UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

TESIS DE MAESTRÍA

SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA UN PROBLEMA DE ESTRUCTURAS DELGADAS

Autor:
JOSÉ MANUEL CAUSIL

Director:
DR. CARLOS REALES MARTINEZ

Codirector:
DR. IVÁN DARÍO VELÁSQUEZ

Tesis enviada al Comité Curricular como requisito para optar al grado de Magíster en Matemáticas

Grupo de Investigación Matemáticas Unicórdoba
Departamento de Matemáticas y Estadística

17 de noviembre de 2022

Por:

José Manuel Causil

17 de noviembre de 2022

SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA UN PROBLEMA DE ESTRUCTURAS DELGADAS

Tesis de Maestría aprobada por:

Carlos Reales M.

Dr. Carlos Reales

Director de Tesis

Dr. Iván Velásquez

Codirector de Tesis

Abraham Arenas Tawil

Jurado de Tesis

Edgar Munar

Edgar Mauricio Munar Benitez

Jurado de Tesis

Ricardo Guzman

Dr. Ricardo Miguel Guzmán Navarro

Jefe de departamento de Matemáticas y Estadística

Declaración de Autoría

Yo, José Manuel Causil, declaro que esta tesis titulada, «SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA UN PROBLEMA DE ESTRUCTURAS DELGADAS» y el trabajo presentado en ella son de nuestra autoría. Nosotros confirmamos que:

- Este trabajo se realizó total o principalmente mientras estábamos en la candidatura para un título de Maestría en Matemáticas en la Universidad de Córdoba. Si alguna parte de esta tesis ha sido presentada previamente para un título o cualquier otra titulación en esta Universidad o cualquier otra institución, esto ha sido claramente establecido. Cuando hemos consultado el trabajo publicado de otros, esto siempre se atribuye claramente. Donde hemos citado el trabajo de otros, la fuente siempre se ha dado. Con la excepción de tales citas, esta tesis es completamente nuestro propio trabajo. Reconocemos todas las principales fuentes de ayuda. Cuando la tesis se basa en el trabajo hecho por nosotros junto con otros, hemos dejado en claro exactamente la ayuda ofrecida y lo que nosotros hemos contribuido.

Firmado: José Manuel Causil Pérez

Fecha:
18/11/2022

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Resumen

Facultad de Ciencias Básicas

Departamento de Matemáticas y Estadística

SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA UN PROBLEMA DE ESTRUCTURAS DELGADAS

Por JOSÉ MANUEL CAUSIL

Este trabajo está dedicado al estudio de la aproximación numérica de dos problemas de valores en la frontera usando el método de elementos virtuales. En la primera parte aproximamos las soluciones del problema de vibración de una placa delgada simplemente apoyada, modelada con las ecuaciones de Kirchhoff-Love. En la segunda parte del trabajo estudiamos el problema elíptico de sexto orden con condiciones de frontera del tipo sujeta y simplemente apoyada.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por haberme dado la sabiduría , el entendimiento y guíandome por el camino correcto para realizar este trabajo de grado. A mis familiares por brindarme el apoyo necesario durante este arduo proceso, principalmente a mis padres por inculcarme los valores necesarios para llevar a cabo esta tarea con tenacidad y compromiso y a mi hija que fue mi motivación para salir adelante. A todos los docentes que durante mi carrera contribuyeron a mi formación académica , en especial a mi director y coodirector de trabajo de grado a los distinguidos doctores Dr. Carlos Alberto Reales Martínez profesor del departamento de Matemáticas y Estadísticas de la Universidad de Córdoba, al Dr. Iván Darío Velásquez Ramos profesor del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad del Sinú Elías Bechara Zainum que con sus conocimientos me prestaron la orientación y supervisión neceasaria para llevar a cabo este proyecto. Finalmente a todos mis compañeros y amigos que durante estos años me acompañaron en los momentos más difíciles y cruciales de la carrera.

Índice general

Índice de figuras

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales parciales se han convertido en un importante tema en Matemáticas, Física e Ingeniería debido a las multiples aplicaciones que en estas áreas se pueden encontrar. En general, el modelado de la variación de una cantidad física, como temperatura, presión, desplazamiento, velocidad, esfuerzo, deformación, corriente, voltaje o concentración de un contaminante, con el cambio de tiempo o ubicación, o ambos darían como resultado ecuaciones diferenciales. De manera similar, estudiar la variación de algunas cantidades físicas sobre otras cantidades físicas también conduciría a ecuaciones diferenciales. De hecho, muchos temas de ingeniería, como la vibración mecánica o la dinámica estructural, la transferencia de calor o la teoría de los circuitos eléctricos, se basan en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Hay muchos problemas físicos relacionados con la flexión de placas isotrópicas elásticas delgadas sujetas, el equilibrio de un cuerpo elástico en condiciones de deformación plana o tensión plana, o el flujo progresivo de un fluido incompresible muy viscoso, que se pueden formular en términos de la ecuación biarmónica dimensional para una función escalar con valores prescritos de la función y su derivada normal en la frontera. Se puede considerar el problema biarmónico como un desafío en varias divisiones de la teoría lineal de la elasticidad, la hidrodinámica con números de Reynolds bajos, la ingeniería estructural y las matemáticas [33]. El bilaplaciano no es el unico operador diferencial parcial de alto orden que aparece en multiples aplicaciones ya que tambien podemos encontrar problemas relacionados con el operador trilaplaciano. Los problemas triharmónicos surgen en muchas aplicaciones de la ciencia y la ingeniería, y es muy deseable una solución numérica precisa para estos problemas. En mecánica de fluidos, la ecuación triharmónica se utiliza para describir el flujo bidimensional de un fluido altamente viscoso que gira lentamente en cavidades pequeñas [30].

Reconocida la importancia de las ecuaciones diferenciales parciales en multiples áreas de las ciencias básicas y aplicadas, es necesario considerar la forma de como encontrar soluciones para este tipo de problemas. La necesidad de obtener aproximaciones numericas precisas y confiables a los modelos matemáticos que involucran ecuaciones diferenciales parciales en áreas como las ciencias naturales, la ingeniería y la economía ha incidido de manera positiva en el crecimiento del analisis numerico de ecuaciones diferenciales parciales. Se puede considerar el articulo cientifico *U*ber die partiellen Differenzengleichungen der mathematis de Richard Courant, Karl Friedrichs y Hans Lewy, publicado en 1928 como el primer documento donde se comienza a estudiar este tipo de soluciones para ecuaciones dierencialee parciales. En la actualidad existe una amplia gama de métodos para obtener soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales pero hay que resaltar los mas establecidos: métodos de diferencias finitas, métodos de elementos finitos, métodos de volúmenes finitos y métodos espectrales.

El método de elementos virtuales (VEM), introducido en [44, 45], es una generalización reciente del método de elementos finitos que se caracteriza por la capacidad de tratar mallas poligonales/poliédricas muy generales. El interés en los métodos numéricos que pueden hacer uso de mallas politópicas generales ha experimentado recientemente un crecimiento significativo en la literatura matemática y de ingeniería; entre la gran cantidad de trabajos sobre este tema. De hecho, las mallas politópicas pueden ser muy útiles por una amplia gama de razones, incluida la malla del dominio (como grietas) y características de datos (como inclusiones), uso automático de nodos colgantes, uso de mallas, adaptabilidad. Además, el VEM presenta la ventaja de implementar fácilmente esquemas discretos en espacios altamente regulares. De hecho, al evitar la construcción explícita de las funciones de base local, el VEM puede manejar fácilmente polígonos/poliedros generales sin integraciones complejas en el elemento. El VEM se ha aplicado recientemente con éxito a una amplia gama de problemas

Este trabajo esta dedicado a aproximar la solución de dos problemas de valores en la frontera usando el método de elementos virtuales.

En la primera parte de este trabajo aproximamos las soluciones de *"el problema de vibración de una placa delgada simplemente apoyada, modelada con las ecuaciones de Kirchhoff-Love"*. Un método de elementos finitos bien conocido para estudiar el problema de vibración de la placa simplemente apoyada es el método de elementos finitos mixtos de Ciarlet-Raviart, el cual fue introducido por Ciarlet y Raviart en [17]. Este método consiste en reescribir el problema espectral de la placa de cuarto orden descrito en (2.1) como un problema de segundo orden (véase también [16, Sección 7.1]). Usaremos la misma estrategia para reducir el orden del problema pero usaremos el método de elementos virtuales para calcular la solución del problema discreto.

Los resultados contenidos en este capítulo se encuentran en la redacción de un artículo para ser sometido a publicación:

- José Causil, Carlos Reales, and I. Velásquez: *A free-stabilization Virtual Element Method for the vibration problem of simply supported Kirchhoff plates.*

En la segunda parte del trabajo estudiamos el problema elíptico de sexto orden con condiciones de contorno de tipo sujeta y simplemente apoyada. Usando, otra vez, argumentos como el método de Ciarlet-Raviart, introducimos una incógnita auxiliar $w := \Delta u$ y proponemos una formulación débil en el espacio de Sobolev $H^2 \times H^1$. Como en la primera parte del trabajo, se propone una discretización de elementos virtuales $C^1 \times C^0$ para aproximar las soluciones de la formulación débil. También proporcionamos los resultados de las estimaciones de convergencia y error. Finalmente, se reportan varios ejemplos numéricos que ilustran el rendimiento del método del elemento virtual.

Los resultados contenidos en este capítulo se encuentran en la siguiente artículo sometido a publicación:

- José Causil, Carlos Reales, and I. Velásquez: *A $C^1 - C^0$ virtual element discretization for a sixth-order elliptic equation.*

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo consignaremos algunos resultados importantes del Análisis Funcional que serán usados en el desarrollo del trabajo. No incluimos demostraciones pero se da la referencia biliografica donde se puede encontrar.

