, 1]$, para obtener que $f_\lambda^{ok}(x) \notin [0, 1]$. Luego, se tiene nuevamente que $f_\lambda^{on}(x) \rightarrow -\infty$, cuando $n \rightarrow \infty$.

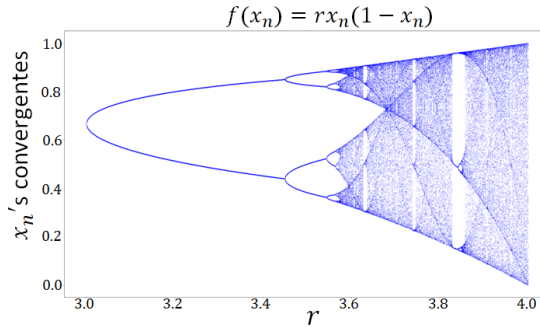


Figura 3.2: Diagrama de bifurcación.

Ejemplo 20. En el sistema dinámico $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; f\}$, donde $f : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}$ se define como $f(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots) = \alpha_2\alpha_3\alpha_4\cdots$, el código $111\overline{111}$ es un punto fijo repulsor y el código $121212\overline{12}$ es un punto fijo repulsor para $f^{\circ 2}$, de periodo 2. Veamos lo segundo: el código $121212\overline{12}$ es un punto periódico de periodo 2, puesto que

$$f^{\circ 2}(121212\overline{12}) = f(21212\overline{1}) = 121212\overline{12}.$$

Sea $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y digamos que $x_f = 121212\overline{12}$. Entonces,

$$\begin{aligned} d_c(f^{\circ 2}(x_f), f^{\circ 2}(\alpha)) &= d_c(x_f, f^{\circ 2}(\alpha)) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{|x_i - \alpha_i|}{3^{i-2}} = 9 \sum_{i=3}^{\infty} \frac{|x_i - \alpha_i|}{3^i} \\ &= 9d_c(x_f, \alpha) - (3|1 - \alpha_1| + |2 - \alpha_2|). \end{aligned}$$

Si escogemos $0 < \epsilon < \frac{1}{9}$ y tomamos $\alpha \in B_{d_c}(x_f; \epsilon)$, necesariamente $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$. Por tanto, $d_c(x_f, f^{\circ 2}(\alpha)) \geq 9d_c(x_f, \alpha)$, para todo $\alpha \in B_{d_c}(x_f; \epsilon)$.

Definición 3.1.4. Sea $\{X; f_1, \dots, f_N\}$ un SIF totalmente desconexo con atractor A . Sea $g : A \rightarrow A$ la función definida por

$$g(a) = f_{i_0}^{-1}(a) \text{ para todo } a \in A = f_1(A) \cup \cdots \cup f_N(A),$$

donde f_{i_0} es la contracción para el cual $a \in f_{i_0}(A)$. La función g es llamada **transformación de cambio** asociada a A y el sistema dinámico $\{A; g\}$ se denomina **sistema dinámico de cambio** asociado al SIF.

Recuerde que si un SIF es totalmente desconexo, entonces sus contracciones son inyectivas. Además, para cada i , se tiene que $f_i(A) \subseteq A$, por lo que la transformación de cambio y el sistema dinámico de cambio en la Definición 3.1.4, están bien definidos.

Una de las principales característica de estos sistemas dinámicos obtenidos por un SIF, es que son caóticos según Devaney², lo cual indica, entre otras cosas, que existen puntos en el atractor del SIF cuyas órbita son densas en el mismo atractor y comúnmente presentan comportamiento impredecible, en el sentido de que no convergen a un punto fijo y tampoco se escapan al infinito, cuando iteramos infinitas veces. Con

²Un sistema dinámico $\{X; f\}$ se dice caótico si es transitivo, sensible a las condiciones iniciales y el conjunto $Per(f)$ es denso en X .

esto en mente, es posible demostrar que un sistema dinámico de cambio asociado a un SIF totalmente desconexo, de dos o más contracciones, es caótico; véase por ejemplo [5], pág. 167.

3.2. Conjuntos de Julia

En lo sucesivo trabajaremos con el sistema dinámico $\{\hat{\mathbb{C}}; P\}$, donde $P : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es un polinomio complejo de grado mayor que 1 y, a menos que se especifique lo contrario, para cada $B \subseteq \hat{\mathbb{C}}$, denotaremos por $P^{-1}(B)$ al conjunto de elementos en $\hat{\mathbb{C}}$ cuyas imágenes bajo P están en B . En este caso se considera al elemento $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ como un punto fijo de P ; más aún, es un punto fijo atractor de P .

Para motivar, empecemos considerando al polinomio $P(z) = z^2$. Teniendo en cuenta la forma polar del complejo z , se observa que si el módulo de z es menor o mayor que 1, la órbita $o(z, f)$ converge al origen o a ∞ , respectivamente. Es decir, las órbitas de los puntos en el interior del disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ convergen al origen. La frontera del conjunto D se le llama conjunto de Julia de P , la cual separa al conjunto formado por aquellos complejos cuyas órbitas convergen al origen, del conjunto de complejos cuyas órbitas convergen a ∞ . Las órbitas en la frontera de D no se escapan al origen y tampoco a ∞ , se mantienen en la circunferencia de radio 1. De este modo, al estar en la esfera de Riemann, podemos pensar que dicho conjunto representa el ecuador de un globo.

Definición 3.2.1. Sea P un polinomio de grado mayor que 1. Denotemos por $K(P)$ al conjunto de puntos en $\mathbb{C}$ cuyas órbitas no convergen a ∞ , esto es,

$$K(P) = \{z \in \mathbb{C} : o(z, f) \text{ es acotada}\}.$$

Este conjunto es llamado **conjunto de Julia lleno** de P . A la frontera de $K(P)$ le diremos **conjunto de Julia** de P y será denotado por J_P . El complemento del conjunto de Julia es llamado **conjunto de Fatou** o **conjunto de estabilidad** de P , el cual denotaremos F_P .

Para una mejor comprensión de los conjuntos de Julia, presentamos a continuación una caracterización importante que involucra una versión del Teorema de Montel y una forma de interpretarlos visualmente. Veamos algunos resultados previos.

Proposición 3.2.1. Sea $z_0 \neq \infty$ un punto fijo atractor de un polinomio P . Entonces, existe un entorno U de z_0 tal que la sucesión $\{P^{\circ n}(z)\}_n$ converge a z_0 para todo $z \in U$.

