

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

TESIS DE MAESTRÍA

**Propiedades de grafos, hipergrafos y su
complejidad algorítmica**

Autor:

**Laura Vanesa Negrete
Madera**

Director:

Dr. Jerson Manuel Borja Soto

Codirector:

**Dr. Fabián Antonio Arias
Amaya**



*Tesis enviada al Comité Curricular como requisito
para optar al grado de Magíster en Matemáticas*

**Grupo de Investigación Matemáticas Unicórdoba
Departamento de Matemáticas y Estadística**

2 de septiembre de 2022

Propiedades de grafos, hipergrafos y su complejidad algorítmica

Tesis de Maestría aprobada por:



Dr. Jerson Manuel Borja Soto

Director de Tesis



Dr. Tristram Charles Bogart

Jurado de Tesis



Dr. Jairo Andres Angel Cardenas

Jurado de Tesis



MSc. Ricardo Miguel Guzmán Navarro

Jefe de departamento de Matemáticas y Estadística

Resumen

En este trabajo estudiamos la complejidad de propiedades de grafos no evasivas, así como la evasividad de algunas propiedades de hipergrafos. Además, en el caso de las propiedades no evasivas damos estrategias que permiten obtener una cota para la complejidad de las mismas. En cuanto a propiedades de hipergrafos, mostramos una generalización del teorema de Yao sobre propiedades de grafos bipartitos, a propiedades de hipergrafos k -partitos k -uniformes.

Abstract

In this work we show the complexity of some known non-evasive graph properties, as well as the evasiveness of some hypergraph properties. Furthermore, in the case of non-evasive properties, we show the strategies that allow us to obtain an upper bound for their complexity. For hypergraph properties, we prove a generalization to k -partite hipergraph properties, of Yao's theorem on bipartite graph properties.

Agradecimientos

Primeramente, quiero darle gracias a Dios por todos los logros obtenidos, así como por la paciencia y fortaleza durante este proceso, a mis docentes y en especial a mi tutor, el doctor Jerson Manuel Borja Soto por su ayuda, paciencia y dedicación, de igual forma al doctor Fabián Antonio Arias Amaya quienes fueron un pilar fundamental en el desarrollo de este trabajo.

Por otro lado, quiero agradecer a mis padres por su apoyo, ayuda y palabras de motivación a lo largo de estos años, ya que sin su acompañamiento esto no fuera posible.

Finalmente, quiero agradecer a Gabriel por la voz de aliento en esos momentos difíciles; de igual forma agradezco a mis amigos, en especial a Oriana y a mis compañeros de maestría Calixto, Samuel, Gabriel y Wilson quienes formaron parte de mi grupo de estudio y representaron una fuente de apoyo a lo largo de estos años.

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	V
1. Preliminares	3
1.1. Propiedades de grafos y la conjetura de evasividad	3
1.2. Complejos simpliciales	5
1.3. Enfoque topológico a la evasividad	7
2. Propiedades no evasivas	9
2.1. Propiedad de Carter	9
2.2. Propiedad de Kleitman	10
2.3. Grafos Escorpión	11
2.4. Propiedad no evasiva más pequeña	14
2.5. Generalizaciones de la propiedad de Kleitman	18
2.5.1. Primera generalización de la propiedad de Kleitman	19
2.5.2. Segunda generalización de la propiedad de Kleitman	21
2.5.3. Tercera generalización de la propiedad de Kleitman	24
3. Propiedades de hipergrafos	27
3.1. Hipergrafos	27
3.2. Extensión a hipergrafos de la propiedad de ser bipartito	29
4. Conclusiones	34
Bibliografía	35

***Dedicatoria:** A mi madre Gladis Maria Madera Sandón, y a mi padre Eliecer Antonio Negrete Martínez.*

INTRODUCCIÓN

Los grafos son comúnmente utilizados para modelar problemas de conexión entre varios puntos, y dependiendo de la estructura del modelado se le puede asociar a los mismos una cualidad o propiedad y lo que se busca en este proceso es tratar de optimizar recursos (dinero, tiempo, etc.). El estudio de estas propiedades se puede hacer mediante el análisis de la complejidad, que es un valor que nos permitirá decidir en un principio si es posible o no la reducción de recursos. Ahora, si tenemos una propiedad asociada a grafos y analizando su complejidad en todos los casos posibles nos vemos obligados a examinar todas las conexiones entre un conjunto de puntos, diremos que la propiedad es evasiva; pero debido a lo complicado de las propiedades, este estudio puede ser bastante difícil, este problema ha sido ampliamente estudiado. El primero en abordar este problema fue el informático estadounidense Arnold Rosenberg quien conjeturó en el año 1973 que toda propiedad de grafos (dirigidos) \mathcal{P} no trivial sobre un conjunto de n vértices, tiene una complejidad $C(\mathcal{P}) \gg n^2$; la cual fue refutada el mismo año por el matemático noruego Stal Aanderaa. Luego de eso, Rosenberg y Aanderaa conjeturaron que existe $\epsilon > 0$ tal que cualquier propiedad de grafos *monótona no trivial* sobre un conjunto de n vértices tiene una complejidad por lo menos de ϵn^2 . En el año 1975 la conjetura Aanderaa-Rosenberg fue demostrada por Ronald Rivest y Jean Vuillemin en [11].

A pesar de los avances presentados, el estudio no culminó allí ya que el científico informático Richard Karp conjeturó que toda propiedad de grafos (no dirigidos) *monótona no trivial* sobre un conjunto de n vértices es *evasiva*. Esta conjetura, llamada también *conjetura de evasividad*, es aún más fuerte que la formulada por Aanderaa-Rosenberg y hoy en día sigue sin ser demostrada completamente; sin embargo, los matemáticos Jeff Kahn y Michel Saks junto con el ingeniero Dean Sturtevant hicieron grandes avances (1984), demostrando que la conjetura es cierta en el caso de que

la cantidad de vértices sea potencia de un número primo en [7]. Ellos también probaron la validez del resultado en el caso de que el número de vértices sea 6 en [7]. Para el año 1988 Andrew Chi-Chih Yao resolvió la conjetura para el caso de grafos bipartitos en [10].

Sumados a los avances anteriores y en busca de un contraejemplo a la conjetura en el caso de diez vértices, se tiene que en el 2005 Alexander Engström dio una descripción completa de los grafos transitivos en posibles contraejemplos para el caso $n = 10$ en [5], y en 2016 los matemáticos colombianos Andrés Angel y Jerson Borja determinaron otro tipo de condiciones sobre posibles contraejemplos basados en el uso de la característica de Euler en [2, 3]. Al día de hoy, no se ha resuelto la conjetura completamente para el caso de $n = 10$ vértices, pero esta se ha verificado para muchas familias de propiedades monótonas no triviales de grafos, ver, por ejemplo, [6].

Ahora, los problemas que abarcamos en este trabajo se dividen en dos categorías, la primera corresponde al estudio de la complejidad de propiedades no evasivas nuevas así como conocidas, y la segunda corresponde al estudio de la complejidad de propiedades asociadas a hipergrafos (elementos más generales que grafos pero que conservan nociones similares a las que ya se conocen para grafos).

En el primer capítulo, se encuentra consignada toda la teoría necesaria para la comprensión del presente trabajo. Luego, en el capítulo dos y tres abarcamos nuestros problemas y mostramos los resultados obtenidos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos la teoría necesaria para la comprensión y desarrollo de nuestro trabajo, la cual muestra la relación existente entre combinatoria y topología.

1.1. Propiedades de grafos y la conjetura de evasividad

En la presente sección haremos un breve recuento de las nociones básicas asociadas a grafos, el cual es el principal ente combinatorio involucrado en nuestro estudio. Para comenzar, diremos que un *grafo* (no dirigido) es un par (V, E) donde $V = \{1, \dots, n\}$ es un conjunto cuyos elementos son llamados *vértices* y $E \subseteq \binom{V}{2}$, donde $\binom{V}{2}$ es el conjunto de todos los subconjuntos de V de tamaño 2. Los elementos de E son llamados *las aristas* del grafo. Si $\{u, v\} \in E$ decimos que u y v son adyacentes. Un *Camino* es una sucesión de aristas en E que une dos vértices dados.

Siguiendo con este recuento, un *subgrafo* de un grafo G es un grafo cuyo conjunto de vértices y aristas son subconjuntos de los de G ; y el *grado* de un vértice $v \in G$, denotado por $\deg(v)$, es la cantidad de vértices adyacentes a v . Ahora, diremos que dos grafos G y H son *isomorfos* si existe una permutación σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\{u, v\}$ es una arista de G si y sólo si $\{\sigma(u), \sigma(v)\}$ es una arista de H . Lo anterior da origen al término *propiedad de grafos*, que hace referencia a una propiedad acerca de los grafos que se preserva bajo isomorfismo, esto es, si G y H son grafos isomorfos, entonces G tiene la propiedad \mathcal{P} si y sólo si H tiene la propiedad. Como ejemplos de algunas propiedades de grafos tenemos las siguientes:

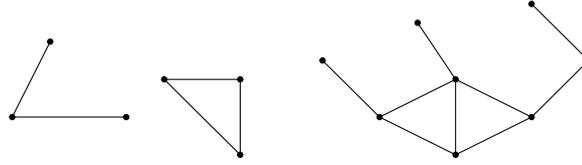


FIGURA 1.1: Grafo desconexo seguido de un grafo conexo

- Ser conexo, donde un grafo G es *conexo* si cada par de vértices está conectado por un camino.
- Ser bipartito, donde un grafo $G = (V, E)$ es *bipartito* si V se puede dividir en dos conjuntos A y B tales que $A \cup B = V$ y $A \cap B = \emptyset$, además las aristas de G solo pueden conectar vértices de A con vértices B .