Iniciamos este repaso con los espacios de Hilbert y terminamos con la definición de los espacios de Sobolev. Como veremos mas adelante, los espacios de Hilbert nos permitirán pasar, con la ayuda del Teorema de Representación de Riesz, de un sistema de ecuaciones diferenciales a una formulación variacional o débil del problema.

1.1. Espacios de Hilbert

Definición 1.1.1 (Espacio vectorial)**.** Sea V un conjunto no vacío. V es llamado espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, si está acompañado de dos operaciones $+ : V \times V \longrightarrow V$ (suma) y $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ (producto por escalar), las cuales cumplen las siguientes propiedades.

1. Las operaciones son asociativas:

   $u + (v + w) = (u + v) + w$, para todo $u, v, w \in V$.

   $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.

2. La suma es conmutativa:

   $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$

3. Existe $0 \in V$ (vector nulo) tal que $v + 0 = v$, para todo $v \in V$.

4. Existe $1 \in V$ tal que $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$, para todo $v \in V$.

5. Para cada $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.

6. Las operaciones son distributivas:

   $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ y $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u, v \in V$.

Definición 1.1.2 (Norma)**.** Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma en V es una función $\| \cdot \|_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\|v\|_V = 0$ si y sólo si $v = 0$.

2. $\|cv\|_V = |c|\|v\|_V$, para cada $c \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.

3. $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$, para cada $v, w \in V$.

Una seminorma es una función de V en $\mathbb{R}^+$ que satisface solo las condiciones 2 y 3. Un espacio vectorial dotado de una norma se conoce como espacio normado.

Definición 1.1.3 (Mapeo Lineal)**.** Sean V y W espacios vectoriales reales. Un mapeo $f : V \longrightarrow W$ es llamado lineal si $f(\alpha v + w) = \alpha f(v) + f(w)$, para todo $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1.4 (Espacios Duales, Formas Lineales Continuas)**.** Sea V un espacio vectorial normado. El espacio $\mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ lo llamaremos espacio dual de V y denotado por V'. Un elemento $f \in V'$ será llamado forma lineal continua.

Definición 1.1.5 (Mapeo Bilineal)**.** Sean V y W espacios vectoriales reales. Un mapeo $a : V \times V \longrightarrow W$ es llamado bilineal si tanto $a(\cdot, w)$ como $a(v, \cdot)$ son mapeos lineales para cada $v, w \in V$.

Definición 1.1.6 (Producto Interior o Escalar)**.** Un producto interior o producto escalar en un espacio vectorial V es un mapeo bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

1. $\langle v, w \rangle_V = \langle w, v \rangle_V$, para todo $v, w \in V$.

2. $\langle v, v \rangle_V \geq 0$, para todo $v \in V$.

3. $\langle v, v \rangle_V = 0$ si y sólo si $v = 0$.

Definición 1.1.7. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interior y sea $v \in H$, se define la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$.

Definición 1.1.8 (Espacio de Hilbert)**.** Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interior que es completo con respecto a la norma inducida por dicho producto interior.

Las pruebas de los Teoremas 1.1.9–1.1.10 pueden ser encontradas en [22].

Teorema 1.1.9 (Teorema de Mejor Aproximación)**.** *Sea H un espacio de Hilbert real y sea V un subespacio cerrado de H. Entonces, para todo $x \in H \setminus V$ existe un único $z \in V$ tal que*

$$\|x - z\| = \min_{v \in V} \|x - v\|.$$

Además, $z \in V$ se llama la mejor aproximación de V y está caracterizada por la condición de ortogonalidad, esto es,

$$\langle x - z, v \rangle = 0, \quad \textit{para todo} \quad v \in V.$$

Teorema 1.1.10 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sean H un espacio de Hilbert real y $A : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal que satisface:*

- *Acotada: existe $M > 0$ tal que $|A(v, w)| \leq M\|v\|\|w\|$, para todo $v, w \in H$.*
- *H- elíptica: existe $\alpha > 0$ tal que $A(v, v) \geq \alpha\|v\|^2$, para todo $v \in H$.*

Entonces, para toda $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que $A(u, v) = F(v)$, para todo $v \in H$. Además, $\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H'}$.

1.2. Espacios de Sobolev

En esta sección daremos una noción de los espacios de Lebesgue; así como la definición de derivada débil o distibucional. A partir de esta se definirán los espacios de Sobolev de orden 1 y orden superior. Estos espacios permiten obtener resultados generales respecto a la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales y caracterizar el grado de regularidad de dichas soluciones. Además, el Método de Elementos Finitos (MEF) está definido y estudiado en este tipo de espacios.

Llamaremos dominio a un subconjunto abierto (o cerrado) de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío. Restringiremos nuestra atención a funciones real valuadas f, en un dominio Ω, que son Lebesgue medibles, es decir

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

y la integral de Lebesgue de f ($\mathrm{d}x$ denota la medida de Lebesgue). Para $1 \leq p < \infty$ sea

$$\|f\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

y para el caso $p = \infty$ hacemos

$$\|f\|_{\infty,\Omega} := \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}.$$

En ambos casos, definimos el espacio de Lebesgue

$$L^p(\Omega) := \left\{f : \|f\|_{p,\Omega} < \infty\right\}.$$

Un multi-índice α es una n-tupla $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En tal caso se define $|\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j$ y dada una función $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ se denota:

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definición 1.2.1. Dada una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. El conjunto

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}},$$

es llamado el soporte de f. Si este conjunto resulta acotado entonces decimos que f es de soporte compacto en Ω.

Definición 1.2.2. Conjunto estrellado Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice estrellado si existe un punto $a_0 \in A$, tal que todos los puntos que unen a_0 con otro punto de A están contenidos en A

Definición 1.2.3. Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ o $\mathcal{D}(\Omega)$ el conjunto de funciones $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ de soporte compacto en Ω.

Definición 1.2.4. Se dice que $v \in L^2(\Omega)$ tiene derivada distibucional en $L^2(\Omega)$ si existe $w \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v(x)\varphi'(x)dx = -\int_\Omega w(x)\varphi(x)dx, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \quad \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Definición 1.2.5. Se define el espacio de Sobolev

$$H^1(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \quad \text{para} \quad j = 1,2 \right\},$$

además se define el producto interior

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R},$$

dado por

$$\langle v, z \rangle_{1,\Omega} := \langle v, z \rangle_{0,\Omega} + \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_j}, \frac{\partial z}{\partial x_j} \right\rangle_{0,\Omega}, \quad \text{para todo} \quad v, z \in H^1(\Omega),$$

donde

$$\langle v, z \rangle_{0,\Omega} = \int_\Omega vz\, dx.$$

La norma inducida por este producto interior está dada por

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{1,\Omega} : H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|v\|_{1,\Omega} = \langle v, v \rangle_{1,\Omega}^{1/2} \end{aligned}$$

es decir,

$$\|v\|_{1,\Omega} := \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad \text{para todo} \quad v \in H^1(\Omega).$$

En este espacio, la seminorma está dada por

$$|v|_{1,\Omega} := \left(\sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^{2} \right)^{1/2}.$$

También se define el espacio de Sobolev de orden 2 como:

$$H^2(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2 \right\}.$$

Y la norma está dada por:

$$\|v\|_{2,\Omega} := \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^{2} + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^{2} \right)^{1/2}.$$

Ahora, la seminorma viene dada por:

$$|v|_{2,\Omega} := \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^{2} \right)^{1/2}.$$

Además se puede demostrar que

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^{2} = \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2,$$

y

$$\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^{2} = \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2,$$

y por lo tanto podemos escribir

$$\|v\|_{2,\Omega} := \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 + \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

En general, se puede definir el espacio de Sobolev de orden m como

$$H^m(\Omega) := \{ v \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), \quad \text{para todo} \quad \alpha, |\alpha| \leq m \}.$$

Sobre $H^m(\Omega)$ se define el producto interno

$$\langle w, u\rangle_{m,\Omega} := \sum_{|\alpha|\leq m} \langle \partial^\alpha w, \partial^\alpha u\rangle_{0,\Omega} \quad \text{para todo} \quad w, u \in H^m(\Omega).$$

Por tanto, su norma inducida está dada por

$$\|v\|_{m,\Omega} := \langle v, v\rangle_{m,\Omega}^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha v\|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2},$$

y a su vez la seminorma es

$$|v|_{m,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2}.$$

Además, definimos el espacio $H_0^1(\Omega)$ como la clausura de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ con respecto a la norma de $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, es decir,

$$H_0^1(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega) : \text{existe } \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \text{ tal que } \|v-\varphi_i\|_{1,\Omega} \to 0, i \to \infty\right\}.$$

Definición 1.2.6. Definicion: Sea $m \geq 1$. Dado $u \in L^2(\Omega)$, se define la norma

$$\|u\|_{-m,\Omega} := \sup_{v\in H_0^m(\Omega)} \frac{(u,v)_{0,\Omega}}{\|v\|_{m,\Omega}}. \tag{1.1}$$

Nosotros definimos $H^{-m}(\Omega)$ como la clausura de $L^2(\Omega)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{-m,\Omega}$.

Para el espacio de Sobolev construido sobre $L^2(\Omega)$, identificamos el espacio dual de $H_0^m(\Omega)$ como $H^{-m}(\Omega)$. Además, por la definición de H^{-m}, existe un emparejamiento dual $\langle u, v\rangle$ para todo $u \in H^{-m}(\Omega)$ y $v \in H_0^m(\Omega)$, es decir, $\langle u, v\rangle$ es una forma bilineal, y $\langle u, v\rangle = (u, v)_{0,\Omega}$ cuando $u \in L^2(\Omega)$, $v \in H_0^m(\Omega)$.