Demostración. Se sigue de la definición del multiplicador del ciclo λ y la definición de derivada. $\square$

Lema 3.2.2. Dado un polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$, con $a_n \neq 0$, existe un número r tal que si $|z| \geq r$, entonces $|P(z)| \geq 2|z|$.

Demostración. Escojamos r suficientemente grande de tal manera que si $|z| \geq r$, entonces $\frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|$ y $\frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + a_0$. Luego, si $|z| \geq r$, obtenemos

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + a_0) \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|,$$

lo que termina la prueba. $\square$

En particular, si $|P^{\circ m}(z)| \geq r$ para algún entero $m \geq 0$, aplicando inductivamente lo anterior, concluimos que la órbita $o(z, P)$ converge a ∞ . Con esto conseguimos que si $|z| \geq r$ y t es un entero positivo, entonces $o(z, P)$ converge a ∞ si, y solo si, $o(z, P^{\circ t})$ converge a ∞ , es decir, $K(P) = K(P^{\circ t})$ y por tanto, $J_P = J_{P^{\circ t}}$.

Proposición 3.2.3. Sea P un polinomio. Entonces $K(P)$ y J_P son no vacíos, compactos y $J_P \subseteq K(P)$.

Demostración. La ecuación $P(z) = z$ posee al menos una solución z_0 . Entonces $P^{\circ n}(z_0) = z_0$ para cada n , así que $z_0 \in K(P)$. Es decir, $K(P) \neq \emptyset$. Ahora, si tomamos un complejo z_1 en el complemento de $K(P)$, existe un punto en el segmento $\lambda z_0 + (1 - \lambda)z_1$, con $0 \leq \lambda \leq 1$, que vive en la frontera de $K(P)$; dicho punto es hallado si consideramos el valor ínfimo de λ para el cual $\lambda z_0 + (1 - \lambda)z_1 \in K(P)$. De donde, $J_P \neq \emptyset$.

Notemos que en este caso es suficiente mostrar que tanto $K(P)$ como J_P son cerrado y acotados. Por Lema 3.2.2, existe un número r tal que $K(P)$ está contenido en el disco $B(0, r)$, de modo $K(P)$ y, en consecuencia J_P , están acotados. Por otra parte, si $z \notin K(P)$, entonces $P^{ok}(z)$ converge a ∞ , por lo que $|P^{om}(z)| > r$ para algún entero positivo m . Por la continuidad de P^{om} , se tiene también que $|P^{om}(w)| > r$ para todo w en un disco suficientemente pequeño centrado en z , digamos $B(z, \epsilon)$. Nuevamente por Lema 3.2.2, se obtiene que $P^{ok}(w)$ converge a ∞ , para todo $w \in B(z, \epsilon)$, dando como resultado que $w \notin K(P)$. Hemos mostrado que el complemento de $K(P)$ es abierto, por lo que $K(P)$ es cerrado, y al ser J_P su frontera, este también es cerrado y está contenido en $K(P)$. $\square$

El siguiente resultado muestra una propiedad clásica de los conjuntos de Julia.

Proposición 3.2.4. J_P y F_P son completamente invariantes. Esto es,

$$J_P = P(J_P) = P^{-1}(J_P) \quad \text{y} \quad F_P = P(F_P) = P^{-1}(F_P).$$

Demostración. Sea $z \in J_P$. Por definición, $z \in \partial K(P)$, lo cual implica que en cualquier bola abierta centrada en z , encontramos elementos tanto de $K(P)$ como de su complemento. Más aún, podemos encontrar una sucesión $\{w_n\}_n$, con $w_n \rightarrow z$, tal que $o(w_n, P)$ converge a ∞ , para cada $n \in \mathbb{N}$. Dicho de otro modo, $P^k(P(z))$ no converge a ∞ y $P^k(P(w_n))$ converge a ∞ , cuando $k \rightarrow \infty$. Por la continuidad de P , tenemos que $P(w_n)$ puede acercarse a $P(z)$ tanto como se quiera, así que $P(z) \in J_P$. Esto muestra que $P(J_P) \subseteq J_P$, y dado que P es sobreyectiva, se tiene $J_P \subseteq P^{-1}(P(J_P)) \subseteq P^{-1}(J_P)$. Un argumento similar se emplea para obtener que $P^{-1}(J_P) \subseteq J_P$ y $J_P = P(P^{-1}(J_P)) \subseteq P(J_P)$.

Por otra parte, como F_P es el complemento de J_P , entonces también es completamente invariante, ya que de no ser así, J_P tampoco lo sería. $\square$

Cabe resaltar que $K(P)$ también es completamente invariante, ya que para puntos que no están en su frontera, $P^k(z)$ no converge a ∞ si, y solo si, $P^{k-1}(P(z))$ no converge a ∞ .

Basados en la teoría de variable compleja (véase por ejemplo [24]), la subsucesión en la siguiente definición converge uniformemente, ya sea a la función $f = \infty$ o a una función analítica.

Definición 3.2.2. Sea U un subconjunto abierto de $\hat{\mathbb{C}}$ y sea $g_i : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, con $i = 0, 1, 2, \dots$, una familia de funciones analíticas en U . Decimos que la familia $\{g_i\}$ es **normal** en U , si toda sucesión de funciones $\{g_{k_n}\}_n$, seleccionada de $\{g_i\}$, posee una subsucesión que converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto de U . Decimos además que la familia $\{g_i\}$ es **normal en el punto** $w \in U$, si existe un abierto $V \subseteq U$ tal que $w \in V$ y $\{g_i\}$ es normal en V .

El siguiente teorema fue la herramienta fundamental para los trabajos de G. Julia y P. Fatou sobre la dinámica compleja y representa el punto de partida de una teoría factible sobre los conjuntos de Julia basada en la teoría de variable compleja.

Teorema 3.2.5 (Montel). Sea $\{g_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones analíticas complejas, definidas en conjunto abierto $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Si $\{g_i\}_{i \in I}$ no es normal en U , entonces para todo $z \in \hat{\mathbb{C}}$, con máximo dos excepciones, existen $w \in U$ e $i_0 \in I$ tal que $g_{i_0}(w) = z$.

Demostración. Véase [17], pág. 7. □

Proposición 3.2.6. $J_P = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \{P^{on}\}_{n=0}^\infty \text{ no es normal en } z\}$.