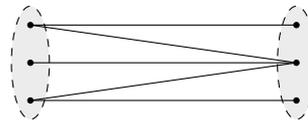


FIGURA 1.2: Grafo bipartito

- Contener un ciclo, donde un grafo G contiene un ciclo si en G puedo encontrar un camino cerrado.

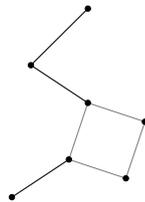


FIGURA 1.3: Grafo con un ciclo

Así pues, siempre que se estudian las propiedades de grafos se busca analizar sus cualidades, las cuales se resumen en la siguiente definición.

Definición 1.1. Una propiedad de grafos es *monótona* si es cerrada bajo remoción de aristas; mientras que una propiedad no trivial es aquella que no es vacía y no todo grafo la cumple.

En el estudio de la propiedades de grafos se analiza la llamada “complejidad de un propiedad”, este análisis se realiza a través de un juego, el cual es descrito a continuación:

Dada una propiedad de grafos \mathcal{P} , se quiere determinar si un grafo desconocido G tiene o no la propiedad. Un *oráculo* responde SÍ o NO a preguntas del estilo ¿es $\{a, b\}$ una arista del grafo G ?, y se trata de utilizar la información revelada por el oráculo para decidir si el grafo G tiene o no la propiedad \mathcal{P} , haciendo la menor cantidad de preguntas posibles.

Es importante resaltar que para poner en practica el anterior juego, se pueden utilizar diferentes estrategias, y es en término de estas que surge la complejidad de una propiedad.

Definición 1.2 (Complejidad de una propiedad de grafos). *La menor cantidad de preguntas que hay que hacerle al oráculo en el peor de los casos, es llamada la complejidad de \mathcal{P} y se denota $C(\mathcal{P})$. La propiedad se dirá evasiva si $C(\mathcal{P}) = \binom{n}{2}$*

Tras el estudio de la complejidad de las propiedades de grafos, surge alrededor del año 1975 la *conjetura de evasividad* propuesta por Richard Karp, la cual establece que toda propiedad de grafos (no dirigidos) monótona no trivial sobre un conjunto de n vértices es *evasiva*.

1.2. Complejos simpliciales

En la presente sección introduciremos la principales definiciones asociadas a otro ente combinatorio de suma importancia como lo son los complejos simpliciales. Comenzamos diciendo que un *complejo simplicial abstracto* sobre un conjunto finito V es una colección K de subconjuntos no vacíos de V para la cual se satisfacen que para todo $v \in V$ se tiene que $\{v\} \in K$, además, si $A \in K$ y $\emptyset \neq B \subseteq A$ entonces $B \in K$. Ahora, Si $A \in K$, decimos que A es una *cara* o un *simplex* de K . El valor $\#(A) - 1$ es llamado *la dimensión de A* y se denota por $\dim(A)$, mientras que la dimensión de K está definida por, $\dim(K) = \max\{\dim(A) : A \in K\}$.

Por otro lado, con el fin de tener una visualización de un complejo simplicial abstracto es necesario hacer algo llamado "realización geométrica", para tal fin se requiere tener claro que la *envolvente convexa* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotada por $\text{Conv}(A)$, es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de A . Recordemos que una combinación convexa de u_1, u_2, \dots, u_n es una suma del

tipo $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$, donde $c_i \geq 0$ y $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1$. Además, si $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, se tiene que cada v_i se identifica con el vector e_i de la base canónica de \mathbb{R}^n . Luego, la *realización geométrica* de un complejo simplicial K , denotada $|K|$, es la unión de todas las envolventes convexas de las caras de K , esto es $|K| = \bigcup_{A \in K} \text{Conv}(A)$; es de notar que $|K|$ es un subconjunto de \mathbb{R}^n , donde n es el número de vértices.

A continuación, se muestra la realización geométrica asociado a un complejo simplicial

$$K = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_4, v_5, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}\}$$

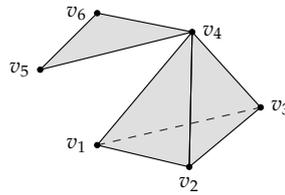


FIGURA 1.4: Realización geométrica de un complejo simplicial con seis vértices.

Siguiendo con el recuento de definiciones, consideremos un complejo simplicial K y sea $A \in K$ un simplex, diremos que A es un *simplex maximal* si este no está contenido en otro simplex en K , y B es llamado *cara libre* si éste no es maximal en K y está contenido en un solo simplex maximal en K . Así, un *colapso elemental* es la operación de elegir una sola cara libre del complejo y eliminar la cara junto con todas las caras que lo contienen. Con la anterior operación en mente, el complejo simplicial abstracto K es *colapsable* si existe una sucesión de colapsos elementales K, K_1, K_2, \dots, K_n tales que $\#(K_n) = 1$, es decir, el complejo simplicial K se reduce a un vértice del mismo. Por otra parte, si K tiene f_i caras de dimensión i , entonces la *característica de Euler* de K , denotada por $\chi(K)$, se define como $\chi(K) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i f_i$. Por último, un complejo simplicial abstracto K que satisface la condición de que el conjunto de vértices es totalmente ordenado, se dice \mathbb{Z}/p -*acíclico* si $\dim_{\mathbb{Z}/p} \tilde{H}_n(K, \mathbb{Z}/p) = 0$ para todo entero no negativo n , donde $\tilde{H}_n(K, \mathbb{Z}/p)$ representa el n -ésimo grupo de homología reducido de K sobre \mathbb{Z}/p .

1.3. Enfoque topológico a la evasividad

Tras la demostración de la conjetura de la evasividad en el caso en que la cantidad de vértices sea potencia de primo o cuando el número de vértices es 6, surge un enfoque topológico que fue utilizado para estudiar esta conjetura en otros casos, y cuyas partes fundamentales se describe a continuación:

Definición 1.3. Si \mathcal{P} es una propiedad monótona no vacía, podemos considerar un complejo simplicial $\Delta_{\mathcal{P}}$, cuyos vértices son los conjuntos de dos elementos $\{a, b\}$, con $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$, con $a \neq b$; y $G \in \Delta_{\mathcal{P}}$ si y solo si G , visto como grafo, tiene la propiedad \mathcal{P} .

El enfoque está fundamentado en el uso de tres teoremas que presentamos a continuación y que se pueden consultar en el artículo de Carl Miller, [10].

Teorema 1.1 (KSS). Si \mathcal{P} es una propiedad no vacía, monótona y no evasiva, entonces $\Delta_{\mathcal{P}}$ es colapsable.

Teorema 1.2. Si Δ es un complejo simplicial colapsable, entonces Δ es \mathbb{Z}/p -acíclico, para todo primo p .

Para enunciar el último de estos tres teoremas importantes se requiere la siguiente definición

Definición 1.4. Un grupo de Oliver es un grupo finito Γ que tiene un p -subgrupo normal H tal que Γ/H es cíclico.

Teorema 1.3 (Oliver). Si Γ es un grupo de Oliver que actúa sobre un complejo simplicial \mathbb{Z}/p -acíclico Δ , entonces $\chi(\Delta^{\Gamma}) = 1$. En particular, $\Delta^{\Gamma} \neq \emptyset$.

Para un complejo simplicial Δ con una acción de un grupo Γ , el complejo de puntos fijos Δ^{Γ} puede describirse como sigue:

1. Los vértices de Δ^{Γ} son las órbitas de la acción de Γ (en los vértices de Δ) que sean simplices de Δ .
2. $\{A_0, \dots, A_r\}$ es un r -simplex de Δ^{Γ} si y solo si $A_0 \cup \dots \cup A_r \in \Delta$.

Una estrategia para usar el enfoque antes descrito, consiste en suponer una propiedad de grafos monótona no vacía y no evasiva \mathcal{P} . Encontrar (convenientemente)

un grupo de Oliver Γ que actúe sobre $\{1, 2, \dots, n\}$; luego Γ actúa de manera natural en los vértices de $\Delta_{\mathcal{P}}$. Se calculan las órbitas de Γ sobre los vértices de $\Delta_{\mathcal{P}}$ y se concluye que $\Delta_{\mathcal{P}}^{\Gamma}$ es no vacío, por lo que algunas de las órbitas halladas *son* grafos que pertenecen a \mathcal{P} y $\chi(\Delta_{\mathcal{P}}^{\Gamma}) = 1$.

Capítulo 2

Propiedades no evasivas

El objetivo principal de este capítulo es mostrar las propiedades no evasivas conocidas y la estrategia utilizada para determinar este hecho, así como un acotamiento para la complejidad de las mismas.

2.1. Propiedad de Carter

Un grafo G tiene la propiedad de Carter \mathcal{P} si el grafo contiene un vértice de grado $n - 4$ y los vértices adyacentes a este vértice tiene grado 1. Entonces, para $n \geq 7$ (en [8] se toma $n \geq 9$) se tiene que $C(\mathcal{P}) \leq \frac{1}{2}n(n - 1) - 1$

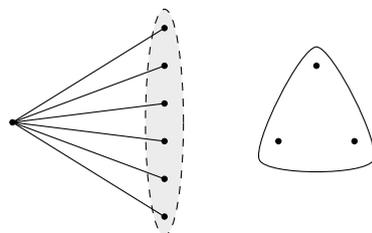


FIGURA 2.1: Propiedad de Carter

A continuación describimos una estrategia que permite determinar si un grafo G tiene o no la propiedad de Carter.

Demostración. Véase [8] página 17.