Claramente

$$\cdots \subset H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset H^{-2}(\Omega) \subset \cdots \tag{1.2}$$

y tambien

$$\cdots \leq \|u\|_{-2,\Omega} \leq \|u\|_{-1,\Omega} \leq \|u\|_{0,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{2,\Omega} \leq \cdots \tag{1.3}$$

donde H^{-m} se definió como el espacio dual de H_0^m y no de H^m.

1.3. Desigualdad de Poincaré

Definición 1.3.1. Diremos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio con frontera suave si para cada punto $x \in \partial\Omega$, existe un sistema de coordenadas $(y_1, ..., y_{n-1}, y_n) = (y', y_n)$ con origen en x, una bola $B(x)$ y una función φ definida en una vecindad $N \subset \mathbb{R}^{n-1}$ de $y' = 0'$, tal que

$$\varphi \in C^\infty(N), \quad \varphi(0') = 0$$

y

1. $\partial\Omega \cap B(x) = \{(y', y_n) \mid y_n = \varphi(y'),\, y' \in N\}$.
2. $\Omega \cap B(x) = \{(y', y_n) \mid y_n > \varphi(y'),\, y' \in N\}$.

Dada una función $v \in H^1(\Omega)$, interesa definir o al menos darle sentido, si es posible a $v|_\Gamma$, la restricción de v a Γ. Lo anterior es de suma importancia ya que para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, las funciones de $H^1(\Omega)$ no son necesariamente inducidas por funciones continuas. La demostración de los siguientes resultados se pueden encontrar en [22].

Teorema 1.3.2 (Teorema de Integración por partes)**.** *Sea Ω un abierto de acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ. Entonces para todo $v, w \in H^1(\Omega)$ se tiene*

$$\int_\Omega v\frac{\partial w}{\partial x_i} = -\int_\Omega w\frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_0(w)n_i \qquad i = 1, 2.$$

Donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ es el operador de trazas respectivo (ver [22, Teoremas 9.9 y 4.14]) y n_i es la i-ésima componente del vector normal $\boldsymbol{n}$ exterior a la frontera Γ.

Teorema 1.3.3 (Desigualdad de Trazas)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera suave. Entonces, existe una constante $C = C(\Omega)$, tal que para cualquier $v \in V =$*

$\left\{v : \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty\right\}$, *se cumple que*

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

El siguiente teorema se basa en un conocido resuldado del Análisis Funcional conocido como el Teorema de Rellich, el cual establece que la inyección de $H^m(\Omega)$ en $H^{m-1}(\Omega)$ es compacta. Se han seguido las ideas de Gatica (página 430).

Teorema 1.3.4 (Desigualdad de Poincaré Generalizada)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado conexo de frontera suave, sea $l \geq 0$ y $\mathcal{F}$ una familia finita de funcionales lineales continuos en $H^{l+1}(\Omega)$ tal que:*

$$p \in \mathbb{P}_l,\ F(p) = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F} \Longrightarrow p \equiv 0. \tag{1.4}$$

Entonces, existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tal que:

$$C_1|||v||| \leq \|v\|_{l+1,\Omega} \leq C_2|||v|||, \quad \forall v \in H^{l+1}(\Omega),$$

donde

$$|||v||| := \left(|v|^2_{l+1,\Omega} + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(v)|^2\right)^{1/2}.$$

En los siguientes ejemplos veremos dos aplicaciones directas del teorema anterior y fueron tomados de [22]. Como resultado obtendremos la equivalencia entre la norma en $H^1(\Omega)$ y la seminorma de este mismo espacio (norma $L^2(\Omega)$ del gradiente) en dos subespacios cerrados de $H^1(\Omega)$.

Teorema 1.3.5. *(Desigualdad de Poincaré) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un dominio acotado. Entonces existe una constante C que depende solo de Ω tal que para cada función u del espacio de Sóbolev $H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$ se tiene*

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C\|\nabla u\|_{0,\Omega}.$$

Teorema 1.3.6. *(Regularidad elíptica) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio convexo y acotado con frontera suave. Entonces, existe una constante C que depende de Ω, tal que para cualquier* *función suficientemente suave u , con $u = 0$ o $n \cdot \nabla u = 0$ sobre $\partial\Omega$, se tiene que*

$$\|D^2 u\|_{0,\Omega} \leq C\|\Delta u\|^2_{0,\Omega}.$$

Teorema 1.3.7. *(Fórmula de Gauss-Green) Sean $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_\Omega u\Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} dS$$

Finalmente, resaltamos el siguiente resultado que será muy útil en el desarrolo del trabajo. Se trata de la equivalencia entre la norma en $H^1(\Omega)$ y la seminorma de este mismo espacio (norma $L^2(\Omega)$ del gradiente) en un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$.

Teorema 1.3.8. *Sean Γ_D la frontera Dirichleth y Γ la frontera de Ω con $\Gamma_D \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_D \neq \Gamma$ y sea $|\Gamma_D|$ la medida de Γ_D donde $|\Gamma_D| \geq 0$, y definamos el subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ dado por*

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : \quad \gamma_0(v) = 0 \quad en \quad \Gamma_D\},$$

donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ es el operador de trazas respectivo (ver [22, Teoremas 9.9 y 4.14]), entonces la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ son equivalentes (véase [22].

Afirmación: Para todo $v \in W$, $|v|_{2,\Omega} = \|\Delta v\|_{0,\Omega}$ y además las normas $\|v\|_{2,\Omega}$ y $\|\Delta v\|_{0,\Omega}$ son equivalentes.

Demostración. En efecto sea $v \in W$, entonces $v = \nabla v = 0$ en Γ y aplicando integración por partes dos veces tenemos que

$$\begin{aligned}
|v|^2_{2,\Omega} &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right\|^2_{0,\Omega} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}dx \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(-\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial^3 v}{\partial x_i^2 \partial x_j}dx + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)dS\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(-\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right)dx\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\int_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}dx - \int_\Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}dS\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}dx \\
&= \int_\Omega \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}dx = \int_\Omega \Delta v \Delta v dx = \|\Delta v\|^2_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{2,\Omega} &= \left(\|v\|^2_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\|v\|^2_{0,\Omega} + \|\nabla v\|^2_{0,\Omega} + \|\Delta v\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ahora veámos que si $v \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, entonces

$$\|\nabla v\|_{0,\Omega} \lesssim \|\Delta v\|_{0,\Omega} \tag{1.5}$$

Sea $v \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, entonces $v = 0$ en $\Gamma = \partial\Omega$ y aplicando la desigualdad de Poincaré existe una constante $C > 0$, que depende sólo de Ω tal que

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C\,\|\nabla v\|_{0,\Omega} \tag{1.6}$$

Ahora, aplicando esta desigualdad, la de Cauchy-Schwarz y la fórmula de Gauss - Green tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 &= \int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla v) dx = -\int_\Omega (v\Delta v) dx + \int_\Gamma (v \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} v) dS \\
&= -\int_\Omega (v\Delta v) dx \leq \left| -\int_\Omega (v\Delta v) dx \right| \leq \int_\Omega |v\Delta v| \, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega |\Delta v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|v\|_{0,\Omega} \|\Delta v\|_{0,\Omega} \leq C \|\nabla v\|_{0,\Omega} \|\Delta v\|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

Si juntamos (1.5) y (1.6) tenemos

$$\|v\|_{0,\Omega}^2 \leq C^4 \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 \tag{1.7}$$

así haciendo $\beta = \sqrt{1 + C^2 + C^4} > 0$ y aplicando (1.5) (1.6) y (1.7) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{2,\Omega}^2 &= \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{0,\Omega}^2 \\
&\leq \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 + C^4 \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 + C^2 \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 \\
&= \left(1 + C^2 + C^4\right) \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 = \beta^2 \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2
\end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos que $\|v\|_{2,\Omega}^2 \leq \beta^2 \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2$, es decir $\|v\|_{2,\Omega} \leq \beta \|\Delta v\|_{0,\Omega}$. Por otro lado $\|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{0,\Omega}^2 = \|v\|_{2,\Omega}^2$ y por lo tanto se tiene que

$$\|\Delta v\|_{0,\Omega} \leq \|v\|_{2,\Omega}$$

lo cual demestra la equivalencia entre las normas. □

Sean $u \in S, u_h \in S_h$ que satisfacen

$$a(u,v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in S \tag{1.8}$$

$$a_h(u_h, v) = \langle l_h, v \rangle \quad \forall v \in S_h \tag{1.9}$$

con a y a_h que cumplen las hipotesis del Lemma 1.1.10. Entonces, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.3.9. *(Primer Lema de Strang). Bajo las hipótesis anteriores, existe una constante C independiente de h tal que*

$$\begin{aligned}\|u-u_h\| &\leq C\left(\inf_{v_h\in S_h}\left\{\|u-v_h\|+\sup_{w_h\in S_h}\frac{|a(v_h,w_h)-a_h(v_h,w_h)|}{\|w_h\|}\right\}\right.\\ &\quad\left.+\sup_{w_h\in S_h}\left\{\frac{\langle l,w_h\rangle-\langle l_h,w_h\rangle}{\|w_h\|}\right\}\right)\end{aligned}$$

Demostración. Sea $v_h \in S_h$. Por conveniencia, sea $u_h - v_h = w_h$, entonces por la continuidad uniforme y por (1.8) y (1.9) se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha\|u_h-v_h\|^2 &\leq a_h(u_h-v_h,u_h-v_h)=a_h(u_h-v_h,w_h)\\ &= a(u-v_h,w_h)+[a_h(v_h,w_h)-a_h(v_h,w_h)]+[a_h(u_h,w_h)-a(u,w_h)]\\ &= a(u-v_h,w_h)+[a_h(v_h,w_h)-a_h(v_h,w_h)]-[\langle l,w_h\rangle-\langle l_h,w_h\rangle]\end{aligned}$$

ahora dividiendo por $\|u_h - v_h\| = \|w_h\|$ y usando la continuidad de a, se tiene que

$$\begin{aligned}&\|u-u_h\|\\ \leq\ & C\left(\|u-v_h\|+\frac{|a(v_h,w_h)-a_h(v_h,w_h)|}{\|w_h\|}+\frac{|\langle l,w_h\rangle-\langle l_h,w_h\rangle|}{\|w_h\|}\right)\end{aligned}$$

Dado que v_h es un elemento arbitrario en S_h, la afirmación se sigue de la desigualdad del triángulo

$$\|u-u_h\|\leq\|u-v_h\|+\|v_h-u_h\|.$$

□

Capítulo 2

El problema de vibración de una placa delgada usando el método de Ciarlet Raviart

En este capítulo estamos interesados en aproximar las soluciones de *"el problema de vibración de una placa delgada simplemente apoyada, modelada con las ecuaciones de Kirchhoff-Love"*. Se introduce una incognita auxiliar $w := \Delta u$ en Ω y se siguen los argumentos del método de Ciarlet-Raviart. Se analiza el problema de autovalores asociado en forma continua y en forma discreta. Se finaliza presentando los estimativos de error.