Demostración. Sea $z \in J_P$. Note que para cualquier entorno de z , V , existen puntos $w \in V$ tal que $o(w, P)$ converge a infinito, mientras que $o(z, P)$ se mantiene acotada, de modo que si tomamos una sucesión de la familia $\{P^{on}\}_{n=0}^\infty$, no puede haber subsucesión que converge uniformemente sobre V . De donde, $\{P^{on}\}_{n=0}^\infty$ no es normal en z . Recíprocamente, sea $z \in \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \{P^{on}\}_{n=0}^\infty \text{ no es normal en } z\}$ y supongamos que $z \notin J_P$. Si $z \in \text{int}K(P)$, tomando un conjunto abierto V tal que $z \in V \subseteq \text{int}K(P)$, se tiene que $P^{on}(w) \in K(P)$ para todo $w \in V$ y todo n , de manera que por Teorema 3.2.5, la familia $\{P^{on}\}_{n=0}^\infty$ es normal en w ; contradicción. Ahora, si $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus K(P)$, tomando el número r dado por el Lema 3.2.2, se tiene que $|P^{on}(z)| > r$ para algún $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$; más aún, $|P^{on}(w)| > r$ para todo w en algún entorno V de z . Luego, por Lema 3.2.2, la sucesión de funciones $(P^{on})_n$ converge uniformemente a

∞ , sobre V , mostrado así que la familia $\{P^{on}\}_{n=0}^{\infty}$ es normal en w ; contradicción. Necesariamente $z \in J_P$. $\square$

Lema 3.2.7. Sean P un polinomio, $w \in J_P$ y U un entorno de w . Entonces, para cada $j = 1, 2, \dots$, el conjunto

$$W := \bigcup_{k=j}^{\infty} P^{\circ k}(U),$$

coincide con $\hat{\mathbb{C}} \setminus V$, donde V consta de máximo dos puntos, que no están en J_P y son independientes de w y U .

Demostración. Por Proposición 3.2.6, la familia $\{P^{\circ k}\}_{k=j}^{\infty}$ no es normal en w . Luego, por Teorema 3.2.5, W coincide con $\hat{\mathbb{C}} \setminus V$, donde V consta de máximo dos puntos. Veamos que si V posee algún punto, este no puede estar en J_P . Supongamos que $V = \{v\}$, es decir, $v \notin W$. Note que si $v = \infty$, claramente $v \notin J_P$. Ahora, si $P(z_0) = v$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$, se tiene que $z_0 \notin W$, pues $P(W) \subset W$. Por ende, $z_0 = v$. Escogiendo $m > 1$ como el grado del polinomio P , la única solución de $P(z) - v = 0$ es v , de modo que $P(z) - v = c(z - v)^m$ para alguna constante $c \in \mathbb{C}$ (**Teorema Fundamental del Álgebra**). Dado que $P'(z) = mc(z - v)^{m-1}$, resulta que v es un punto fijo atractor, ya que $P'(v) = 0$. Así, debido a la Proposición 3.2.1, existe un entorno de v en donde $\{P^{on}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función constante $f(z) = v$. De donde, $\{P^{on}\}$ es normal en v y por tanto, $v \notin J_P$. Finalmente, note que v solo depende del polinomio P . De igual modo se procede para el caso en el que $V = \{v_0, v_1\}$. $\square$

Definición 3.2.3. Sea $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ un punto fijo atractor de P . Se define la **cuenca de atracción** de z_0 como el conjunto $A_{z_0} := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : P^{on}(z) \rightarrow z_0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$.

Cada una de estas cuencas de atracción es abierta en $\hat{\mathbb{C}}$ y su verificación no conlleva mucha dificultad.

Lema 3.2.8. Si $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ es un punto fijo atractor de P , entonces $\partial A_{z_0} = J_P$.

Demostración. Si $z \in J_P$, por Proposición 3.2.4, se sigue que $P^{\circ k} \in J_P$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $w \in \mathbb{C}$ un punto fijo atractor de P y supongamos que $z \in A_w$. Si $w = \infty$,

entonces $P^{\circ k}(z)$ converge a ∞ ; contradicción, pues $z \in J_P$. Si $w \neq \infty$, tendríamos elementos de J_P tan cercanos a w como queramos, y a la vez, elementos que no están en $K(P)$, lo que nos lleva nuevamente a una contradicción. Se concluye que $z \notin A_w$. Ahora, consideremos un entorno cualquiera de z , digamos V . Por Lema 3.2.7, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $P^{\circ k}(V) \cap A_w \neq \emptyset$. Luego, existe algún punto v perteneciente tanto a $P^{\circ k}(V)$ como a A_w ; esto es, $v = P^{\circ k}(\tilde{v})$ para algún $\tilde{v} \in V$ y $P^{\circ k}(\tilde{v}) \rightarrow w$, por ende, $\tilde{v} \in A_w$ y así, $V \cap A_w \neq \emptyset$. Como V se toma de manera arbitraria, podemos encontrar elementos de A_w cercanos a z , tanto como se quiera, obteniendo que $z \in \overline{A_w}$. Por tanto, $z \in \partial A_w$, mostrando que $J_P \subseteq \partial A_w$.

Sea ahora $z \in \partial A_w$ y supongamos que $z \notin J_P$. Entonces z posee un entorno V en donde la familia $\{P^{\circ n}\}_{n=0}^{\infty}$ es normal. Sin pérdida de generalidad, tomemos a V abierto y conexo, para que la sucesión $\{P^{\circ k}\}_k$ posea una subsucesión que converge uniformemente a ∞ o a una función analítica, sobre V . La subsucesión converge a w en $V \cap A_w$, que es un subconjunto abierto y no vacío de V ; esto es, la función límite es constante en $V \cap A_w$ y al ser analítica en V , debe ser constante en V , lo cual muestra que $V \subseteq A_w$, contradiciendo el hecho de que $z \in \partial A_w$. De este modo, tenemos que $z \in J_P$ y por tanto, $\partial A_w \subseteq J_P$. $\square$

Como ya se ha mencionado antes, sabemos que $J_P = J_{P^{\circ n}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Gracias a este hecho, obtenemos que el Lema 3.2.8 también es cierto si z_0 es un punto periódico atractor para el polinomio P , de periodo n .