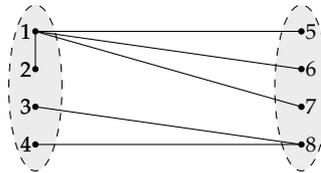
El buscador divide el conjunto de vértices en dos partes casi iguales, y pregunta por todas las aristas entre estas dos partes. En este punto, si $n \geq 7$ se ha debido identificar un único candidato al vértice con grado $n - 4$, o en su defecto se ha determinado que el grafo no cumple la propiedad. El paso siguiente consiste en preguntar

por todos los vértices adyacentes al candidato dentro del conjunto donde se encuentra este, lo que permite aislar al vértice de grado $n - 4$ y los tres vértices que no son adyacentes al vértice de grado $n - 4$ y que posiblemente son adyacentes entre sí, o en caso contrario se ha descartado el grafo. A continuación, preguntamos por todos los vértices adyacentes al de grado $n - 4$, si todos resultan ser de grado 1, el grafo tiene la propiedad; pero si alguno de ellos llega a tener grado dos o más, el grafo se descarta. Si nos fijamos en los tres vértices que no son adyacentes al vértice de grado $n - 4$ y tenemos en cuenta el proceso anterior, podemos concluir que no es necesario preguntar por al menos una de las tres aristas que posiblemente existen entre estos tres vértices, así

$$C(\mathcal{P}) \leq \frac{1}{2}n(n-1) - 1$$

□

A continuación, mostramos una instancia del peor caso (cuando tiene que hacerse la mayor cantidad de preguntas) para la estrategia descrita anteriormente con $n = 8$.



La única arista por la que no se pregunta es $\{3, 4\}$.

2.2. Propiedad de Kleitman

Para un número par n , un grafo G tiene la propiedad de Kleitman si existen dos vértices adyacentes x y y , cada uno de grado $\frac{n}{2}$, tal que el conjunto de vértices restantes $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{x, y\}$ adyacentes a x y y , denotados X y Y respectivamente, son disjuntos, y ningún vértice en X es adyacente a ningún vértice en Y . Entonces $C(\mathcal{P}) \leq \frac{3}{8}n^2 + \frac{1}{4}n - 1$.

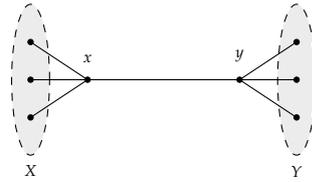


FIGURA 2.2: Propiedad de Kleitman

A continuación describimos una estrategia que permite determinar si un grafo G tiene o no la propiedad de Kleitman.

Demostración. Véase [8] página 18.

El buscador selecciona un vértice al azar y pregunta para determinar los vértices adyacentes a este. En el siguiente paso el buscador, escoge uno de los vértices resultantes del paso anterior y pregunta por todos los vértices adyacentes a este, continuamos de esta manera preguntando por cada uno de los vértices encontrados en el primer paso. En este punto, el buscador ha investigado $\frac{n}{2} + 1$ vértices y ha aislado los vértices x y y , así como los conjuntos X y Y respectivamente; o ha determinado que el grafo no tiene la propiedad. En caso de que el grafo tenga la propiedad, se llega al punto de no ser necesario preguntar por los vértices en X o Y , lo que significa que faltaron por realizar $\frac{1}{2} (\frac{1}{2}n - 1) (\frac{1}{2}n - 2)$ preguntas, de donde se concluye que:

$$C(\mathcal{P}) \leq \frac{3}{8}n^2 + \frac{1}{4}n - 1$$

□

2.3. Grafos Escorpión

Un grafo G sobre n vértices es un grafo escorpión si este contiene vértices v_1, v_2, v_3 tales que, el grado de v_1 (cuerpo) es $n - 2$, el grado de v_2 (cola) es 1 y el grado de v_3 es 2. Además, v_3 es adyacente a v_1 y v_2 . El resto de vértices se agrupan en un conjunto, denotado por S y las aristas entre los elementos de S pueden existir o no.

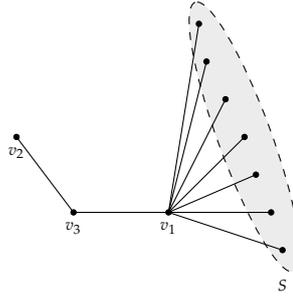


FIGURA 2.3: Grafo escorpión

Teorema 2.1. Sea \mathcal{P} la propiedad que consiste en ser un grafo escorpión sobre $n \geq 5$ vértices. Entonces la complejidad de \mathcal{P} está acotada por $6n - 13$.

Demostración. El algoritmo consiste de tres fases que nos permitirán determinar un único candidato a cuerpo y un único candidato a cola. A continuación, describiremos a grandes rasgos lo que ocurre en cada fase.

Fase 1. En esta fase, la intención es particionar el conjunto de vértices $V = \{1, 2, \dots, n\}$ en dos conjuntos; los que son candidatos a cuerpo y los que son candidatos a cola, donde un vértice es candidato a cuerpo si este tiene al menos un vértice rechazado y por lo menos dos vértices aceptados; mientras que un vértice es candidato a cola si este tiene al menos un vértice aceptado y por lo menos dos vértices rechazados. Ahora, para clasificar los vértices preguntamos por las aristas de ciclo $1, 2, 3, \dots, n, 1$, es decir, preguntamos por $12, 23, 34, 45, \dots, (n-1)n, n1$. Así, los vértices con dos vértices aceptados clasifica como candidato a cuerpo, mientras que los vértices con dos vértices rechazados clasifica como candidato a cola; el resto de los vértices que no se clasifican como candidato a cuerpo ni candidato a cola son llamados indiferentes, a dicho conjunto lo denotaremos por I . Ahora, si $I = \emptyset$, entonces se concluye que el grafo no es un grafo escorpión. Por otro lado, si $I \neq \emptyset$, podemos dividirlo en pares de vértices que no son adyacentes en el ciclo y preguntamos por la arista entre cada par, lo anterior clasifica a cada vértice indiferente como candidato a cuerpo o candidato a cola.

Fase 2. En esta fase, el objetivo es obtener un único candidato a cuerpo y un único candidato a cola. Para tal fin, se le asigna un peso a cada vértice de la

siguiente manera: un candidato a cuerpo tiene un peso de 2 menos el número de vértices rechazados; mientras que un candidato a cola se le asigna un peso de 2 menos el número de vértices aceptados.

Ahora, preguntamos por las aristas que tiene un vértice en el conjunto de candidatos a cuerpo y un vértice en el conjunto de candidatos a cola, dependiendo de la respuesta cambia el peso de cada vértice y si alguno llega al peso cero se descarta y deja de ser considerado como candidato. Después de hacer varias iteraciones se pueden presentar las siguientes situaciones:

- a) El conjunto de candidatos a cuerpo o el conjunto de candidatos a cola son ambos vacíos.
- b) El conjunto de candidatos a cuerpo y el conjunto de candidatos a cola son ambos no vacíos y cada conjunto contiene un solo elemento.
- c) El conjunto de candidatos a cuerpo tiene $b \geq 1$ elementos y el conjunto de candidatos a cola tiene $t \geq 1$ elementos, además, $\min\{b, t\} \geq 2$ y todas las aristas entre estos dos conjuntos ya han sido preguntadas.

en la situación a) se descarta el grafo, en la situación b) se pasa a la fase 3. Asumamos que estamos en la situación c), entonces, sea e el número de aristas existentes entre el conjunto de candidatos a cuerpo y el conjunto de candidatos a cola. Dado que los candidatos a cuerpo deben ser adyacentes a todos menos a un candidato a cola, entonces $b(t - 1) \leq e$. Similarmente, como candidato a cola tiene a lo más un vértice adyacente entre los candidatos a cuerpo, entonces $e \leq t$. Como $(b - 1)(t - 1) \leq 1$, y dado que $\min\{b, t\} \geq 2$, entonces $b = t = 2$ y $2 = b(t - 1) \leq e \leq t \leq 2$, así, $e = 2$. Como estamos en busca de un grafo escorpión, entonces se concluye que solo existe un candidato a cuerpo y un candidato a cola.

Fase 3. Sean u y v el candidato a cuerpo y el candidato a cola respectivamente. Empezamos preguntando por las relaciones de adyacencias de u que aún no se han preguntado, de estas existen a lo más $n - 3$. En el caso de que el grado u sea $n - 2$, ya sabemos cual es el candidato a cola. Buscamos las relaciones de

adyacencias del candidato a cola y del vértice que hay entre u y v , de donde se requieren a lo más $n - 3 + n - 3$ preguntas. El caso del candidato a cola v , se trabaja de forma similar.

Luego de pasar por las fases 1, 2 y 3 se concluye que se realizaron a lo más $6n - \frac{|I|}{2} - 11$ preguntas. Además, $|I| \geq 4$ implica que $-\frac{|I|}{2} \leq -2$. De lo anterior, obtenemos

$$C(\mathcal{P}) \leq 6n - \frac{|I|}{2} - 11 \leq 6n - 2 - 11 = 6n - 13.$$

Para ver la anterior demostración con más detalle puede ir a [9] en la página 78. \square

2.4. Propiedad no evasiva más pequeña

Dada una propiedad de grafos \mathcal{P} , el conjunto de grafos que satisface dicha propiedad se puede clasificar de acuerdo al grafo al cual es isomorfo, dando origen a clases de isomorfismo. De lo anterior, el conjunto de propiedades de grafos se puede dividir de acuerdo a las clases de isomorfismo que posea o por la cantidad de vértices que tengan los grafos.

En la presente sección, hablaremos acerca de la propiedad no evasiva mas pequeña teniendo en cuenta la cantidad de vértices, más no la cantidad de clases de isomorfismos.