2.1. Introducción

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado poligonal correspondiente a la superficie media de una placa en su configuración de referencia, sujeta en toda su frontera $\Gamma := \partial\Omega$ (véase la Figura 2.1). Asumiremos que la placa es homogénea, isotrópica, linealmente elástica, y lo suficientemente delgada como para ser modelada por las ecuaciones de Kirchhoff-Love. Denotamos por u el desplazamiento transversal de la superficie media de la placa.

El problema de vibración de una placa delgada simplemente apoyada y modelada con las ecuaciones de Kirchhoff-Love se define como sigue (véase por ejemplo [8,

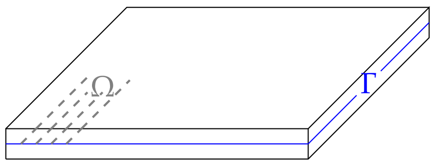

FIGURA 2.1: Placa Kirchhof-Love.

16]). Encontrar $u \neq 0$, tal que

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= \lambda u \qquad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{sobre } \Gamma, \\ \Delta u &= 0 \qquad \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde Δ y Δ^2 denotan los operadores laplaciano y bilaplaciano, respectivamente, y $\lambda = \omega^2$, con $\omega > 0$ es la frecuencia de vibración. Además, para simplificar la notación hemos tomado el módulo de Young y la densidad de la placa, ambos iguales a 1, aunque estas constantes pueden tomar valores distintos a uno, en ese caso solo se afectarán algunas constantes (acotamiento y elipticidad) además no podríamos incluir coeficientes variables ya que las constantes físicas del problema no son variables. En la literatura del Análisis Numérico existen una gran cantidad de métodos númericos que han abordado el problema de vibración con distintas condiciones de contornos, ver por ejemplo [34, 12, 17, 29, 38, 37]. Los autores de [12] introdujeron un método híbrido de elementos finitos para aproximar las frecuencias de vibración de una placa empotrada (es decir, con condiciones de contorno $u = \nabla u \cdot \boldsymbol{n} = 0$). En [29], se analizó una formulación discretas basada en métodos de elementos finitos de Morley semi-discretos y totalmente discretos, para resolver el problema de la vibración de Kirchhoff. Las condiciones de contorno del problema de vibración de una placa simplemente apoyada (EL PROBLEMA MODELO DE ESTA TESIS) son homogéneas. Después, los autores de [8] desarrollaron un método C^0-IPG para aproximar los autovalores del operador biharmónico con tres tipos de condiciones de contorno, en particular, como las condiciones de frontera descritas en (2.1). Más tarde, en [38] se propuso y analizó un método de elementos finitos lineales a trozos, para aproximar el espectro de los problemas de vibración y pandeo de una placa delgada modelada con las ecuaciones de Kirchhoff-Love.

Por otro lado, un método de elementos finitos bien conocido para estudiar el problema de vibración de la placa simplemente apoyada es el método de elementos finitos mixtos de Ciarlet-Raviart, introducido por Ciarlet y Raviart en [17]. Este método consiste en reescribir el problema espectral de la placa de cuarto orden descrito en (2.1) como un problema de segundo orden (vése también [16, Sección 7.1]).

Nos interesa aproximar los valores propios del problema de vibración de una placa delgada simplemente apoyada y modelada por las ecuaciones de Kirchhoff-Love. Consideraremos una formulación variacional basada en el método de Ciarlet-Raviart, esto es, introduciendo una nueva incógnita $w := \Delta u$ en Ω en el sistema de ecuaciones (2.1).

El esquema de este capítulo es el siguiente; en la Sección 2.2, presentamos la formulación variacional del problema de vibración de una placa simplemente apoyada y modelada por las ecuaciones de Kirchhoff-Love, se analiza el espectro del problema espectral. A continuación, en la Sección 2.3, presentamos las definiciones de los espacios de elementos virtuales C^1 y C^0. Luego, en la Sección 2.4 se presenta una formulación discreta de elementos virtuales imitando el análisis desarrollado para el problema continuo. Además, en la Sección 2.5 demostramos que el esquema numérico proporciona una aproximación correcta y establecemos estimaciones de error de orden óptimas para soluciones aproximadas.

2.1.1. Notaciones

En este capítulo usaremos notaciones estándar para espacios de Sobolev, normas y seminormas. Además, usaremos la notación $a \lesssim b$ para decir que existe una constante positiva C independiente del parámetro de la malla h, tal que $a \leq Cb$. Subrayamos que tal constante puede tomar diferentes valores en las diferentes ocurrencias de "$\lesssim$". Denotamos por W, W_0, Q, V, V_0 y $\mathbb{V}_0$ los espacios $W := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega)$, $V := H^1(\Omega)$, $V_0 := H_0^1(\Omega)$ y $\mathbb{V}_0 := V_0 \times V_0$ respectivamente dotados de sus normas habituales. Además, para todo $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$, denotamos el espacio polinomial de grado menor o igual a k por $\mathbb{P}_k(\mathcal{O})$ el cual está definido por

$$\mathbb{P}_k(\mathcal{O}) := \left\{ p\left((x_1, \cdots, x_d)\right) = \sum_{\substack{0 \le i_1, \cdots, i_d \le k \\ i_1 + \cdots + i_d \le k,}} \alpha_{i_1 \cdots i_d} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d} : \alpha_{i_1 \cdots i_d} \in \mathcal{O} \right\}$$

2.2. La formulación variacional espectral continua

Para obtener una formulación variacional del problema 2.1 multiplicamos por $v \in W$ e integramos por partes sobre Ω (dos veces) y se obtiene la clásica formulación variacional asociada con el problema de vibración (2.1) (ver [8]).

Problema 2.2.1. *Hallar* $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times W$, $u \neq 0$, *tal que*

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \quad \forall v \in W. \tag{2.2}$$

En este trabajo estamos interesados en aproximar los valores propios del problema de vibración de una placa delgada simplemente apoyada y modelada por las ecuaciones de Kirchhoff-Love. Para lograr esto, consideraremos una formulación variacional basada en el método de Ciarlet-Raviart. Esto se obtiene introduciendo una nueva incógnita en el sistema de ecuaciones (2.1). Más precisamente, definiendo $w := \Delta u$ en Ω, se tiene que el sistema de ecuaciones descrito en (2.1) se reescribe como sigue:

$$\begin{cases} \Delta u &= w \qquad \text{en } \Omega, \\ \Delta w &= \lambda u \qquad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{sobre } \Gamma, \\ w &= 0 \qquad \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{2.3}$$

Luego, multiplicando la primera ecuación del problema (2.3) con una función de prueba $\tau \in V_0$ y aplicando la fórmula de Gauss-Green se obtiene:

$$\int_\Omega w\tau dx = \int_\Omega \Delta u \tau dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \tau dx + \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}} u \tau dS = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \tau dx.$$

De lo cual se tiene que:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \tau dx + \int_\Omega w\tau dx = 0 \quad \forall \tau \in V_0. \tag{2.4}$$

Por otra parte, multiplicando la segunda ecuación de (2.3) por una función test $v \in V_0$ y aplicando la fórmula de Gauss-Green se tiene la siguiente identidad:

$$\lambda \int_\Omega uvdx = \int_\Omega \Delta wvdx = -\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla vdx + \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}} wvdS = -\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla vdx, \tag{2.5}$$

lo cual implica

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla vdx = -\lambda \int_\Omega uvdx \quad \forall v \in V_0, \tag{2.6}$$

y por lo tanto de (2.4) y (2.6) se llega a la siguiente formulación variacional.

Problema 2.2.2. *Hallar* $(\lambda, (u, w)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}_0$, *con* $(u, w) \neq 0$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \tau \, dx + \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega w\tau \, dx = -\lambda \int_\Omega uv \, dx \quad \forall (\tau, v) \in \mathbb{V}_0. \tag{2.7}$$

Ahora, con el objetivo de escribir una notación más compacta del Problema 2.2.2, introducimos las siguientes formas bilineales:

$$a : V \times V \to \mathbb{R}; \quad a(u, \tau) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \tau \, dx \qquad \forall u, \tau \in V, \tag{2.8}$$

$$b : Q \times Q \to \mathbb{R}; \quad b(\varphi, \psi) := \int_\Omega \varphi\psi \, dx \qquad \forall \varphi, \psi \in Q, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{A}((u, w), (\tau, v)) := a(u, \tau) + a(w, v) + b(w, \tau) \qquad \forall (u, w), (\tau, v) \in \mathbb{V}_0. \tag{2.10}$$

Así, la formulación variacional del problema (2.7) se reescribe como sigue.