En teoría, es posible encontrar el conjunto de Julia de cualquier función holomorfa f , sin embargo, es una tarea muy ardua determinar el comportamiento de las órbitas de cada complejo. Por esta razón es indispensable el uso de la computación; en particular, el Lema 3.2.8 proporciona un algoritmo bastante eficiente para graficar conjuntos de Julia, llamado **algoritmo de tiempo de escape**. Este algoritmo puede ser escrito como sigue:

```
function Julia_plot2(n,R,k,Xr,Yr)
% n - número de puntos de la matriz donde se pinta el conjunto de Julia
% R - límite a partir del cual determinamos si la sucesión diverge
```

```

% k - número de iteraciones
% Xr - rango de valores del eje x, Xr(1,1)=valor mín, Xr(1,2)=valor máx
% Yr - rango de valores del eje y, Yr(1,1)=valor mín, Yr(1,2)=valor máx
% Ejemplo: Julia_plot2(500,100,100,[-2,2],[-2,2])
x = linspace(Xr(1,1),Xr(1,2),n); y = linspace(Yr(1,1),Yr(1,2),n);
[X,Y] = meshgrid(x,y); W = zeros(length(X),length(Y));
for m = 1:size(X,2)
for j = 1:size(Y,2)
[w,iter] = Juliaa(X(m,j)+Y(m,j)*1i,R,k);
W(m,j) = W(m,j) + iter;
end
end
hold on; colormap(jet); pcolor(X,Y,W); shading interp; hold off;
function [pri,it] = Juliaa(z,R,k)
p = 0;
while p < k
if abs(z) > R
pri = 1;
it = p;
return;
end
z=exp(z)-1i; %z=1-(1/z^(2)); %z=z^(6)+1.5*z;
p=p+1;
end
pri=0;
it=p;

```

Ejemplo 21. Las siguientes imágenes muestran los conjuntos de Julia para las funciones $f, g, h : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$, dadas por $f(z) = z^6 + 1,5z$, $g(z) = e^z - i$ y $h(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$ obtenidos por el algoritmo de tiempo de escape. Tanto en la Figura 3.3a como en la Figura 3.3b observamos la separación de los puntos cuyas órbitas se escapan al

infinito, los cuales se muestran de color azul, de los puntos cuyas órbitas convergen a un punto finito, que se muestran de color rojo. En cuanto a la Figura 3.3c, el conjunto de Julia lleno es igual al conjunto de Julia, motivo por el cual no se logra apreciar el color rojo.

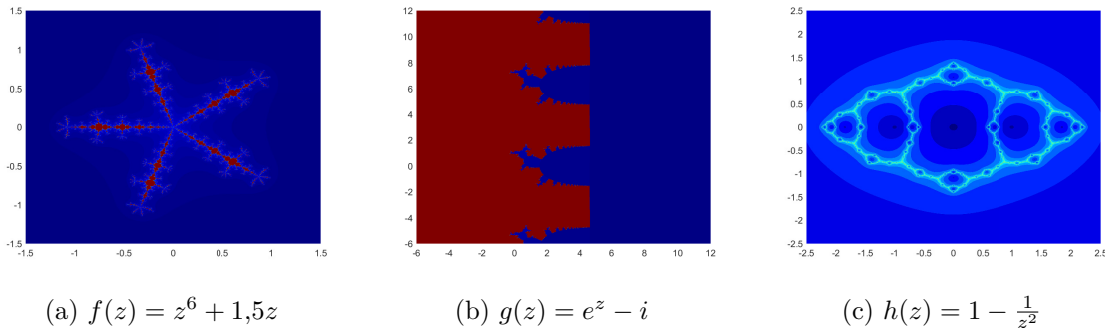


Figura 3.3

3.3. SIF y conjuntos de Julia

Esta sección se centra en establecer condiciones para que el conjunto de Julia del sistema dinámico $\{\hat{\mathbb{C}}; P\}$ pueda ser obtenido como atractor de un SIF. La forma natural de hacer esto, siguiendo las ideas del Ejemplo 19, es considerar las ramas de la función inversa de P , $\{P_i^{-1}\}_{i=1}^d$, donde d es el grado de P , y con ellas formar un SIF. Sin embargo, estas ramas no se comportan como contracciones en $\hat{\mathbb{C}}$, motivo por el cual no es posible conseguir un único conjunto invariante. Por ejemplo, si consideramos el sistema dinámico $\{\hat{\mathbb{C}}; z^2\}$, el SIF compuesto por las ramas de la raíz cuadrada, $\{\hat{\mathbb{C}}; f_1(z) = \sqrt{z}, f_2(z) = -\sqrt{z}\}$, posee más de un conjunto invariante; entre ellos: $\{0\} = f_1(\{0\}) \cup f_2(\{0\})$, $\hat{\mathbb{C}} = f_1(\hat{\mathbb{C}}) \cup f_2(\hat{\mathbb{C}})$ y $F_P = f_1(F_P) \cup f_2(F_P)$. Para obtener un único conjunto invariante y que además coincida con J_P , debemos restringir a $\hat{\mathbb{C}}$ eliminando ciertos abiertos como veremos en el Teorema 3.3.3.

Antes que nada, hay que destacar la gran familia de conjuntos de Julia obtenidos al variar la constante $c \in \hat{\mathbb{C}}$ en la función $P_c : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dada por $P_c(z) := z^2 + c$, pues con base en los trabajos de Mandelbrot y Julia se infiere que la mayoría de los fenómenos

dinámicos ocurren en los polinomios cuadráticos. De hecho, si queremos estudiar los conjuntos de Julia de cualquier polinomio cuadrático, basta con fijarnos en la familia de polinomios $\{P_c\}$, con $c \in \hat{\mathbb{C}}$, pues estos tipos de polinomios son **topológicamente conjugados**³ mediante la función $h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dada por $h(z) = \alpha z + \beta$, donde $\alpha, \beta \in \hat{\mathbb{C}}$ y $\alpha \neq 0$, por lo que tendrán dinámica equivalente. En particular, la función h transforma los puntos periódicos de un sistema dinámico en puntos periódicos del otro; esto se cumple porque inductivamente se tiene lo siguiente:

$$g = h \circ f \circ h^{-1} \implies g^{\circ 2} = h \circ f \circ (h^{-1} \circ h) \circ f \circ h^{-1} = h \circ f^{\circ 2} \circ h^{-1} \implies g^{\circ n} = h \circ f^{\circ n} \circ h^{-1},$$

donde f y g son topológicamente conjugados mediante h .