Teorema 2.2. *Sea \mathcal{G}_5 el conjunto formado por todos los grafos en 5 vértices. Consideremos la propiedad \mathcal{P} conformada por los elementos de \mathcal{G}_5 que son isomorfos a los grafos mostrados en la Figura 2.4. Entonces, \mathcal{P} y $\mathcal{G}_5 \setminus \mathcal{P}$ son no evasivas. Además, toda propiedad no trivial de grafos en 4 vértices es evasiva.*

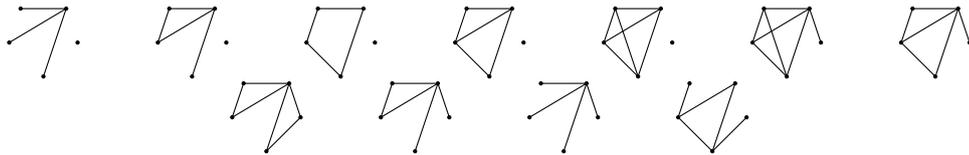


FIGURA 2.4: Representantes de las clases de isomorfismos de \mathcal{P}

Demostración. Véase [1] página 2. \square

El anterior teorema nos muestra la propiedad no trivial y no evasiva más pequeña posible, la cual se obtiene cuando se trabajan con 5 vértices.

Por otro lado, si queremos clasificar las propiedades de grafos en evasivas y no evasivas teniendo en cuenta la cantidad de clase de isomorfismos, podemos hacer uso del siguiente teorema:

Teorema 2.3. *Sea \mathcal{P} una propiedad de grafos que tiene uno o dos clases de isomorfismos. Entonces \mathcal{P} es evasiva.*

Demostración. Véase [4] página 10. □

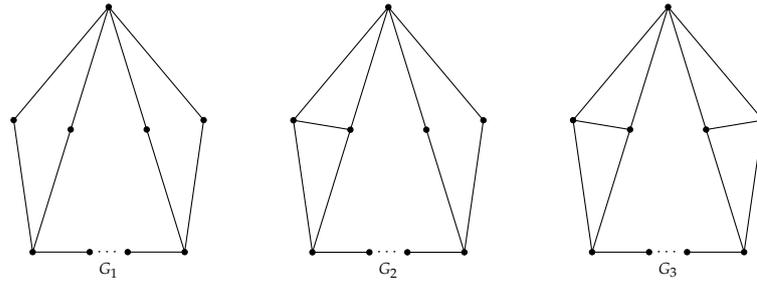
Es importante resaltar que el anterior teorema no nos permite clasificar todas las propiedades asociadas a grafos, ya que, para gran parte de estas se pueden obtener mas de dos clases de isomorfismos. Como un ejemplo de la no aplicación de este teorema tenemos la propiedad de Kleitman, ya que es una propiedad no evasiva que cuenta con tres clases de isomorfismos y que antes de ser demostrado el teorema 2.2, era considerada la propiedad no evasiva más pequeña en cuanto al número de vértices y cantidad de clases de isomorfismos.

Siguiendo con el recuento de propiedades no evasivas, presentamos una generalización de la propiedad de Kleitman propuesta por Longueville en [9], la cual queda descrita de la siguiente manera: Sea \mathcal{P} la propiedad que consiste de todos los grafos sobre n vértices que son isomorfos a uno de los tres grafos mostrados en la Figura 2.5, donde la arista central que caracteriza a la propiedad de Kleitman es reemplazada por un camino de longitud $n - 5$.



FIGURA 2.5: Representantes de las clases de isomorfismos

Sumada a la propiedad anterior, tenemos una propiedad de grafos que también consta de tres clases de isomorfismos, la cual llamaremos \mathcal{P}_3 y que es definida como el conjunto de grafos sobre $n \geq 7$ vértices que son isomorfos a uno de los grafos mostrados en la Figura 2.6

FIGURA 2.6: Clases de isomorfismos de \mathcal{P}_3

Teorema 2.4. *La propiedad \mathcal{P}_3 es no evasiva.*

Demostración. Véase [4] página 10.

Consideremos los grafos G_1 , G_2 y G_3 mostrados en la Figura 2.6 y notemos que en cada uno de ellos podemos distinguir cuatro grupos de vértices:

- **Tipo a:** hay un solo vértice de grado cuatro.
- **Tipo b:** hay dos vértice de grado tres que no nos distinguen los tres grafos no isomorfos.
- **Tipo c:** hay cuatro vértices de grado 2 o 3, las adyacencias entre ellos diferencian los tres grafos no isomorfos.
- **Tipo d:** son los vértices restantes de grado 2 en G_1 , G_2 o G_3 .

La estrategia consiste en escoger un vértice al azar, digamos v_1 y preguntar para determinar los vértices adyacentes a éste. Teniendo en cuenta a G_1 , G_2 y G_3 , notamos que la única forma de continuar el juego es que el grado de v_1 sea 4, 3 o 2. en caso contrario el grafo se descarta. Así,

Caso 1. Si el grado de v_1 es 4, entonces existen vértices v_2, v_3, v_4, v_5 adyacentes a v_1 , que por las características de G_1 , G_2 y G_3 estos deberían ser vértices tipo c. Escogemos uno de estos vértices, sin pérdida de generalidad, supongamos que es v_2 . Procedemos a preguntar para determinar los vértices adyacentes a v_2 , notemos que para poder continuar con el juego, el grado de v_2 debe ser 2 o 3. Si el grado de v_2 es 3, entonces este es adyacente a un v_i con $i \in \{3, 4, 5\}$. Supongamos que dicho vértice es v_3 ; así, v_2 es adyacente a v_1

y a un nuevo vértice v_6 . Si lo anterior no ocurre el grafo se descarta. Ahora, preguntamos para determinar los vértices adyacentes a v_3 y v_6 ; al preguntar por v_3 este debe ser de grado 3 y para poder continuar el juego, v_3 debe ser adyacente a v_6 ; además v_6 debe tener grado 3 y ser adyacente a v_2 , v_3 y a un nuevo vértice v_7 , si lo anterior no se cumple se descarta el grafo. Si el juego continua, procedemos a preguntar para determinar los vértices adyacentes a v_7 . Para poder continuar, el grado de v_7 debe ser 2 y v_7 es adyacente a v_6 y a un nuevo vértice v_8 .

De manera general, si hemos logrado avanzar hasta obtener un nuevo vértice v_k , entonces vamos a preguntar por v_k y el juego continua si éste es de grado 2, y adyacente a v_{k-1} y a un nuevo vértice v_{k+1} . Continuamos de esta manera hasta llegar al vértice v_n . Procedemos a preguntar por v_n , si al terminar de preguntar obtenemos que el grado de v_n es 3, y además v_n resulta ser adyacente a v_{n-1} y a los vértices v_4 y v_5 , de esta manera concluimos que el grafo tiene la propiedad y no fue necesario preguntar por la arista entre v_4 y v_5 .

Por otro lado, si el grado de v_2 es 2, procedemos de forma análoga a lo hecho en el caso de que el grado de v_2 es 3.

Caso 2. Si el grado de v_1 es 2, entonces éste tiene dos opciones, es decir, v_1 es de tipo c o tipo d. Supongamos que los vértices adyacentes a v_1 son v_2 y v_3 .

Subcaso 1. Si v_1 es tipo c, entonces preguntamos para determinar los grados de v_2 y v_3 . El juego continua si solo uno de los vértices tiene grado 4 y corresponde al vértice tipo a, además el otro vértice es de grado 3 y corresponde a un vértice tipo b. Posterior a este punto, procedemos de forma similar a lo hecho en el caso 1.

Subcaso 2. Si v_1 es tipo d, entonces preguntamos para determinar los grados adyacentes a v_2 y v_3 . Si al terminar de preguntar obtenemos que el grado de v_2 y v_3 es 2 y el nuevo vértice v_4 adyacente a v_2 es diferente del nuevo vértice v_5 adyacente a v_3 , el juego continua. Ahora, indagamos por los vértices v_4 y v_5 ; si el grado de v_4 y v_5 es 2 y el nuevo vértice v_6 adyacente

a v_4 es diferente del nuevo vértice v_7 adyacente a v_5 , entonces continuamos. Asumiendo que el juego sigue, llegamos al paso donde estamos trabajando con los vértices v_i y v_j ; el juego continúa si el grado de v_i y v_j es 2 y el nuevo vértice adyacente a v_i es diferente del nuevo vértice adyacente a v_j . Seguimos de esta manera hasta obtener los vértices v_{n-6} y v_{n-5} de tipo b. Nos quedamos con uno de ellos, digamos v_{n-5} , como éste es de tipo b, tenemos que el grado de v_{n-5} es 3, es decir, que v_{n-5} es adyacente a dos nuevos vértices v_{n-3} y v_{n-4} ; indagamos por ellos y si estos son de tipo c el juego continúa. Por ser v_{n-3} y v_{n-4} de tipo c, ellos son adyacentes a un mismo vértice v_{n-2} . Procedemos a indagar por v_{n-2} y si el grado de v_{n-2} es 4 y v_{n-2} es adyacente a v_{n-1} y v_n , entonces el grafo tiene la propiedad y no ha sido necesario preguntar por la arista entre v_{n-1} y v_n .

Caso 3. Si el grado de v_1 es 3, entonces v_1 es un vértice tipo c en G_2 o G_3 o es simplemente un vértice tipo b. Sin embargo, al igual que en los casos anteriores podemos determinar si el grafo tiene o no la propiedad indagando por los grados de los vértices adyacentes a v_1 y en algún punto recaemos en un caso ya tratado.