Problema 2.2.3. *Hallar* $(\lambda, (u, w)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}_0$, *con* $(u, w) \neq (0, 0)$ *tal que*

$$\mathcal{A}((u, w), (\tau, v)) = -\lambda b(u, v) \qquad \forall (\tau, v) \in \mathbb{V}_0. \tag{2.11}$$

Si bien el método de Ciarlet-Raviart es un método mixto, también existe la posibilidad de agregar un "shift"para construir un problema tipo mixto. Esto sería una nueva idea para desarrollar un trabajo futuro de investigación.

2.2.1. El problema fuente continuo asociado

En esta sección analizaremos el espectro del Problema 2.2.2. Esto se hará a través del espectro de cierto operador definido a partir del problema fuente asociado a la formulación variacional (2.7). Probaremos que dicho operador será continuo, autoadjunto y compacto. Además, su espectro está relacionado biunivocamente con el del Problema 2.2.2.

Con este objetivo en mente, primero probaremos algunos resultados preliminares. Primero, en el siguiente lema demostraremos algunas propiedades de las formas bilineales $a(\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot)$ y $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ definidas en (2.8), (2.9) y (2.10), respectivamente.

Lema 2.2.1. *Existe una constante positiva α tal que*

$$|a(u,\tau)| \leq ||u||_{1,\Omega}||\tau||_{1,\Omega} \qquad \forall u,\tau \in V_0, \tag{2.12}$$

$$|b(\varphi,\psi)| \leq ||\varphi||_{1,\Omega}||\psi||_{1,\Omega} \qquad \forall \varphi,\psi \in V_0, \tag{2.13}$$

$$a(\tau,\tau) \geq \alpha||\tau||^2_{1,\Omega} \qquad \forall \tau \in V_0. \tag{2.14}$$

Demostración. Sean $u,\tau,\varphi,\psi \in V_0$. Entonces, aplicando la desigualdad de Cauchy-schwarz tenemos que

$$\begin{aligned}
|a(u,\tau)| &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\tau dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_\Omega |\nabla\tau|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\|\nabla u\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\|\nabla\tau\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\|\nabla u\|^2_{0,\Omega}+\|u\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|\nabla\tau\|^2_{0,\Omega}+\|\tau\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{1,\Omega}\,\|\tau\|_{1,\Omega}\,.
\end{aligned}$$

Lo cual verifica la desigualdad descrita en (2.12).

Ahora, para demostrar (2.13), aplicamos nuevamente la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|b(\varphi,\psi)| &= \left|\int_\Omega \varphi\psi dx\right| \leq \int_\Omega |\varphi\psi|\,dx \leq \left(\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_\Omega |\psi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \|\varphi\|_{0,\Omega}\,\|\psi\|_{0,\Omega} \leq ||\varphi||_{1\Omega}||\psi||_{1\Omega}.
\end{aligned}$$

Luego, para verificar que la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es V_0-elíptica aplicamos la desigualdad de Poincaré y se obtiene que

$$
\begin{aligned}
a(\tau,\tau) &= \int_\Omega \nabla\tau\cdot\nabla\tau dx = 2\frac{\|\nabla\tau\|^2_{0,\Omega}}{2} = \frac{\|\nabla\tau\|^2_{0,\Omega}}{2} + \frac{\|\nabla\tau\|^2_{0,\Omega}}{2}\\
&\geq \frac{\|\nabla\tau\|^2_{0,\Omega}}{2} + \frac{C^2\,\|\tau\|^2_{0,\Omega}}{2} \geq M(\|\tau\|^2_{0,\Omega} + \|\nabla\tau\|^2_{0,\Omega}) = \alpha\,\|\tau\|^2_{1,\Omega},
\end{aligned}
$$

´donde $\alpha = \text{mín}\left\{\frac{1}{2},\frac{C^2}{2}\right\}$ y C es la constante de Poincaré. □

Ahora, introducimos el conocido *operador solución continuo* $T : Q \to V_0$, definido como sigue.

$$
\begin{aligned}
T:\ Q &\longrightarrow V_0\\
f &\longmapsto Tf := \widetilde{u},
\end{aligned}
$$

donde $\widetilde{u} := Tf$ es la primera componente de la única solución de la siguiente formulación variacional (también conocida como *problema fuente*):

$$\mathcal{A}((\widetilde{u},\widetilde{w}),(\tau,v)) = -b(f,v) \qquad \forall\tau, v\in V_0. \tag{2.15}$$

Puesto que la forma bilineal $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ no es $\mathbb{V}_0-$elíptica, el problema (2.15) es desacoplado en los dos siguientes problemas:

Problema 2.2.4. *Dado $f\in Q$, hallar $\widetilde{w}\in V$ tal que*

$$a(\widetilde{w},v) = -b(f,v) \quad \forall v\in V_0. \tag{2.16}$$

y

Problema 2.2.5. *Dado $\widetilde{w}\in V$ la solución del problema 2.2.4, hallar $\widetilde{u}\in V_0$ tal que*

$$a(\widetilde{u},v) = -b(\widetilde{w},v) \quad \forall v\in V_0. \tag{2.17}$$

Ahora, el Lema 2.2.1 garantiza la V_0-elípticidad de la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ y el acotamiento de las formas bilineal y lineal, $a(\cdot,\cdot)$ y $b(f,\cdot)$ respectivamente, luego aplicando el Lema de Lax-Milgran se muestra en 2.2.4 la existencia y unicidad de la solución $\widetilde{w} \in V$, de modo análogo se muestra la existencia y unicidad de la solución $\widetilde{u} \in V_0$ de 2.2.5 pero ahora tomando la forma lineal $b(\widetilde{w}, \cdot)$, así queda mostrada la incidencia de los problemas 2.2.4 y 2.2.5 para subsanar la no elipticidad de la forma bilineal $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$. Por otro lado también es importante resaltar que el Lema de Lax-Milgran y el Lema 2.2.1 garantizan que las formulaciones variacionales (2.16) y (2.17) tienen única solución. Lo cual establece la buena definición del operador T, y además, que existe una costante positiva C tal que

$$||Tf||_{1,\Omega} \leq C||f||_{0,\Omega},$$

para todo $f \in Q$. Lo cual implica que el operador T es acotado.

Por otro lado, es fácil ver que λ es un valor propio del Problema 2.2.3 si y sólo si $T(\widetilde{u}) = \mu\widetilde{u}$, donde $\mu := \frac{1}{\lambda} \neq 0$ y con la misma multiplicidad y correspondientes autofunciones de u.

2.2.2. Resultados de regularidad y caracterización espectral

En esta sección presentaremos dos resultados de regularidad asociados a las autofunciones del operador solución. También, mostraremos la caracterización del espectro de nuestro problema modelo.

Proposición 2.2.2. *Existe una constante positiva C tal que para todo $f \in Q$ la solución del problema fuente* (2.15) *satisface que: $\widetilde{u} \in W$ y $\widetilde{w} \in V_0$ tal que*

$$||\widetilde{u}||_{2,\Omega} + ||\widetilde{w}||_{1,\Omega} \leq C||f||_{0,\Omega}. \tag{2.18}$$

Además, si (u, w) es solución del Problema 2.2.3, entonces

$$||u||_{2,\Omega} + ||w||_{1,\Omega} \leq C||u||_{2,\Omega}. \tag{2.19}$$

Demostración. La demostración puede ser consultada en [35]. □

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado, el cuál nos indica el espectro del problema de vibración de una placa simplemente apoyada y modelada por las ecuaciones de Kirchhoff-Love.

Lema 2.2.3. *El espectro $sp(T)$ del operador T satisface $sp(T) = \{0\} \cup \{\mu^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde $\{\mu^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una suceción de valores propios reales positivos que converge a cero. La multiplicidad de cada uno de ellos es finita.*

Demostración. La prueba ha sido establecida en [35]. □

2.3. Discretización del problema modelo

En esta sección nos interesa establecer un esquema discreto mediante elementos virtuales para aproximar la solución del Problema 2.2.3. Con este fin consideraremos los siguientes espacios de elementos virtuales introducidos en [6]

2.3.1. Espacios de elementos virtuales

A continuación, damos el esquema de elementos virtuales sin términos de estabilización para aproximar los valores propios de vibración de una placa delgada simplemente apoyada y modelada por las ecuaciones de Kirchhoff-Love.

Espacios de elementos virtuales

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una partición no superpuesta de Ω con N elementos poligonales K. Para cada elemento poligonal $K \in \mathcal{T}_h$ con N_K^v vértices, denotamos su frontera por ∂K, su vector unitario normal exterior por ν_K, su diámetro por h_K el vértice $i-$ ésimo por v_i, respectivamente. El tamaño de la malla es denotada como $h := \max\limits_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$, e un lado genérico de $\mathcal{T}_h$ y para cada $e \in \partial K$ y para cada $i \in \{1, \dots, N_K^v\}$ el lado que conecta los vértices v_i y v_{i+1} es denotado por e_i.

Los supuestos de regularidad de la malla se muestran a continuación [14,36].

A1: Existe $\gamma > 0$ tal que, para toda malla $\mathcal{T}_h$, cada polígono $K \in \mathcal{T}_h$ es estrellado con respecto a una bola de radio mayor o igual que γh_K,

A2: cada lado $e \in \partial K$ con longitud h_e satisface que $h_e \geq \gamma h_K$.

Inspirado en [6], presentamos la construcción del espacio de elementos virtuales de mejora local ampliada de orden 1 basado en el uso de proyección polinomial de orden superior para dado $l \in \mathbb{N}$, y cada polígono $K \in \mathcal{T}_h$ definimos el espacio de elementos virtuales local libre de estabilización como sigue:

$$\mathcal{V}_{1,l}(K) := \Big\{ v \in H^1(K) : v|_{\partial K} \in C^0(\partial K), \Delta v \in \mathbb{P}_{l+1}(K), v|_e \in \mathbb{P}_1(e), \forall e \in \partial K, \\ (\Pi^{\nabla}_{1,K} v - v, p_{l+1})_K = 0, \forall p_{l+1} \in \mathbb{P}_{l+1}(K) \Big\}.$$

Note que cualquier elemento $v_h \in \mathcal{V}_{1,l}(K)$ satisface las siguientes condiciones:

- la traza de v_h es continua sobre ∂K, es decir, $v_h|_{\partial K} \in C^0(K)$,
- $\mathbb{P}_1(K) \subseteq \mathcal{V}_{1,l}(K)$.