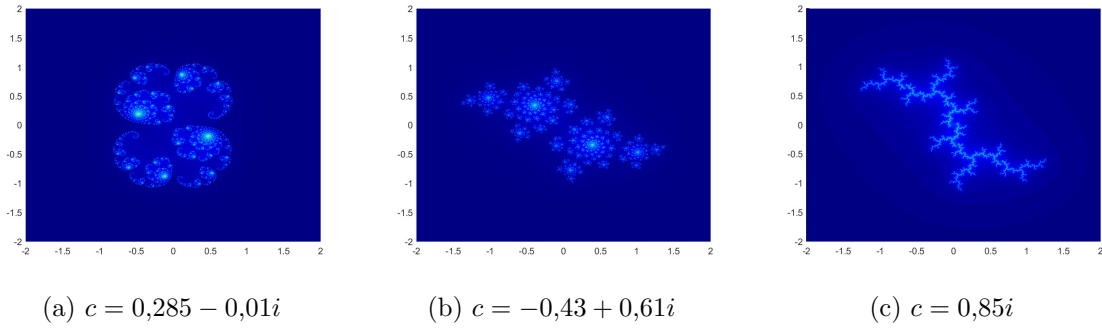


Figura 3.4: Conjuntos de Julia para $z^2 + c$.

Veamos dos resultados que nos ayudaran en demostraciones posteriores.

Proposición 3.3.1. Si $z \neq \infty$ es un punto fijo atractor para un polinomio P , entonces A_z contiene al menos un punto crítico de P , es decir un punto $c \in \hat{\mathbb{C}}$ tal que $P'(c) = 0$.

Demostración. Supongamos por contradicción que $c \notin A_z$ para todo punto crítico c de P . Sea U un disco abierto que cumpla con $w \in U \subseteq A_z$. Entonces, $P^{\circ k}(c) \notin U$, para cada $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Esto nos permite escoger, para cada k , una rama de la inversa, digamos $P^{\circ(-k)}$, en U , la cual es una función continua, analítica y cumple con $P^{\circ(-k)}(z) = z$. Vemos que si $w \in P^{\circ(-k)}(U)$, entonces $P^{\circ k}(w) \in U$, lo que implica

³Dos sistemas dinámicos discretos $\{X_1; f\}$ y $\{X_2; g\}$ se dicen topológicamente conjugados, si existe un homeomorfismo $h : X_1 \rightarrow X_2$ tal que $f(x_1) = (h^{-1} \circ g \circ h)(x_1)$ y $g(x_2) = (h \circ f \circ h^{-1})(x_2)$, para todo $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$.

que $P^{\circ(-k)}(U) \subseteq A_z$, para todo k . Dado que A_z es un subconjunto acotado de $\hat{\mathbb{C}}$, el contrareciproco del Teorema 3.2.5 nos permite concluir que la familia de funciones $\{P^{\circ(-k)}\}_{k=0}^{\infty}$ es normal en U . Sin embargo, debido a que z es un punto fijo repulsor para P^{-1} , pues $|\frac{d}{dz}P^{-1}(z)| > 1$, no existe sucesión de la familia $\{P^{\circ(-k)}\}_{k=0}^{\infty}$ que posea una subsucesión uniformemente convergente a una función analítica, cerca de z . De este modo, por definición de familia normal, llegamos a que la familia de funciones antes mencionada no puede ser normal en U , lo que genera una contradicción. Por lo tanto, $c \in A_z$, para algún punto crítico c de P . $\square$

Lema 3.3.2. Sean P un polinomio y $\mathbf{X} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ un conjunto cerrado que no contiene puntos de acumulación de $o(z, P)$, donde $z \notin J_P$. Si $x_n = P^{\circ(-n)}(\mathbf{X})$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{x_n\}_n$ converge uniformemente a J_P .

Demostración. Véase [4], Lema 6.3. $\square$

Veamos finalmente el resultado central de esta sección.

Teorema 3.3.3. Sea $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ un ciclo atractor del sistema dinámico $\{\hat{\mathbb{C}}; P_c\}$. Dado $\epsilon > 0$, denotemos por $\mathbf{X}$ al conjunto $\hat{\mathbb{C}}$ con $k + 1$ bolas abiertas de radio ϵ removidas; centradas en cada z_i , con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, y una adicional con centro en ∞ . Entonces, la estructura $\{\mathbf{X}; f_1, f_2\}$ es un SIF, donde

$$f_1(z) = \sqrt{z - c} \quad \text{y} \quad f_2(z) = -\sqrt{z - c}$$

son las ramas de la inversa de P_c . Este SIF posee atractor coincidente con J_{P_c} , el conjunto de Julia de P_c .

En particular, también se tiene el resultado, si la órbita del origen bajo P_c converge al punto en el infinito. En dicho caso, $\mathbf{X} = \hat{\mathbb{C}} \setminus B(\infty, \epsilon)$, pues P_c no tendría ciclo atractivo.

Demostración. Sean $\mathbf{X}$, f_1 y f_2 como en el enunciado. Definamos $F : \mathcal{H}(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbf{X})$ por $F(B) = f_1(B) \cup f_2(B)$, para todo $B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$. Veamos que F está bien definida. Sea $B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$. Para ϵ adecuado, tenemos que $\mathbf{X} \subseteq P_c(\mathbf{X})$, lo cual indica que $F(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}$. Luego, $F(B) \subseteq \mathbf{X}$ y $F(B) \neq \emptyset$. Como B es compacto, debe ser cerrado en el espacio

métrico $(\mathbf{X}, d_{\mathbb{C}})$, de modo que $\mathbf{X} \setminus B$ es abierto. La continuidad de P_c implica que $F(\mathbf{X} \setminus B)$ es abierto, y como $B \subseteq \mathbf{X} \subseteq P_c(\mathbf{X})$, se sigue que $F(B) = \mathbf{X} \setminus F(\mathbf{X} \setminus B)$. Por tanto, $F(B)$ es cerrado en $\mathbf{X}$, que es compacto, mostrando que $F(B)$ es compacto.

Veamos ahora que F posee un único conjunto invariante. Como $\mathbf{X} \subseteq P_c(\mathbf{X})$, se tiene que $F(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}$. Luego, aplicando la n -ésima composición iterada $F^{\circ n}$, resulta que

$$\mathbf{X} \supset F(\mathbf{X}) \supset F^{\circ 2}(\mathbf{X}) \supset \dots \supset F^{\circ(n-1)}(\mathbf{X}) \supset F^{\circ n}(\mathbf{X}) \supset \dots$$

Es decir, tenemos una sucesión decreciente de conjunto compactos no vacíos, lo cual implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{\circ n}(\mathbf{X}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{\circ n}(\mathbf{X}) \neq \emptyset. \quad (3.1)$$

Sea A la intersección en (3.1) y mostremos que $F(A) \subseteq A$. Si $z \in F(A)$, entonces existe $w \in A$ tal que $z \in F(\{w\})$. Dado que $w \in A$, se tiene que $w \in F^{\circ n}(\mathbf{X})$, para cada $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Enseguida, $z \in F(F^{\circ n}(\mathbf{X})) = F^{\circ(n+1)}(\mathbf{X})$, para cada $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, obteniendo que $z \in A$. Esto es, $F(A) \subseteq A$.