En conclusión,

$$C(\mathcal{P}) \leq \binom{n}{2} - 1$$

□

2.5. Generalizaciones de la propiedad de Kleitman

En esta sección analizaremos la complejidad de algunas generalizaciones de la propiedad de Kleitman propuestas por nosotros.

2.5.1. Primera generalización de la propiedad de Kleitman

Consideremos la propiedad de grafos \mathcal{P} que consiste de todos los grafos G en n vértices para los que existen k vértices distinguidos x_1, x_2, \dots, x_k ($k \geq 2$) que son adyacentes entre si y para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ hay un conjunto de vértices X_i adyacentes a x_i ; ningún vértice de un X_i es adyacente a uno de X_j para $i \neq j$. Además, le pedimos que los conjuntos X_i tengan todos la misma cantidad de elementos t , así el número de vértices de G es $n = k(t + 1)$.

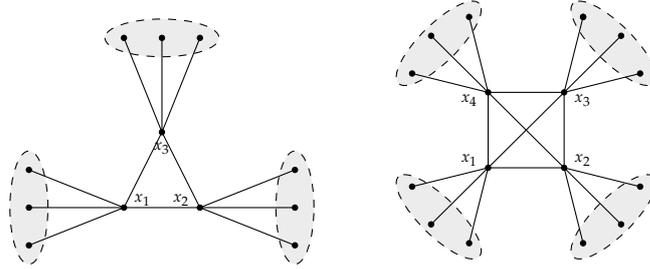


FIGURA 2.7: Ilustración de los casos en el que $k = 3$ y $k = 4$

Demostración. El jugador selecciona un vértice v_1 y empieza a preguntar para determinar los vértices adyacentes a v_1 . De acuerdo a la respuestas entregadas se pueden presentar los siguientes casos:

Caso 1. Si $\deg(v_1) = \frac{n}{k} + k - 2$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $v_1 = x_1$. Digamos que los vértices adyacentes a v_1 son $v_2, v_3, \dots, v_{\frac{n}{k}+k-1}$. Procedemos a preguntar con el fin de encontrar los vértices adyacentes a cada v_i con $i \in \{2, 3, \dots, \frac{n}{k} + k - 1\}$. Ahora, si $\deg(v_i) < \frac{n}{k} + k - 2$ para todo i o si existen k o más v_i con grado menor que $\frac{n}{k} + k - 2$ se concluye que el grafo no tiene la propiedad; pero si existe exactamente $k - 1$ vértices v_i de grado $\frac{n}{k} + k - 2$, digamos v_2, v_3, \dots, v_k , continuamos con el proceso. En este punto hemos logrado identificar los vértices v_1, v_2, \dots, v_k , así como los conjuntos X_1, X_2, \dots, X_k . Dado que investigamos a cada v_i con $i \in \{2, 3, \dots, \frac{n}{k} + k - 1\}$ tenemos que si algún $v_j \in X_i$ es adyacente a algún $v_l \in X_s$ con $i \neq s$, entonces el grafo no tiene la propiedad; en caso contrario, podemos concluir que el grafo satisface la propiedad y hasta

aquí se habrán investigado a lo sumo $\frac{(k-1)n}{k} + 1$ vértices o en su defecto nos falta por hacer $\binom{\frac{n}{k}-1}{2}$ preguntas.

Caso 2. Si $\deg(v_1) < \frac{n}{k} + k - 2$, entonces los vértices adyacentes a v_1 son $v_2, v_3, \dots, v_{\deg(v_1)+1}$. Preguntamos para determinar los vértices adyacentes a cada v_i con $i \in \{2, 3, \dots, \deg(v_1) + 1\}$. Si al terminar de preguntar ninguno tiene grado $\frac{n}{k} + k - 2$, entonces el grafo no tiene la propiedad, ya que para que tenga dicha propiedad v_1 debe ser adyacente a un vértice de grado $\frac{n}{k} + k - 2$. Ahora, si existen dos más vértices adyacentes a v_1 de grado $\frac{n}{k} + k - 2$, entonces el grafo no tiene la propiedad porque los posibles X_i, \dots, X_j están compartiendo un vértice.

Teniendo en cuenta lo anterior, la única posibilidad para continuar es que exista un solo vértice de grado $\frac{n}{k} + k - 2$ adyacente a v_1 , digamos que dicho vértice es v_{i_1} . Ahora vamos a preguntar por los vértices adyacentes a v_{i_1} . Notemos que dentro de los vértices que son adyacentes a v_1 tenemos vértices adyacentes v_{i_1} , por lo cuales ya se indagó, así los vértices que nos resta por averiguar son $v_{\deg(v_1)+2}, \dots, v_{\frac{n}{k}+k-1}$. Tengamos en cuenta que en esta lista hay $\frac{n}{k} + k - 2 - \deg(v_1)$ vértices. Ahora, preguntamos para determinar los vértices adyacentes a cada v_i con $i \in \{\deg(v_1) + 2, \dots, \frac{n}{k} + k - 1\}$. Nuevamente, si existen k o más vértices de grado $\frac{n}{k} + k - 2$ o si no existe ninguno, se concluye que el grafo no tiene la propiedad, por ende, la única forma de que posiblemente el grafo tenga la propiedad es que existan $k - 1$ vértices de grado $\frac{n}{k} + k - 2$, digamos v_{i_2}, \dots, v_{i_k} . En este punto se han preguntado por $1 + \deg(v_1) + \frac{n}{k} + k - 2 - \deg(v_1) = \frac{n}{k} + k - 1$ vértices. Nos resta preguntar por los vértices adyacentes a cada v_{i_j} con $j \in \{2, \dots, k - 1\}$, en este momento llevamos investigados $\frac{n}{k} + k - 1 + (k - 2) \left(\frac{n}{k} - 1\right) = \frac{(k-1)n}{k} + 1$ y hemos sido capaces de determinar si el grafo tiene o no la propiedad. En caso de tenerla, hemos descubierto a los vértices v_{i_1}, \dots, v_{i_k} , como también a los conjuntos X_{i_1}, \dots, X_{i_k} . Al llegar a esta parte, nos falta por hacer $\binom{\frac{n}{k}-1}{2}$ preguntas.

De los casos anteriores concluimos que,

$$C(\mathcal{P}) \leq \binom{n}{2} - \binom{t}{2} = \binom{n}{2} - \binom{\frac{n}{k} - 1}{2} = \left(\frac{(k-1)n}{k} + 1 \right) \left(\frac{(k+1)n}{2k} - 1 \right)$$

□

2.5.2. Segunda generalización de la propiedad de Kleitman

La propiedad que consiste de todos los grafos G para los que hay k vértices x_1, \dots, x_k distintos adyacentes entre sí, y los vértices restantes se dividen en k partes X_1, \dots, X_k disjuntas con igual número de elementos t , de tal manera que cada vértice $v \in X_j$ es adyacente a x_j y x_{j+1} para $j \in \{1, \dots, k-1\}$ pero no a otro elemento por fuera de X_j , mientras que cada vértice $v \in X_k$ es adyacente a x_k y x_1 pero no a otro elemento por fuera de X_k .

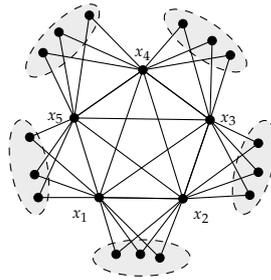


FIGURA 2.8: Ejemplificación de la propiedad

Demostración. El jugador selecciona un vértice v_1 y empieza a preguntar para determinar los vértices adyacentes a v_1 . De acuerdo a la respuestas entregadas se pueden presentar los siguientes casos:

Caso 1. Si $\deg(v_1) = \frac{2n}{k} + k - 3$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $v_1 = x_1$. Digamos que los vértices adyacentes a v_1 son $v_2, v_3, \dots, v_{\frac{2n}{k} + k - 2}$. Procedemos a preguntar con el fin de encontrar los vértices adyacentes a cada v_i con $i \in \{2, 3, \dots, \frac{2n}{k} + k - 2\}$. Ahora, si $\deg(v_i) < \frac{2n}{k} + k - 3$ para todo i o si existen k o más v_i con grado mayor que $\frac{2n}{k} + k - 3$ se concluye que el grafo no tiene la propiedad; podemos continuar con el proceso si existen exactamente $k - 1$ vértices de grado $\frac{2n}{k} + k - 3$, digamos $v_2 = x_2, v_3 = x_3, \dots, v_k = x_k$, y el resto de los $\frac{2n}{k} + k - 3$ vértices

tienen por lo menos grado 2, además podemos dividirlos en dos grupos X_1 y X_k , donde los elementos de X_1 son adyacentes a x_1 y x_2 pero no a otro elemento por fuera de X_1 , mientras que los elementos de X_k son adyacentes a x_1 y x_k pero no a otro elemento por fuera de X_k . En este punto hemos logrado identificar los vértices x_1, \dots, x_k así como los conjuntos X_1, \dots, X_k , donde cada $v \in X_j$ es por lo menos adyacente a x_j y x_{j+1} para $j \in \{2, \dots, k-1\}$. Continuamos investigando los elementos de los conjuntos X_1, \dots, X_k , pero notemos que de estos conjuntos ya hemos investigado dos de ellos, es decir, que resta por indagar a $k-2$ conjuntos, de los cuales solo preguntaremos por los vértices pertenecientes a $k-3$ de esos conjuntos; si al preguntar por los vértices obtenemos que todos tienen por lo menos grado 2 y que cada $v \in X_j$ es adyacente a x_j y x_{j+1} para $j \in \{2, \dots, k-2\}$ pero no a otro elemento por fuera de X_j , entonces el grafo tiene la propiedad, en caso contrario el grafo se descarta, y para este momento se habrán investigado a lo sumo $\frac{(k-1)n}{k} + 1$ vértices o en su defecto nos falta por hacer $\binom{n}{2}^{k-1}$ preguntas.