Ahora, consideramos los grados de libertad para $\mathcal{V}_{1,l}(K)$ introducidos en [6], los cuales permiten identificar de manera única cada función en el espacio virtual local $\mathcal{V}_{1,l}(K)$. Para todo $v_h \in \mathcal{V}_{1,l}(K)$ los grados de libertad de v_h se definen como:

$$\mathbf{D_1}: \text{ Los valores } v_h(\mathrm{v}_i) \quad \forall \mathrm{v}_i \in K.$$

El número dado l debe satisfacer la siguiente condición para el caso más bajo orden,

$$(l+1)(l+2) - \dim \mathcal{P}_l^{\ker}(K) \geq N_K^v - 1$$

donde

$$\mathcal{P}_l^{\ker}(K) := \left\{ \boldsymbol{p} \in [\mathbb{P}_l(K)]^2 : \int_{\partial K} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{n}^{\partial K} \gamma^{\partial K}(\boldsymbol{v} - P_0(\boldsymbol{v})) = 0, \forall v \in \mathcal{V}_{1,l}^K \right\}$$

que se utiliza para probar la buena formulación del problema de fuente discreto correspondiente. Para obtener l se usa que

$$\dim \mathcal{P}_l^{\ker}(K) \leq l(l+1).$$

Enumeramos el número dado l relacionado con cada elemento K (denotado por $l = \ell(K)$) como un vector $\ell := (\ell(K))_{(l,K) \in \mathbb{N} \times \mathcal{T}_h} \in \mathbb{N}^N$. Para mayores detalles véase

N_K^v	3	4,5	6,7	8,9	10, 11	12, 13	14, 15	16, 17	18, 19	20
$l=\ell(K)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

[34, 6]. En la parte de arriba se muestra una tabla donde se indica como elegir el número $l=\ell(K)$ dado el número de vértices N_K^v del polígono $K\in\mathcal{T}_h$. Ahora, debido a la forma en que se eligió el número $l=\ell(K)$, el espacio virtual local $\mathcal{V}_{1,l}(K)$ permite la definición de una forma bilineal coerciva que involucra solo proyecciones polinómicas y por tanto no es necesario agregar una forma bilineal estabilizadora $S_K(\cdot,\cdot)$ (usual en métodos virtuales) arbitraria que represente la parte no polinómica de las funciones virtuales [6].

El espacio de elemento virtual global se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{V}_{1,\ell}^0=\{\,v\in H_0^1(\Omega):v|_K\in\mathcal{V}_{1,l}(K),\forall K\in\mathcal{T}_h\}.$$

Para continuar con la formulación del esquema discreto, necesitamos algunas definiciones previas. Primero, definimos las siguientes formas bilineales $a_K:H^1(K)\times H^1(K)\to\mathbb{R}$ y $b_K:L^2(K)\times L^2(K)\to\mathbb{R}$ dadas por

$$a_K(u,v):=\int_K\nabla u\cdot\nabla v\,dx,\qquad\forall u,v\in H^1(K),\tag{2.20}$$

$$b_K(u,v):=\int_K uv\,dx,\qquad\forall u,v\in L^2(K).\tag{2.21}$$

Es claro que las formas bilineales $a_K(\cdot,\cdot)$ y $b_K(\cdot,\cdot)$ son productos interiores en $H^1(K)$ y $L^2(K)$, respectivamente. Ahora, con esta definición consideramos el operador de proyección ortogonal $\Pi_{1,K}^\nabla:\mathcal{V}_{1,l}(K)\to\mathbb{P}_1(K)$ definido por

$$a_K(\Pi_{1,K}^\nabla v-v,p_1)=0,\forall p_1\in\mathbb{P}_1(K),$$
$$\frac{1}{N_K^v}\sum_{i=1}^{N_K^v}(\Pi_{1,K}^\nabla v-v)(\mathrm{v}_i)=0.$$

Sea $\Pi_{l,K}^0:\mathcal{V}_{1,l}(K)\to\mathbb{P}_1(K)$ la proyección escalar estándar de $L^2(K)$ y $\Pi_{l,K}^0\nabla:\mathcal{V}_{1,l}(K)\to(\mathbb{P}_l(K))^2$ la proyección en $L^2(K)$ del gradiente de funciones las cuales se expresan explícitamente como

$$(\Pi^0_{1,K}v - v, p_1)_K = 0, \forall p_1 \in \mathbb{P}_1(K), \quad \forall v \in \mathcal{V}_{1,l}(K), \tag{2.22}$$

$$(\Pi^0_{l,K}\nabla v - \nabla v, p_1)_K = 0, \forall p_l \in (\mathbb{P}_l(K))^2 \quad \forall v \in \mathcal{V}_{1,l}(K). \tag{2.23}$$

Nótese que integrando por partes en 2.23 se tiene que:

$$(\Pi^0_{l,K}\nabla v, p_l)_K = (\nabla v, p_1)_K = \int_{\partial K} v p_l \cdot \nu_K dS - \int_K div(p_l) v dx \tag{2.24}$$

como $v|_e \in \mathbb{P}_1(e), \forall e \in \partial K$, entonces el primer término en 2.24 se puede calcular en cada lado del polígono K. Además de la definición de $\mathcal{V}_{1,l}(K)$ se sigue que

$$\int_K div(p_l) v dx = \int_K div(p_l) \Pi^\nabla_{1,K} v dx,$$

por lo tanto el segundo término en 2.24 es computable a partir del cálculo del operador de proyección $\Pi^\nabla_{1,K}$, también podemos comprobar a partir de $\mathcal{V}_{1,l}(K)$ y 2.22 que $\Pi^\nabla_{1,K} = \Pi^0_{1,K}$ en el caso de más bajo orden.

2.3.2. Formas discretas

Con el fín de establecer el esquema discreto, introducimos las siguientes formas bilineales discretas definidas con elementos del espacio $\mathcal{V}^0_{1,\ell}$. Primero, definimos $\mathbb{V}_{0,h} := \mathcal{V}^0_{1,\ell} \times \mathcal{V}^0_{1,\ell}$. Ahora sean $\mathcal{A}_h : \mathbb{V}_{0,h} \times \mathbb{V}_{0,h} \to \mathbb{R}$ y $b_h : \mathcal{V}^0_{1,\ell} \times \mathcal{V}^0_{1,\ell} \to \mathbb{R}$ formas bilineales discretas dadas por:

$$\mathcal{A}_h((u_h, w_h), (\tau_h, v_h)) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{A}_{h,K}((u_h, w_h), (\tau_h, v_h)), \qquad \forall (u_h, w_h), (\tau_h, v_h) \in \mathbb{V}_{0,h},$$

$$b_h(u_h, v_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} b_{h,K}(u_h, v_h), \qquad \forall u_h, v_h \in \mathcal{V}^0_{1,\ell},$$

$$a_h(\varphi_h, \psi_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{h,K}(\varphi_h, \psi_h), \qquad \forall \varphi_h, \psi_h \in \mathcal{V}^0_{1,\ell},$$

donde $\mathcal{A}_{h,K}(\cdot,\cdot)$, $a_{h,K}(\cdot,\cdot)$ y $b_{h,K}(\cdot,\cdot)$ son formas bilineales locales definidas como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{h,K}((u_h,w_h),(\tau_h,v_h)) &:= a_K(\Pi_K^{\nabla}u_h,\Pi_K^{\nabla}\tau_h)+a_K(\Pi_K^{\nabla}w_h,\Pi_K^{\nabla}v_h)+b_K(\Pi_K^{0}w_h,\Pi_K^{0}\tau_h),\\
b_{h,K}(u_h,v_h) &:= b_K(\Pi_K^{0}u_h,\Pi_K^{0}v_h),\\
a_{h,K}(\varphi_h,\psi_h) &:= a_K(\Pi_K^{\nabla}\varphi_h,\Pi_K^{\nabla}\psi_h).
\end{aligned}$$

Teorema 2.3.1. *Las formas bilineales $\mathcal{A}_{h,K}(\cdot,\cdot)$, $a_{h,K}(\cdot,\cdot)$ y $b_{h,K}(\cdot,\cdot)$ satisfacen:*

- ***Consistencia**: Para todo $(\tau_h,v_h)\in\mathbb{V}_{0,h}$ y para todo $p,q\in\mathbb{P}_1(K)$ se tiene que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{h,K}((p,q),(\tau_h,v_h)) &= \mathcal{A}_K((p,q),(\tau_h,v_h)),\\
b_{h,K}(p,v_h) &= b_K(p,v_h).
\end{aligned}$$

- ***Estabilidad:** Existen constantes positivas $\alpha_*,\alpha^*,\beta_*,\beta^*$ independientes de h tal que:*

$$\begin{aligned}
\alpha_* a_K(v_h,v_h) &\leq a_{h,K}(v_h,v_h)\leq\alpha^* a_K(v_h,v_h), \quad paratodo v_h\in\mathcal{V}_{1,\ell}(K),\\
\beta_* b_K(v_h,v_h) &\leq b_{h,K}(v_h,v_h)\leq\beta^* b_K(v_h,v_h), \quad paratodo v_h\in\mathcal{V}_{1,\ell}(K).
\end{aligned}$$

2.4. Formulación variacional espectral discreta

Finalmente, estamos en posición de escribir la discretización de elementos virtuales libre de estabilización del problema de vibración de una placa delgada simplemente apoyada y modelada por las ecuaciones de Kirchoff-Love.