Por otro lado, supongamos que $z \in A$. Entonces, $z \in F^{\circ(n+1)}(\mathbf{X}) = F(F^{\circ n}(\mathbf{X}))$, para cada $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Así pues, existe $w_n \in F^{\circ n}(\mathbf{X})$ tal que $z = P_c(y_n)$, para cada $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Además, la sucesión de puntos $\{w_n\}_n$ debe tener una subsucesión convergente, digamos a $\bar{w}$, tal que $\bar{w} \in F^{\circ n}(\mathbf{X})$, para cada $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Por tanto, $\bar{w} \in A$ y, por la continuidad de P_c , se tiene $P_c(\bar{w}) = z$, de lo cual se sigue que $z \in F(A)$. Esto muestra la segunda contención.

Por último, veamos que $A = J_{P_c}$. Por Proposición 3.3.1, como 0 es el único punto crítico de P_c , obtenemos que P_c posee a lo más dos ciclos atractores, uno de los cuales es $\{\infty\}$, cuyos elementos son los posibles puntos de acumulación de las órbitas de cada punto fuera de J_{P_c} . Luego, $\mathbf{X}$ satisface las condiciones del Lema 3.3.2, mostrando así que la sucesión $\{F^{\circ n}(\mathbf{X})\}_n$ converge uniformemente a J_{P_c} . $\square$

Por supuesto, este teorema puede ser generalizado a polinomios de grado $N > 2$, considerando las N ramas de la inversa.

Ejemplo 22 (Problema de Cayley). ¿Es posible pintar un cuadrado con tres colores distintos, de tal manera que si en un punto dos colores se encuentran, entonces los tres

colores se encuentran en ese punto? Esta pregunta motiva a uno de los problemas que desde el año 1879 sentaron las bases de la dinámica compleja, generalizando el método Newton en cuanto a su convergencia para raíces complejas. El problema en cuestión es el de estudiar las cuencas de atracción de las raíces del polinomio $P(z) = z^3 - 1$, determinando el tipo de región que le corresponden.

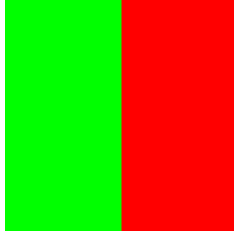
El matemático y abogado británico Arthur Cayley (1821-1895) fue el primero en plantear este problema y tras varios años de trabajo, logra tener éxito para el caso de polinomios cuadráticos (ver Figura 3.5a), pero desistió del problema al tratar de extenderlo a polinomios de orden superior, indicando en su publicación de 1879, en *The Newton-Fourier imaginary problem*, que la solución presentaba una dificultad considerable. Hoy en día sabemos que la frontera de estas cuencas de atracción poseen comportamiento caótico; veamos: sabemos que las raíces del polinomio $P(z) = z^3 - 1$ son $z_1 = 1$, $z_2 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ y $z_3 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$, con $P'(z_i) \neq 0$, de modo que si consideramos la función del método de Newton $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dada por

$$f(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)} = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}, \quad (3.2)$$

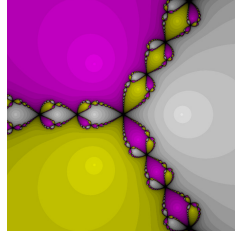
esta tendrá como puntos fijos atractores a las raíces de P . Tengamos en cuenta que el Lema 3.2.8 puede extenderse para funciones racionales, el cual aplicamos para verificar que $J_f = \partial A_{z_1} = \partial A_{z_2} = \partial A_{z_3}$. La cuenca de atracción de ∞ no se tiene en cuenta, puesto que en este caso, ∞ no es un punto fijo atractor. Así pues, las cuencas de atracción de las raíces de P , definidas por el método de Newton, tienen frontera común, y si le asignamos un color a cada una, obtenemos la solución al problema de Cayley (ver Figura 3.5b). Es decir, la solución al problema de Cayley se basa en encontrar el conjunto de Julia del método iterativo de Newton, y una forma de hallarlo es adaptando el Teorema 3.3.3, tomando en cuenta las ramas de la inversa de f , que vienen a ser las soluciones de la ecuación $2w^3 - 3zw^2 + 1 = 0$, digamos w_1 , w_2 y w_3 , en términos de z . Dado $\epsilon > 0$, definamos el conjunto

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i=1}^3 B(z_i; \epsilon)$$

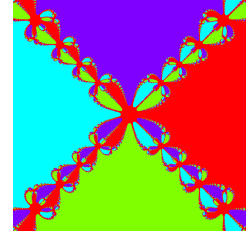
y la función $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ por $F(B) = \bigcup_{i=1}^3 w_i(B)$, para todo $B \in \mathcal{H}(X)$. Entonces F posee un único punto fijo, que es el conjunto de Julia de f .



(a) Para $z^2 - 1$



(b) Para $z^3 - 1$



(c) Para $z^4 - 1$

Figura 3.5: Solución al problema de Cayley.

3.4. Propiedades notables

A continuación presentamos algunas propiedades de los conjuntos de Julia y su relación con el conjunto de Mandelbrot. Este último se define como el conjunto de valores de c para los cuales el conjunto de Julia de P_c es conexo, y lo denotamos por $\mathbb{M}$ (ver Figura 3.1).

Para demostrar la siguiente proposición, tengamos en cuenta el Teorema 11.2 en [4], el cual enuncia que para cualquier polinomio P , de grado mayor que 1, J_P es conexo si, y solo si, todos los **puntos críticos** de P poseen órbita acotada.