Caso 2. Si $\deg(v_1) < \frac{2n}{k} + k - 3$, entonces los vértices adyacentes a v_1 son $v_2, v_3, \dots, v_{\deg(v_1)+1}$. Preguntamos para determinar los vértices adyacentes a cada v_i con $i \in \{2, 3, \dots, \deg(v_1) + 1\}$. Si al terminar de preguntar ninguno tiene grado $\frac{2n}{k} + k - 3$, entonces el grafo no tiene la propiedad, ya que para que tenga dicha propiedad v_1 debe ser adyacente a dos vértices de grado $\frac{2n}{k} + k - 3$. Ahora, si existen tres o más vértices adyacentes a v_1 de grado $\frac{2n}{k} + k - 3$, entonces el grafo no tiene la propiedad porque al menos dos de los posibles X_1, \dots, X_k están compartiendo un vértice.

Teniendo en cuenta lo anterior, la única posibilidad para continuar es que existan dos vértices de grado $\frac{2n}{k} + k - 3$ adyacentes a v_1 , digamos que dichos vértices son $v_{i_1} = x_1, v_{i_2} = x_2$. Ahora, escogemos uno de los dos vértices de grado $\frac{2n}{k} + k - 3$ encontrados, digamos v_{i_1} y procedemos a preguntar por los vértices adyacentes a éste. Notemos que dentro de los vértices que son adyacentes a v_1 podemos tener vértices adyacentes

v_{i_1} , por lo cuales ya se indagó, así los vértices que nos resta por averiguar son $v_{\deg(v_1)+2}, \dots, v_{\frac{2n}{k}+k-2}$. Tengamos en cuenta que en esta lista hay $\frac{2n}{k} + k - 3 - \deg(v_1)$ vértices. Ahora, preguntamos para determinar los vértices adyacentes a cada v_i con $i \in \{\deg(v_1) + 2, \dots, \frac{2n}{k} + k - 2\}$. Nuevamente, si existen $k - 1$ o más vértices de grado $\frac{2n}{k} + k - 3$ o si no existe ninguno, se concluye que el grafo no tiene la propiedad, por ende, la única forma de que posiblemente el grafo tenga la propiedad es que existan $k - 2$ vértices de grado $\frac{2n}{k} + k - 3$, digamos $v_{i_3} = x_3, \dots, v_{i_k} = x_k$. En este punto se han preguntado por $1 + \deg(v_1) + \frac{2n}{k} + k - 3 - \deg(v_1) = \frac{2n}{k} + k - 2$ vértices. Luego de sacar los k vértices de grado $\frac{2n}{k} + k - 3$ de los $\frac{2n}{k} + k - 2$ investigados hasta el momento, se debe cumplir que el resto de los $\frac{2n}{k} + k - 2$ vértices tienen por lo menos grado 2, además de poderlos dividir en dos grupos X_1 y X_k , donde los elementos de X_1 son adyacentes a x_1 y x_2 pero no a otro elemento por fuera de X_1 , mientras que los elementos de X_k son adyacentes a x_1 y x_k pero no a otro elemento por fuera de X_k . En este punto hemos logrado identificar los vértices x_1, \dots, x_k así como los conjuntos X_1, \dots, X_k , donde cada $v \in X_j$ es por lo menos adyacente a x_j y x_{j+1} para $j \in \{2, \dots, k - 1\}$. Continuamos investigando los elementos de los conjuntos X_1, \dots, X_k , pero notemos que de estos conjuntos ya hemos investigado dos de ellos, es decir, que resta por indagar a $k - 2$ conjuntos, de los cuales solo preguntaremos por los vértices pertenecientes a $k - 3$ de esos conjuntos; si al preguntar por los vértices obtenemos que todos tienen por lo menos grado 2 y que cada $v \in X_j$ es adyacente a x_j y x_{j+1} para $j \in \{2, \dots, k - 2\}$ pero no a otro elemento por fuera de X_j , entonces el grafo tiene la propiedad, en caso contrario el grafo se descarta y hasta aquí se habrán investigado a lo sumo $\frac{(k-1)n}{k} + 1$ vértices o en su defecto nos falta por hacer $\binom{n}{2} - 1$ preguntas.

En conclusión,

$$C(\mathcal{P}) \leq \binom{n}{2} - \binom{t}{2} = \binom{n}{2} - \binom{\frac{n}{k} - 1}{2} = \left(\frac{(k-1)n}{k} + 1 \right) \left(\frac{(k+1)n}{2k} - 1 \right)$$

□

2.5.3. Tercera generalización de la propiedad de Kleitman

Consideremos la propiedad de grafos \mathcal{P} que consiste de todos los grafos G en n vértices para los cuales existen dos vértices x e y especiales, junto a dos conjuntos X y Y tales que los elementos de X son adyacentes a x y los elementos de Y son adyacentes a y con $X \cap Y = \emptyset$ y ningún elemento de X es adyacente a ningún elemento de Y , además, se pide que existan c caminos de longitud l que empiezen en x y terminen en y satisfaciendo que los vértices en cada camino solo son adyacentes a dos vértices del mismo camino. Además, los conjuntos X y Y deben tener la misma cantidad de elementos t , así el número de vértices de G es $n = 2t + c(l-1) + 2$.

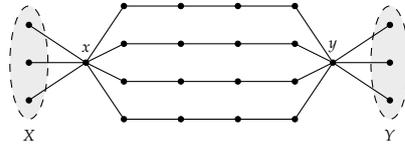


FIGURA 2.9: Ilustración de la propiedad con $n = 24$, $c = 4$, $l = 5$ y $t = 3$

Demostración. Notemos que en un grafo que satisfaga la propiedad \mathcal{P} , se tienen únicamente tres tipos de vértices.

- **Tipo 1:** Son los vértices especiales x y y que tienen el mayor grado posible, es decir, $\deg(x) = \deg(y) = t + c$.
- **Tipo 2:** Son los vértices que están en X o en Y y cuyo grado oscila entre 1 y t .
- **Tipo 3:** Son los vértices que están en alguno de los c caminos de longitud l que tienen grado 2.

La estrategia consiste en escoger un vértice al azar, digamos v_1 y preguntar para determinar los vértices adyacentes a este, la única forma de seguir y no descartar

el grafo es que v_1 sea de alguno de los tres tipos antes mencionados. Por ende, se presentan los siguientes casos:

Caso 1. Si $\deg(v_1) = t + c$, entonces v_1 es un vértice tipo 1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $v_1 = x$ y los vértices adyacentes a este son $v_2, v_3, \dots, v_{t+c+1}$. Procedemos a preguntar para determinar los vértices adyacentes a cada v_i con $i \in \{2, \dots, t + c + 1\}$, al terminar de preguntar, solo podremos continuar si los vértices se clasifican en t vértices del tipo 2 y c vértices del tipo 3. En caso contrario el grafo se descarta y se concluye que no tiene la propiedad. Si continuamos, entonces hemos aislado el conjunto X que estaría constituido por t vértices del tipo 2. Ahora, los c vértices restantes, por ser tipo 3 tienen grado 2, de donde cada uno de ellos es adyacentes a x y aun nuevo vértice, de allí obtenemos c nuevos vértices, donde cada uno se encuentra en caminos diferentes, así preguntamos por cada uno de estos c vértices y la única manera de continuar y no descartar el grafo es que sean vértices del tipo 3 y se encuentren en el mismo camino que su antecesor; repetimos el proceso anterior $l - 2$ veces más y en este punto obtenemos c vértices nuevos. Procedemos a preguntar por ellos para indagar sobre sus relaciones de adyacencia, el proceso continua si y solamente si estos c vértices son tipo 3 y además son adyacentes a un mismo vértice, digamos b . Ahora, indagamos a b . Si al preguntar el grado de b es $t + c$, entonces $b = y$ y hemos aislado al conjunto Y . En este punto podemos decidir si el grafo tiene o no la propiedad, por ende, hemos terminado el juego. De lo anterior, podemos notar que nos faltaron por indagar los t elementos de Y , lo que corresponde a un total de $\binom{t}{2}$ aristas sin preguntar.

Caso 2. Si $1 \leq \deg(v_1) \leq t$, entonces los vértices adyacentes a v_1 son $v_2, \dots, v_{\deg(v_1)+1}$. Procedemos a indagar por cada v_i con $i \in \{2, \dots, \deg(v_1) + 1\}$, para poder continuar se debe cumplir que cada v_i debe ser tipo 2, a excepción de un único vértice que debe ser tipo 1, digamos que $v_2 = x$ (no se abarca el caso $\deg(v_1) = 2$ y v_1 siendo tipo

3), además cada v_i con $i \in \{2, \dots, \deg(v_1) + 1\}$ debe pertenecer a X , ya que, en caso contrario el grafo no tiene la propiedad. Dado que el grado de v_2 es $t + c$, entonces hemos aislado al conjunto X junto con el vértice x , ahora procedemos de manera similar al caso 1. Al final quedan sin indagar $\binom{t}{2}$ aristas.