Problema 2.4.1. *Hallar $(\lambda_h,u_h,w_h)\in\mathbb{R}\times\mathcal{V}_{1,\ell}^0\times\mathcal{V}_{1,\ell}^0$. tal que*

$$\mathcal{A}_h((u_h,w_h),(\tau_h,v_h)) = -\lambda_h b_h(u_h,v_h), \qquad \forall(\tau_h,v_h)\in\mathcal{V}_{1,\ell}^0\times\mathcal{V}_{1,\ell}^0. \tag{2.25}$$

2.4.1. El problema fuente discreto asociado

Como en el caso continuo, introducimos el operador de solución discreta

$$T_h: Q\to\mathcal{V}_{1,\ell}^0,$$

definido por $T_h f := \widetilde{u}_h$, con $(\widetilde{u}_h, \widetilde{w}_h) \in \mathcal{V}^0_{1,\ell} \times \mathcal{V}^0_{1,\ell}$ la única solución del siguiente problema discreto:

$$\mathcal{A}_h((\widetilde{u}_h, \widetilde{w}_h), (\tau_h, v_h)) = -b_h(f, v_h) \qquad \forall \tau_h, v_h \in \mathcal{V}^0_{1,\ell},$$

Puesto que la forma bilineal $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$ no es $\mathbb{V}_{0,h}-$elíptica, el problema (2.4.1) es desacoplado como en el caso continuo en los siguientes dos subproblemas:

Problema 2.4.2. *Dado $f \in Q$, hallar $\widetilde{w}_h \in \mathcal{V}^0_{1,\ell}$ tal que*

$$a_h(\widetilde{w}_h, v_h) = -b_h(f, v_h), \qquad \text{para todo } v_h \in \mathcal{V}^0_{1,\ell}.$$

Problema 2.4.3. *Dado $f \in Q$, hallar $\widetilde{u}_h \in \mathcal{V}^0_{1,\ell}$ tal que*

$$a_h(\widetilde{u}_h, \tau_h) - b_h(\widetilde{w}_h, \tau_h) = 0, \quad \text{para todo } \tau_h \in \mathcal{V}^0_{1,\ell}.$$

La buena posición del problema fuente asociado al esquema virtual discreto (2.25) se obtiene a aplicando los Lemas de Lax-Milgram y Desigualdad de Poincaré, dos veces, en los Problemas 2.4.2 y 2.4.3 respectivamente.

2.4.2. Caracterización espectral

Ahora presentaremos la caracterización del espectro del operador solución T la cual es consecuencia inmediata del siguiente lema.

Lema 2.4.1. *El espectro $sp(T_h)$ del operador T satisface $sp(T_h) = \{0\} \cup \{\mu_h^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde $\{\mu_h^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una suceción de valores propios reales positivos que converge a cero. La multiplicidad de cada uno de ellos es finita.*

Demostración. La prueba ha sido establecida en [35]. □

2.5. Convergencia y estimaciones del error

En la presente sección, emplearemos la teoría espectral de operadores compactos para probar la aproximación espectral y las estimaciones de error para el problema de valores propios. Con este objetivo, primero recordaremos el error de proyección y el error de interpolación bajo los supuestos de la descomposición de la malla.

Teorema 2.5.1. *Para $v \in H^{1+s}(K)$ con $0 \leq s \leq 1$, existe $v_\pi \in \mathbb{P}_1(K)$ tal que*

$$\|v - v_\pi\|_{0,K} + h_K \|v - v_\pi\|_{1,K} \leq C h_K^{1+s} \|v\|_{1+s,K}.$$

Teorema 2.5.2. *Para $v \in H^{1+s}(\Omega)$ con $0 \leq s \leq 1$, existe $v_I \in \mathcal{V}_{1,\ell}^0$ tal que*

$$\|v - v_I\|_{0,\Omega} + h|v - v_I|_{1,\Omega} \leq C h^{1+s} \|v\|_{1+s,\Omega}.$$

Por otro lado, la desigualdad (2.18) establece que la solución del problema fuente $\widetilde{w} \in H^1(\Omega)$, con lo cual no podemos aplicar el Teorema 2.5.2 para determinar $\widetilde{w}_I \in \mathcal{V}_{1,\ell}^0$. Así que, con el objetivo de interpolar $w \in \mathcal{V}_{1,\ell}^0$ recurrimos al siguiente problema de dualidad bien propuesto. Dado $f \in L^2(\Omega)$, encontrar $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$a(w, v) = b(f, v), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Gracias al lema de Lax-Milgran tenemos:

$$||\widetilde{w}||_{2,\Omega} \leq ||\widetilde{w} - \widetilde{w}_h||_{0,\Omega}. \tag{2.26}$$

Como $\widetilde{w} \in H^2(\Omega)$, entonces por el Teorema 2.5.2 existe $w_I \in \mathcal{V}_{1,\ell}^0$ tal que

$$||\widetilde{w} - w_I||_{1,\Omega} \leq Ch||\widetilde{w}||_{2,\Omega}.$$

Además

$$\begin{aligned} ||\widetilde{w} - \widetilde{w}_h||_{0,\Omega}^2 &= b(\widetilde{w} - \widetilde{w}_h, \widetilde{w} - \widetilde{w}_h) = a(\widetilde{w}, \widetilde{w} - \widetilde{w}_h) \leq Ch||\widetilde{w} - \widetilde{w}_h||_{0,\Omega}||\widetilde{w} - \widetilde{w}_h||_{1,\Omega} \\ &\leq Ch||\widetilde{w} - \widetilde{w}_h||_{0,\Omega}(||\widetilde{w}||_{1,\Omega} + ||\widetilde{w}_h||_{1,\Omega}) \leq Ch||\widetilde{w} - \widetilde{w}_h||_{0,\Omega}||f||_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$||\widetilde{w} - \widetilde{w}_h||_{0,\Omega} \leq Ch||f||_{0,\Omega}. \tag{2.27}$$

Teorema 2.5.3. *Dado $f \in L^2(\Omega)$, existe una constante positiva C independiente de h tal que:*

$$||T - T_h||_{1,\Omega} \leq Ch||f||_{0,\Omega}.$$

Demostración. Sea $f \in L^2(\Omega)$. Consideremos $(\widetilde{u}, \widetilde{w})$ y $(\widetilde{u}_h, \widetilde{w}_h)$, con $\widetilde{u} = Tf$ y $\widetilde{u}_h = T_h f$ las soluciones de los problemas fuentes continuo y discreto, respectivamente. Luego a partir de los Problemas 2.2.5 y 2.4.3 y el Lema de Strang tenemos:

$$\begin{aligned} ||u - u_h||_{1,\Omega} \leq C \Bigg\{ & \inf_{\psi_h \in \mathcal{V}^0_{1,\ell}} \left[||u - \psi_h||_{1,\Omega} + \sup_{\varphi_h \in \mathcal{V}^0_{1,l}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{a_{h,K}(\varphi_h, \psi_h) - a_K(\varphi_h, \psi_h)}{||\varphi_h||_{1,\Omega}} \right] \\ & + \sup_{\varphi_h \in \mathcal{V}^0_{1,l}, \varphi_h \neq 0} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{b_{h,K}(w_h, \varphi_h) - b_K(w_h, \varphi_h)}{||\varphi_h||_{1,\Omega}} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ahora acotemos superiormente cada uno de los tres términos en el lado derecho de 2.28. En efecto: Primero, como $u \in H^2(\Omega)$, entonces existe $u_I \in \mathcal{V}^0_{1,\ell}$ tal que $||u - u_I||_{1,\Omega} \leq Ch||u||_{2,\Omega}$ (ver Teorema 2.5.2). Luego

$$\inf_{\psi_h \in \mathcal{V}^0_{1,\ell}} ||u - \psi_h||_{1,\Omega} \leq ||u - u_I||_{1,\Omega} \leq Ch||u||_{2,\Omega} \leq Ch||u||_{0,\Omega}. \tag{2.29}$$

Para el segundo término del lado derecho de (2.28) tenemos que por Teorema 2.5.1 podemos escoger $u_\pi \in L^2(\Omega)$ tal que $u_\pi \in \mathbb{P}_2(K)$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$ y

$$|u - u_\pi|_{2,K} \leq Ch|u|_{3,K}. \tag{2.30}$$

Entonces, podemos usar las propiedades de consistencia y estabilidad de la forma bilineal $a_{h,K}(\cdot,\cdot)$ (cf. Teorema 2.3.1), y (2.30) para obtener

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\{a_{h,K}(\varphi_h,\psi_h)-a_K(\varphi_h,\psi_h)\}}{||\varphi_h||_{2,\Omega}} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\{a_{h,K}(\varphi_h,\psi_h-u_\pi)-a_K(\varphi_h,u_\pi-\psi_h)\}}{||\varphi_h||_{2,\Omega}}\\ &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h}(1+\alpha^*)a_K(u_\pi-\psi_h,u_\pi-\psi_h)^{1/2}\\ &\leq (1+\alpha^*)\Big(\Big\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}|u-u_\pi|_{2,K}\Big\}+||u-\psi_h||_{2,\Omega}\Big)\\ &\leq Ch||f||_{0,\Omega}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Para acotar el tercer término usamos las propiedades de consistencia y estabilidad de la forma bilineal $b_{h,K}(\cdot,\cdot)$ (cf. Teorema 2.3.1) para obtener