Proposición 3.4.1. $\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} : \{P_c^{on}(0)\}_n \text{ es acotada}\}$

Demostración. Por lo anterior mencionado, como P_c posee como punto crítico al cero, obtenemos que J_{P_c} es conexo si, y solo si, $P_c^{on}(0)$ no converge a ∞ , cuando $n \rightarrow \infty$. $\square$

Proposición 3.4.2. Si $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$, entonces J_{P_c} es totalmente desconexo. Además, para $|c|$ grande, se cumple que $Dim_B(J_{P_c}) = Dim_H(J_{P_c})$ y se aproxima a $\frac{2 \ln(2)}{\ln(4|c|)}$

Demostración. Sean C la circunferencia $|z| = |c|$ y D su interior $|z| < |c|$. Entonces,

$$P_c^{-1}(C) = \{(ce^{i\theta} - c)^{\frac{1}{2}} : 0 \leq \theta \leq 4\pi\},$$

que es una figura en forma de ocho con punto de autointersección en cero (ver Figura 3.6). Como $|c| > 2$, tenemos que $P_c^{-1}(C) \subseteq D$, pues si $z \in P_c^{-1}(C)$, entonces

$P_c(z) \in C$, y al suponer que $|z| > |c|$, se tiene $|P_c(z)| \geq |z^2| - |c| \geq |c|^2 - |c| > |c|$, lo cual genera una contradicción. Además, cada uno de los lazos de $P_c^{-1}(C)$ son mapeados por P_c , de manera biyectiva, en D . Si definimos $f_1, f_2 : D \rightarrow D$ como las ramas de la inversa de P_c , entonces $f_1(D)$ y $f_2(D)$ son los interiores de los dos lazos de $P_c^{-1}(C)$. Sea V el disco $\{z : |z| < |2c|^{\frac{1}{2}}\}$, de modo que $P_c^{-1}(C) \subseteq V$. Luego, $f_1, f_2(D) \subseteq V \subset D$, de lo cual inferimos que $f_1(V), f_2(V) \subset V$; más aún, $f_1(\bar{V})$ y $f_2(\bar{V})$ son disjuntos. Por otro lado, para $i = 1, 2$,

$$|f_i(z_1) - f_i(z_2)| = |(z_1 - c)^{\frac{1}{2}} - (z_2 - c)^{\frac{1}{2}}| = \frac{|z_1 - z_2|}{|(z_1 - c)^{\frac{1}{2}} + (z_2 - c)^{\frac{1}{2}}|}.$$

Entonces, si $z_1, z_2 \in \bar{V}$, tomando el valor máximo y mínimo, resulta que

$$\frac{1}{2}(|c| + |2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{|f_i(z_1) - f_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}.$$

Note que $\frac{1}{2}(|c| - |2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} < 1$, siempre que $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$, lo cual indica que f_1 y f_2 son contracciones, y además inyectivas, en $\bar{V}$. Por Teorema 3.3.3, el SIF $\{\bar{V}; f_1, f_2\}$ posee como atractor a J_{P_c} . Luego, por Teorema 2.3.5, J_{P_c} es totalmente desconexo.

Para estimar la dimensión del conjunto de Julia J_{P_c} , aplicamos la Proposición 2.4.8 en conjunto con la Proposición 2.4.9, para obtener que

$$\frac{2 \ln(2)}{\ln(4(|c| + |2c|^{\frac{1}{2}}))} \leq \text{Dim}_H(J_{P_c}) \leq \frac{2 \ln(2)}{\ln(4(|c| - |2c|^{\frac{1}{2}}))}.$$

□

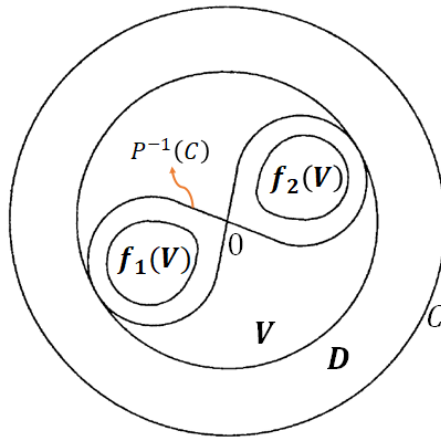


Figura 3.6

Proposición 3.4.3. Si $|c| < \frac{1}{4}$, entonces J_{P_c} es una curva cerrada simple.

Demostración. Si $|c| < \frac{1}{4}$ y z_0 es un punto fijo atractor de P_c , entonces se tiene que $|P'_c(z_0)| = |2z_0| < 1$, lo cual implica $|z_0| < \frac{1}{2}$. Sea C_0 la curva $|z| = \frac{1}{2}$, que encierra tanto a c como a cualquier punto fijo atractor z_0 que P_c posea. La imagen inversa $P_c^{-1}(C_0)$ es una curva C_1 que rodea a C_0 . Consideremos la región comprendida entre C_0 y C_1 vista como el conjunto de curvas $A_1 = \{re^{i\theta} : r_0 \leq r \leq r_1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, donde $r_0e^{i\theta}$ y $r_1e^{i\theta}$ son las curvas C_0 y C_1 , respectivamente. Si definimos una función que mapee de manera biyectiva la curva C_0 en C_1 , podremos conectar los puntos de estas curvas mediante otra curva que llamaremos “trayectoria”. De este modo, para cada θ , sea $\psi_1(\theta)$ el punto en C_1 que vive en la trayectoria que inicia en el punto, digamos $\psi_0(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta}$, de C_0 . Dado que la imagen inversa $P_c^{-1}(A_1)$ es otra región anular A_2 cuyos límites son las curvas $C_2 = P_c^{-1}(C_1)$ y C_1 , con P_c mapeando A_2 en A_1 de manera dos a uno, podemos encontrar nuevamente distintas trayectorias que parten de C_1 y terminan en C_2 ; estas nuevas trayectorias pueden ser las imágenes inversas bajo P_c de las trayectorias inicialmente dadas. Así pues, denotemos por $\psi_2(\theta)$ al punto en C_2 que vive en la trayectoria que inicia en el punto $\psi_1(\theta)$ de C_1 (ver Figura 3.7a). Continuando de esta manera, obtenemos una sucesión de curvas C_k , cada una rodeando a su predecesora, y familias de trayectorias que unen los puntos $\psi_k(\theta)$ en C_k , con los puntos $\psi_{k+1}(\theta)$ en C_{k+1} , para cada $k \in \mathbb{N}$. Recordemos que las ramas de la inversa de P_c forman un SIF cuyo atractor es J_{P_c} , gracias al Teorema 3.3.3, pues $\{z_0\}$ es un ciclo atractor de P_c . Note además que $F^{\circ k}(C_0) = C_k$, donde F es la función definida en el Teorema 2.2.1, por lo que $C_k \rightarrow J_P$, cuando $k \rightarrow \infty$. Esto indica que la longitud de la trayectoria que une los puntos $\psi_k(\theta)$ y $\psi_{k+1}(\theta)$ converge a cero geométricamente, cuando $k \rightarrow \infty$. En consecuencia, $\psi_k(\theta)$ converge uniformemente a una función $\psi(\theta)$, que es un único punto para cada $\theta \in [0, 2\pi]$. Por lo tanto, $\psi(\theta)$ parametriza una curva cerrada en $\hat{\mathbb{C}}$, la cual es J_{P_c} . Resta mostrar que $\psi(\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ también es una curva simple. Para ello, tomemos $\theta_1 \neq \theta_2$ tal que $\psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$. Sea D la región acotada por C_0 y las dos trayectorias que unen los puntos $\psi_0(\theta_1)$ y $\psi_0(\theta_2)$ con $\psi_1(\theta_1)$. Note que la frontera de D se mantiene acotada bajo iteraciones de P_c . Luego, por el **Principio del Módulo Máximo**, la función P_c

permanece acotada sobre D y también sobre cada $P_c^{on}(D)$, con $n \in \mathbb{N}$. Esto significa que $D \subseteq K(P_c)$, de modo que en el interior de D no pueden haber elementos de J_{P_c} . En conclusión, no puede ocurrir la situación de la Figura 3.7b, mostrando que $\psi(\theta)$ es una curva simple. $\square$