Caso 3. Si $\deg(v_1) = 2$, entonces v_1 es tipo 2 o tipo 3, si es tipo 2 recaemos en el caso 2. Supongamos que v_1 es tipo 3, entonces v_1 es adyacente a v_2 y v_3 , donde existe un único camino entre los c caminos existentes que contiene a estos 3 vértices. Ahora, indagamos por v_2 y v_3 ; la única forma de continuar y no descartar el grafo es que v_2 y v_3 sean tipo 3 o que uno de los dos sea tipo 1 y el otro sea tipo 3 (caso en el cual se procede de forma similar al caso 1). Supongamos que v_2 y v_3 son tipo 3, entonces nos quedamos con uno de los dos, digamos v_2 . Dado que v_2 es tipo 3, entonces $\deg(v_2) = 2$, es decir, es adyacente a v_1 y a un nuevo vértice v_4 . Ahora, preguntamos por v_4 y para poder continuar v_4 debe ser tipo 3 y estar en el mismo camino que v_2 o tipo 1. Si es tipo 1, procedemos de manera análoga al caso 1. Supongamos que v_4 es tipo 3, entonces repetimos el paso anterior y lo realizamos tantas veces como el juego lo permita hasta llegar a encontrar un vértice del tipo 1, llegado este punto, procedemos de forma analoga al caso 1, donde en el proceso se dejó de preguntar por $\binom{t}{2}$ aristas correspondientes a uno de los conjuntos especiales X o Y .

Por tanto, de los casos anteriores se concluye que

$$C(\mathcal{P}) \leq \binom{n}{2} - \binom{t}{2}$$

Donde $t = \frac{n-c(l-1)-2}{2}$. Así,

$$C(\mathcal{P}) \leq \binom{n}{2} - \binom{t}{2} = \frac{1}{8}(n + c(l-1) + 2)(3n - c(l-1) - 4)$$

□

Capítulo 3

Propiedades de hipergrafos

En este capítulo investigaremos algunas propiedades asociadas a los hipergrafos, estudiando de ellas su complejidad algorítmica y en algunos casos aplicaremos Teoría de Morse discreta para indagar sobre el tipo de homotopía asociada a la propiedad.

3.1. Hipergrafos

En esta sección introduciremos las nociones básicas asociadas a hipergrafos, las cuales se derivan de las definiciones relacionadas a grafos como una generalización a las mismas.

Un *hipergrafo* consiste de un conjunto de vértices V que fijaremos como el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y una colección de subconjuntos no vacíos de V llamados *hiperaristas*. Diremos que un hipergrafo es llamado k -uniforme si todas sus hiperaristas tienen k vértices. Además, dos hipergrafos G y H son *isomorfos* si existe una permutación σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ es una hiperarista de G si y solo si $\{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k)\}$ es una hiperarista de H . Una *propiedad de hipergrafos* es una propiedad acerca de los hipergrafos que se preserva bajo isomorfismo, esto es, si G y H son hipergrafos isomorfos, entonces G tiene la propiedad \mathcal{P} si y solo si H tiene la propiedad \mathcal{P} .

Como ejemplo de una propiedad de hipergrafos tenemos ser conexo, donde un hipergrafo G es *conexo* si para cada par de vértices x, y se puede encontrar una cadena de hiperaristas E_1, \dots, E_t tal que $x \in E_1, y \in E_t$ y $E_i \cap E_{i+1} \neq \emptyset, i = 1, \dots, t - 1$. Un ejemplo de un hipergrafo con esta propiedad se ilustra a continuación.

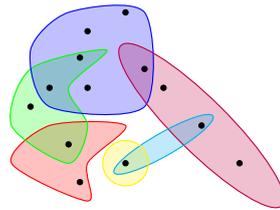


FIGURA 3.1: Hipergrafo conexo

Definición 3.1. Una propiedad de hipergrafos es monótona si es cerrada bajo remoción de hiperaristas; una propiedad no trivial es aquella que no es vacía y no todo hipergrafo tiene la propiedad.

Al igual que en grafos, para hipergrafos también se estudia la complejidad de una propiedad, haciendo uso de un juego similar al planteado en grafos, como se describe a continuación:

Dada una propiedad de hipergrafos \mathcal{P} , se quiere determinar si un hipergrafo desconocido G tiene o no la propiedad. Un oráculo responde SÍ o NO a preguntas del estilo ¿es E una arista del hipergrafo G ?, y se trata de utilizar la información revelada por el oráculo para decidir si el hipergrafo G tiene o no la propiedad \mathcal{P} , haciendo la menor cantidad de preguntas posibles. Teniendo lo anterior, se plantea la siguiente definición.

Definición 3.2 (Complejidad de una propiedad de hipergrafos). La menor cantidad de preguntas que hay que hacerle al oráculo en el peor de los casos, es llamada la complejidad de \mathcal{P} y se denota $C(\mathcal{P})$. La propiedad se dirá evasiva si $C(\mathcal{P}) = 2^n - 1$, mientras que en el caso de hipergrafos k -uniformes se tendrá que la propiedad es evasiva si $C(\mathcal{P}) = \binom{n}{k}$. Una propiedad \mathcal{P} se dirá débilmente evasiva si $C(\mathcal{P}) = \Omega(n^k)$, es decir, $C(\mathcal{P}) \geq Mn^k$ donde M representa una constante .

En cuanto al estudio de la conjetura de la evasividad para hipergrafos se tienen los siguientes avances:

- En el año 2014, Raghav Kulkarni, Youming Qiao y Xioming Sun, prueban que cualquier propiedad monótona de hipergrafos 3-uniformes es débilmente evasiva.

- Para el año 2015, Timothy Black prueba que cualquier propiedad monótona de hipergrafos k -uniformes es débilmente evasiva.

3.2. Extensión a hipergrafos de la propiedad de ser bipartito

En la presente sección mostraremos que es posible extender a hipergrafos la propiedad ser bipartitos, lo que permite dar resultados acerca de la evasividad de la misma.

En el caso de grafos bipartitos contamos con el teorema de Yao, [10], el cual representa un pilar fundamental para nuestro estudio y es por tal razón que lo mostramos a continuación:

Teorema 3.1 (Yao). *Sea \mathcal{P} una propiedad de grafos bipartitos monótona y no trivial. Entonces \mathcal{P} es evasiva.*

Demostración. Sea $B(Y, Z)$ el conjunto de grafos bipartitos que tiene la característica de que el conjunto de vértices $V = Y \cup Z$, donde Y y Z están fijos.

Consideremos que $n = |Y|$ y $m = |Z|$. Sea $G = \langle \sigma \rangle$, donde $\sigma : V \rightarrow V$ permuta ciclicamente a Y y deja fijo a cada elemento de Z , es decir,

$$\sigma = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & z_1 & z_2 & \dots & z_m \\ y_2 & y_3 & \dots & y_1 & z_1 & z_2 & \dots & z_m \end{pmatrix}$$

Entonces G actúa en el conjunto de aristas

$$E = \{\{y, z\} : y \in Y, z \in Z\}.$$

Ahora, las órbitas de la acción de G en el conjunto de aristas E están determinadas por

$$H_z = \{\{y, z\} : y \in Y\}.$$

con $z \in Z$ fijo.

Luego, el complejo de puntos fijos $\Delta_{\mathcal{P}}^{[G]}$ tiene por vértices a las órbitas de la acción de G sobre E y $\{H_{z'_1}, \dots, H_{z'_r}\} \in \Delta_{\mathcal{P}}^{[G]}$ si y solo si $H_{z'_1} \cup \dots \cup H_{z'_r} \in \Delta_{\mathcal{P}}$. Así, existe k tal que $1 < k < m$ y $H_{z'_1} \cup \dots \cup H_{z'_j} \in \Delta_{\mathcal{P}}$ si y sólo si $j > k$. Por lo tanto,

$$\Delta_{\mathcal{P}}^{[G]} = \left\{ \left\{ H_{z'_1}, \dots, H_{z'_j} \right\} : j > k, z'_1, \dots, z'_j \in Z \right\}.$$

Si suponemos que \mathcal{P} es no evasiva, entonces por Teorema 1.1 tenemos que $\Delta_{\mathcal{P}}$ es colapsable, lo que implica por Teorema 1.3 que $\chi(\Delta_{\mathcal{P}}^{[G]}) = 1$. Pero,

$$\begin{aligned} \chi(\Delta_{\mathcal{P}}^{[G]}) &= (-1)^0 \binom{m}{1} + (-1)^1 \binom{m}{2} + \dots + (-1)^{k-2} \binom{m}{k-1} \\ &= \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \dots + (-1)^{k-2} \binom{m}{k-1} \\ &= \binom{m-1}{0} + \binom{m-1}{1} - \binom{m-1}{1} - \binom{m-1}{2} + \binom{m-1}{2} + \binom{m-1}{3} + \dots \\ &\quad + (-1)^{k-2} \binom{m-1}{k-2} + (-1)^{k-2} \binom{m-1}{k-1} \\ &= 1 + (-1)^{k-2} \binom{m-1}{k-1} \end{aligned}$$

Así, $1 + (-1)^{k-2} \binom{m-1}{k-1} = 1$, es decir, $\binom{m-1}{k-1} = 0$ y esto ocurre si y solo si $k > m$, lo cual es una contradicción. \square

A continuación, consideramos la extensión a hipergrafos del concepto de grafo bipartito. Definimos *hipergrafo (k-uniforme) k-partito* como aquel hipergrafo G en el que el conjunto de vértices se divide en k partes no vacías y disyuntas dos a dos de tal forma que A es una hiperarista de G si y sólo si A consta de exactamente un vértice de cada una de las k -partes. Un ejemplo se puede observar en la Figura 3.2

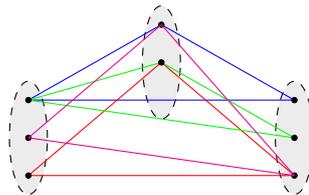


FIGURA 3.2: Hipergrafo 3-partito con 4 hiperaristas.

Consideremos un conjunto finito V que es la unión disjunta de k subconjuntos no vacíos V_1, \dots, V_k . Sea $\mathcal{G}(V_1, \dots, V_k)$ la colección de todos los hipergrafos k -partitos cuyas hiperaristas tienen exactamente un vértice de cada V_j . Una *propiedad de hipergrafos k -partitos* es una colección \mathcal{P} de hipergrafos pertenecientes a $\mathcal{G}(V_1, \dots, V_k)$ que es cerrada bajo isomorfismo de hipergrafos k -partitos (un isomorfismo de hipergrafos k -partitos debe respetar la partición $\{V_1, \dots, V_k\}$). Una propiedad de hipergrafos k -partitos es *evasiva* si su complejidad es igual a $|V_1| \cdots |V_k|$. El método de Kahn-Saks-Sturtevant puede ser imitado para obtener el siguiente resultado. El complejo $\Delta_{\mathcal{P}}$ asociado a \mathcal{P} tiene por vértices a todas las hiperaristas, y $A \in \Delta_{\mathcal{P}}$ si y solo si $A \in \mathcal{P}$.

Teorema 3.2. *Si \mathcal{P} es una propiedad no vacía monótona y no evasiva de hipergrafos k -partitos, entonces $\Delta_{\mathcal{P}}$ es colapsable.*

Ahora, presentamos el resultado principal de esta sección, que es una generalización del teorema de Yao a hipergrafos k -partitos.

Teorema 3.3. *Sea \mathcal{P} una propiedad monótona y no trivial de hipergrafos k -partitos, donde $k \geq 2$. Entonces \mathcal{P} es evasiva.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre k . Para $k = 2$, el resultado es precisamente el teorema de Yao.

Ahora, supongamos que el teorema se cumple para $k \geq 2$, es decir, toda propiedad monótona no trivial de hipergrafos k -partitos es evasiva. Demostremos el teorema para $k + 1$. Supongamos que $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k \cup V_{k+1}$ y sea \mathcal{P} una propiedad monótona no trivial y no evasiva de hipergrafos $(k + 1)$ -partitos con respecto a la partición (V_1, \dots, V_{k+1}) . Sea σ una permutación que permuta cíclicamente a los elementos de V_1 y deja fijos a los demás.

Cada órbita bajo σ actuando sobre el conjunto de todas las posibles hiperaristas sobre (V_1, \dots, V_{k+1}) , tiene la forma

$$O(v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1}) = \{\{v, v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1}\} : v \in V_1\}$$

donde $v_i \in V_i$ para cada $i \in \{2, 3, \dots, k, k + 1\}$.

Un hipergrafo H invariante bajo σ se representa como unión de órbitas y por ende, a H le podemos asociar un hipergrafo k -partito G_H con respecto a $(V_2, V_3, \dots, V_k, V_{k+1})$, cuyas hiperaristas tienen la forma $\{u_2, \dots, u_{k+1}\}$, donde $u_i \in V_i$, para todo $i \in \{2, 3, \dots, k+1\}$, y $O(u_2, \dots, u_{k+1})$ es una hiperarista de H . En la Figura 3.3, mostramos un ejemplo de H y G_H .

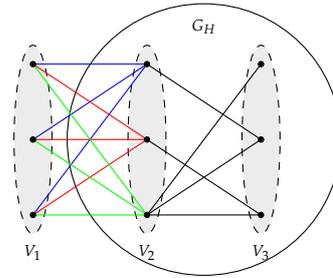


FIGURA 3.3: Hipergrafos H y G_H (con $k = 3$).

Sea $\mathcal{P}_0 = \{G_H : H \in \mathcal{P} \text{ y } H \text{ es invariante bajo } \sigma\}$. Dado que \mathcal{P} es no evasiva, por Teorema 3.2 obtenemos que $\Delta_{\mathcal{P}}$ es colapsable, luego el Teorema 1.2 implica que $\Delta_{\mathcal{P}}$ es \mathbb{Z}/p -acíclico y por el Teorema de Oliver concluimos que $\Delta_{\mathcal{P}}^{(\sigma)} \neq \emptyset$. Por ende, existe un simplex $A \in \Delta_{\mathcal{P}}^{(\sigma)}$ tal que la unión de las órbitas que conforman a A pertenece a $\Delta_{\mathcal{P}}$. Digamos que dicha unión es H_A y por consiguiente $H_A \in \mathcal{P}$; además H_A es un hipergrafo invariante bajo σ , ya que, es unión de órbitas, lo que implica que se le puede asignar un G_{H_A} . En consecuencia, $G_{H_A} \in \mathcal{P}_0$, es decir, $\mathcal{P}_0 \neq \emptyset$. Ahora, \mathcal{P}_0 determina una propiedad de hipergrafos k -partitos monótona con respecto a $(V_2, V_3, \dots, V_k, V_{k+1})$, ya que, \mathcal{P}_0 es invariante bajo isomorfismo que preservan a $V_2, V_3, \dots, V_k, V_{k+1}$ y esto se debe a que la propiedad original \mathcal{P} es también invariante bajo isomorfismo que preservan a $V_1, V_2, \dots, V_k, V_{k+1}$; sumado a lo anterior tenemos que si removemos una hiperarista de un $G_H \in \mathcal{P}_0$, esto equivale a remover $|V_1|$ hiperaristas de $H \in \mathcal{P}$ (quitamos una órbita), y lo que queda de H en este proceso es una unión de órbitas, a la cual llamaremos H_0 , y así, al quitarle la hiperarista a G_H , obtenemos a $G_{H_0} \in \mathcal{P}_0$; lo que permite concluir que \mathcal{P}_0 es monótona bajo remoción de hiperaristas.

Como la propiedad \mathcal{P} es no evasiva, se cumple también que la propiedad \mathcal{P}_0 es no evasiva. Por la hipótesis inductiva se concluye que \mathcal{P}_0 es una propiedad trivial, es decir, \mathcal{P}_0 está conformada todos los hipergrafos k -partitos sobre $(V_2, V_3, \dots, V_k, V_{k+1})$.

Por ende, el hipergrafo k -partito completo $K(V_2, V_3, \dots, V_k, V_{k+1}) \in \mathcal{P}_0$ y en consecuencia $K(V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, V_{k+1}) \in \mathcal{P}$, lo que significa que la propiedad \mathcal{P} es trivial, y por tanto se constituye una contradicción que permite concluir que la propiedad \mathcal{P} es una propiedad evasiva.

□

Capítulo 4

Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo estudiamos la temática de propiedades de grafos, la famosa conjetura de Karp o conjetura de evasividad de propiedades de grafos, y su versión para hipergrafos. Aparte del entendimiento de los resultados clásicos, en este trabajo realizamos los siguientes:

1. Una recopilación de las propiedades de grafos no evasivas más conocidas, junto con la estrategia correspondiente que permite acotar su complejidad.
2. Algunas generalizaciones de la propiedad de Kleitman, con sus respectivas estrategias y acotamiento de su complejidad.
3. Una generalización del teorema de Yao a hipergrafos k -partitos k -uniformes.

Para futuros trabajos, queda pendiente el estudio de otras propiedades asociadas a hipergrafos, como por ejemplo la propiedad de conexidad, y para estas obtener el tipo de homotopía haciendo uso de la teoría de Morse discreta.

Bibliografía

- [1] Michal Adamaszek. “The smallest nonevasive graph property”. En: *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 34 (mar. de 2013). DOI: [10.7151/dmgt.1766](https://doi.org/10.7151/dmgt.1766).
- [2] Andres Angel y Jerson Borja. “Simplicial complexes and the evasiveness conjecture”. En: *Graduate J. Math* 1 (2016).
- [3] Andres Angel y Jerson Borja. “The Evasiveness Conjecture and Graphs on $2p$ Vertices”. En: *Journal of Graph Theory* 91 (mayo de 2019). DOI: [10.1002/jgt.22419](https://doi.org/10.1002/jgt.22419).
- [4] Catherine Chronaki. “A survey of Evasiveness: Lower Bounds on the Decision-Tree Complexity of Boolean Functions”. En: (ene. de 2000).
- [5] Alexander Engström. “Transitive graphs in counterexamples to Karp’s conjecture”. En: (ene. de 2006).
- [6] Jakob Jonsson. *Simplicial Complexes of Graphs*. Vol. 1928. Ene. de 2008. ISBN: 978-3-540-75858-7. DOI: [10.1007/978-3-540-75859-4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-75859-4).
- [7] Jeff Kahn, Michael Saks y Dean Sturtevant. “A topological approach to evasiveness”. En: vol. 4. Dic. de 1983, págs. 31-33. ISBN: 0-8186-0508-1. DOI: [10.1109/SFCS.1983.4](https://doi.org/10.1109/SFCS.1983.4).
- [8] H.W. Lenstra, M.R. Best y Peter van Emde Boas. “A sharpened version of the Aanderaa-Rosenberg conjecture”. En: *Report 30/74, Mathematisch Centrum Amsterdam (1974)* (ene. de 1974).
- [9] Mark Longueville. *A Course in Topological Combinatorics*. Ene. de 2013. ISBN: 978-1-4419-7909-4. DOI: [10.1007/978-1-4419-7910-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7910-0).
- [10] Carl Miller. “Evasiveness of Graph Properties and Topological Fixed-Point Theorems”. En: *Foundations and Trends in Theoretical Computer Science* 7 (jun. de 2013). DOI: [10.1561/04000000055](https://doi.org/10.1561/04000000055).

- [11] Ronald Rivest y Jean Vuillemin. "A Generalization and Proof of the Aanderaa-Rosenberg Conjecture". En: ene. de 1975, págs. 6-11. DOI: [10.1145/800116.803747](https://doi.org/10.1145/800116.803747).