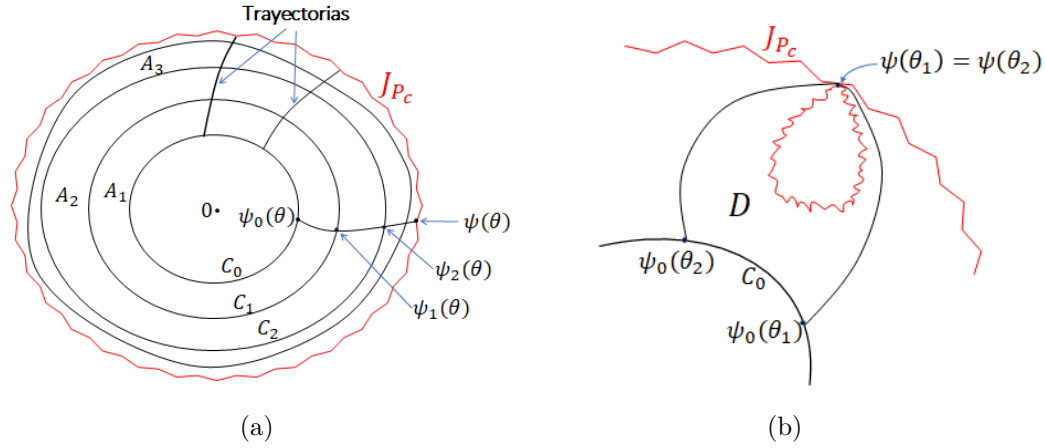


Figura 3.7

El resultado anterior puede ser extendido para valores de $|c|$ mayores, siempre y cuando c se encuentre en el cardioide principal de $\mathbb{M}$.

Además, en [27] se demuestra que si $|c|$ es muy pequeño, se obtiene

$$Dim_B(J_{P_c}) = Dim_H(J_{P_c}) = 1 + \frac{|c|^2}{4 \ln(2)} + \sum_{n=3}^{\infty} |c|^n.$$

Para concluir, es importante señalar que a pesar de haber obtenido resultados interesantes sobre los conjuntos de Julia, este es solo el principio. Discutir sobre distintas generalizaciones teóricas es factible para descubrir la verdadera naturaleza de los fractales, ya que si echamos un vistazo a nuestro alrededor, encontraremos que el caos y lo irregular es lo que mayormente prevalece.

Bibliografía

- [1] T. Apostol, *Análisis Matemático*. Segunda edición. Editorial Reverte, Barcelona España, 1996.
- [2] C. Bandt and H. Rao, Topology and Separation of Self-Similar Fractals in the Plane. *Nonlinearity*, **20**, (2007), 1463-1474.
- [3] A. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, Cambridge, 1991.
- [4] H. Brolin, Invariant sets under iteration of rational functions. *Arkiv for Matematik*, **6**, (1965), 103-144.
- [5] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*. Academic Press, Inc., 1988.
- [6] M. Barnlsey, *Superfractals*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [7] J. Conway, *Functions of One Complex Variable*. Second edition. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [8] W. Charatonik and A. Dilks, On self-homeomorphic spaces. *Topol. and its Appl*, **55**, (1994), 215-238.
- [9] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Second Edition, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.
- [10] G. A. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., 1990.
- [11] G. A. Edgar, *Integral, Probability, and Fractal Measures*. Springer, New York, 1998.

- [12] R. Engelking, *Dimension Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [13] C. Espitia, Sistemas iterados de funciones vs sistemas dinámicos discretos. *Revista Sigma*, **11**(1), (2013), 51-58.
- [14] K. J. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 3rd ed. John Wiley and Sons, 2014.
- [15] J. E. Hutchison, Fractals and Self-Similarity. *Indiana University Journal of Mathematics*, **30**, (1981), 713-747.
- [16] A. Kameyama, Self-Similar Sets from the Topological Point of View. *Japan J. Indust. Appl. Math*, **10**, (1993), 85-95.
- [17] E. W. Karas, *Iteração de Transformações Racionais Aplicada ao Método de Newton no Plano Complexo*. Master's thesis, Universidade de São Paulo, Brazil, 1994.
- [18] G. Lewellen, Self-Similarity. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **23**, (1993), 1023-1040.
- [19] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, 1992.
- [20] B. Mandelbrot, *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión*. Tusquets editores, S. A., 1993.
- [21] L. M. Martínez, G. Blé González, Dimensión Hausdorff de conjuntos de Julia de polinomios. *Journal of Basic Sciences*, **2**(4), (2016), 1-13.
- [22] J. Molero, *Conjuntos de Julia y Mandelbrot. Cuencas de Atracción. Sistemas de Funciones Iteradas. Aplicación*. Etsit-Peru, 2011 (Consultado el 20-06-2021 de <https://repositorio.upct.es/handle/10317/2660>).
- [23] J. R. Munkres, *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [24] B. Palka, *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.

- [25] G. Rubiano, Método de Newton, mathematica y fractales: historia de una página. *Boletín de Matemáticas*, **14**(1), (2007), 44-63.
- [26] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. New York, McGraw-Hill Book Co., 1976.
- [27] D. Ruelle, Repellers for real analytic maps. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **2**, (1982), 99-108.
- [28] S. M. Sabogal, Sobre autosemejanza topológica, Parte I. *Revista Integración*, **17**(1), (1999), 27-47.
- [29] S. Sabogal y G. Arenas, *Una Introducción a la Geometría Fractal*. Escuela de Matemáticas, Universidad industrial de Santander, Bucaramanga, 2011.
- [30] S. Willard, *General Topology*. Addison-Wesley, Publishing Company, 1970.