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\{b_{h,K}(w_h,\varphi_h)-b_K(w,\varphi_h)\}}{||\varphi_h||_{2,\Omega}} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\{b_K(\Pi_K^0 w_h,\Pi_K^0\varphi_h)-b_K(w,\varphi_h)\}}{||\varphi_h||_{2,\Omega}}\\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\{b_K(\Pi_K^0 w_h-w,\varphi_h)\}}{||\varphi_h||_{2,\Omega}}\\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{\{b_K(\Pi_K^0 w_h-w,\varphi_h-\Pi_K^0\varphi_h)\}}{||\varphi_h||_{2,\Omega}}\\ &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{||\Pi_K^0 w_h-w||_{0,K}||\varphi_h-\Pi_K^0\varphi_h||_{0,K}}{||\varphi_h||_{2,\Omega}}\\ &\leq Ch^2||w||_{2,\Omega}\leq Ch^2||w-w_h||_{0,\Omega}\leq Ch^3||f||_{0,\Omega},\end{aligned} \tag{2.32}$$

donde hemos empleado la definición de proyector Π_K^0 y las ecuaciones 2.26 y 2.27. Por lo tanto de 2.29, 2.31 y 2.32 se obtiene el resultado. □

Teorema 2.5.4. *Existe una constante $C>0$ tal que $|\lambda-\lambda_h|\leq Ch^2$.*

Demostración. De 2.11 y 2.25, se tiene:

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}((u-u_h,w-w_h),(u-u_h,w-w_h))+\lambda b(u-u_h,u-u_h)\\ =\ &\mathcal{A}((u_h,w_h),(u_h,w_h))-\lambda b(u_h,u_h)\\ =\ &\mathcal{A}((u_h,w_h),(u_h,w_h))-\mathcal{A}_h((u_h,w_h),(u_h,w_h))\\ &+\lambda_h(b_h(u_h,u_h)-b(u_h,u_h))+(\lambda_h-\lambda)b(u_h,u_h),\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\lambda_h - \lambda = \frac{\mathcal{A}((u-u_h, w-w_h),(u-u_h, w-w_h)) + \lambda b(u-u_h, u-u_h)}{b(u_h,u_h)} + \frac{\mathcal{A}_h((u_h,w_h),(u_h,w_h)) - \mathcal{A}((u_h,w_h),(u_h,w_h))}{b(u_h,u_h)}$$

Como $b(u_h,u_h) \rightarrow b(u,u)$, cuando $h \rightarrow 0$ entonces del Teorema 2.3.1, Teorema 2.5.1, Teorema 2.5.2 y la definición de los operadores de proyección se obtiene:

$$\begin{aligned}
|\lambda_h - \lambda| &\leq |\mathcal{A}((u-u_h, w-w_h),(u-u_h, w-w_h))| + |\lambda b(u-u_h, u-u_h)| \\
&\quad + |\mathcal{A}_h((u_h,w_h),(u_h,w_h)) - \mathcal{A}((u_h,w_h),(u_h,w_h))| \\
&\leq C\left(\|u-u_h\|_1^2 + \|w-w_h\|_1^2 + \sum_{K\in\tau_h} \begin{pmatrix} a_K(u_h - \Pi_k^{\nabla} u_h, \Pi_k^{\nabla} w_h - w_h) \\ +b_K(w_h - \Pi_k^0 w_h, \Pi_k^0 w_h - w_h) \\ +b_K(u_h - \Pi_k^0 u_h, u_h - \Pi_k^0 u_h) \end{pmatrix} \right) \\
&\leq C\left(\begin{array}{c} \|u-u_h\|_{1,\Omega}^2 + \|w-w_h\|_{1,\Omega}^2 + \left|u_h - \Pi_k^{\nabla} u_h\right|_{1,\Omega} \left|\Pi_k^{\nabla} w_h - w_h\right|_{1,\Omega} \\ + \left\|w_h - \Pi_k^0 w_h\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|u_h - \Pi_k^0 u_h\right\|_{0,\Omega}^2 \end{array} \right) \\
&\leq Ch^2,
\end{aligned}$$

lo cual completa la prueba. □

Capítulo 3

Una discretización de elementos virtuales $C^1 - C^0$ para una ecuación elíptica de sexto orden usando el método de Ciarlet Raviart

En este capítulo estudiamos un método de elemento virtual para el problema elíptico de sexto orden con condiciones de contorno de tipo sujeta y simplemente apoyada. Usando argumentos como el método de Ciarlet-Raviart, introducimos una incógnita auxiliar $w := \Delta u$ y proponemos una formulación débil en el espacio de Sobolev $H^2 \times H^1$. Se propone una discretización de elementos virtuales $C^1 \times C^0$ para aproximar las soluciones de la formulación débil. También proporcionamos los resultados de las estimaciones de convergencia y error. Finalmente, se reportan varios ejemplos numéricos que ilustran el rendimiento del método del elemento virtual.

3.1. Introducción

En este artículo consideramos la ecuación elíptica de sexto orden (ver e.g. [25])

$$-\Delta^3 u = f \qquad \text{en } \Omega, \tag{3.1}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ como un dominio acotado poligonal con frontera $\Gamma := \partial\Omega$, y $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Además, analizamos el problema de sexto orden (3.1) con dos tipos de condiciones de contorno, a saber:

- **Condiciones de contorno simplemente apoyadas (SSBC)**:

$$u = \Delta u = \Delta^2 u = 0 \qquad \text{sobre } \Gamma. \tag{3.2}$$

- **Condiciones de contorno sujetas (CBC)**:

$$u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \Delta u = 0 \qquad \text{on } \Gamma, \tag{3.3}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector normal que apunta hacia afuera sobre $\Gamma := \partial\Omega$.

Los problemas que involucran operadores diferenciales de orden superior son importantes en ciencias. En particular, los problemas de sexto orden están presentes en matemáticas ([31],[14]), física y en ingeniería ([5],[20]). Hay un número creciente de referencias donde se abordan aspectos teóricos y numéricos como la existencia, unicidad y multiplicidad de soluciones, la existencia global y la positividad y regularidad de las soluciones, la regularidad de los espacios discretos para la aproximación numérica de estos problemas de orden superior. Un estudio detallado de la regularidad de los problemas poliarmónicos, incluidos los abordados en este artículo, se encuentra en la referencia [25].

Los métodos numéricos para estudiar la ecuación elíptica de sexto orden (3.1) se pueden encontrar en [21, 28]. En [21] se estudió un método mixto de elementos finitos mediante la formulación de Ciarlet-Raviarth para aproximar la principal incógnita en (3.1) usando H^1-espacios de Lagrange conformes. Los autores de [28] propusieron un método de penalización interior C^0- para analizar la ecuación elíptica de sexto orden con condiciones de contorno fijas. Aplicaron fuertemente técnicas de análisis a posteriori para establecer la buena colocación de su método.

El Método del Elemento Virtual (VEM) presentado por primera vez en [44] es una herramienta numérica para resolver problemas que incluyen ecuaciones diferenciales parciales que se ha desarrollado en los últimos 10 años. Desde su nacimiento, es cada vez mayor el número de artículos científicos sobre el uso de este método para aproximar numéricamente la solución de ecuaciones en derivadas parciales. Las aplicaciones se dan en diferentes áreas: problemas de fluidos [43, 42, 23, 32, 40, 24], problemas electromagnéticos [13, 46], problemas de orden superior [4, 19, 18]. VEM tiene la capacidad de manejar mallas poligonales y poliédricas generales para dominios bidimensionales y tridimensionales, respectivamente. Esto ha tenido un gran impacto en la comunidad científica dedicada al Análisis Numérico de ecuaciones diferenciales parciales que modelan problemas de mecánica de sólidos y/o fluidos, ya que muchos problemas físicos se definen en dominios con estructuras poligonales o poliédricas.

Una de las características principales de VEM es su flexibilidad para definir espacios discretos de regularidad de alto orden, véase, por ejemplo, [3, 2, 11, 15] para el caso bidimensional y [41] para el caso tridimensional. Uno dimensional, el VEM tiene un buen rendimiento para tratar con requisitos de continuidad de orden superior y permite diseñar fácilmente C^k -aproximaciones (ver [2]). El autor de [2] introdujo una aproximación VEM conforme para resolver problemas poliarmónicos que involucran al operador diferencial Δ^p.

En este artículo proponemos y analizamos un método de elementos virtuales $C^1 - C^0$ para resolver una ecuación elíptica de sexto orden (3.1) considerando los dos tipos de condiciones de contorno descritas en (3.2) y (3.3). Inspirado en el método de Ciarlet-Raviarth, primero definimos una incógnita auxiliar $w = \Delta u$ en Ω para reducir el orden de la EDP (3.1) a un problema de cuarto orden. Luego, aplicamos integración por partes varias veces y llegamos a dos formulaciones débiles, a saber, $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ para la condición (3.2), y $H_0^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ para (3.3). Luego, aplicamos los elementos virtuales C^1 y C^0 establecidos en [3] y [1], respectivamente, para proponer y probar la buena postura del esquema de elementos virtuales discretos. Obtenemos estimaciones de error óptimas en las normas L^2 y H^1 para las incognitas w y u. Dado que los elementos conformes para resolver la ecuación elíptica de sexto orden (3.1) necesitan elementos regulares C^2 que son complicados de implementar ya que su grado de aproximación será demasiado alto y como una consecuencia habrá demasiados grados de libertad es que nuestro esquema discreto resulta una alternativa interesante.

El esquema de este documento es el siguiente; en la Sección 3.2, presentamos la formulación débil asociada al problema elíptico de sexto orden. A continuación, en la Sección 3.3, presentamos las definiciones de los espacios de elementos virtuales C^1 y C^0. Luego, en esta sección se presenta una formulación discreta de elementos virtuales imitando el análisis desarrollado para el problema continuo. Además, en la Sección 3.4 demostramos que el esquema numérico proporciona una aproximación correcta y establecemos estimaciones de error de orden óptimas para soluciones aproximadas. Finalmente, en la Sección 3.5, reportamos algunas pruebas numéricas que confirman el análisis teórico desarrollado.

3.2. El problema elíptico de sexto orden

A continuación propondremos dos formulaciones débiles asociadas al problema elíptico de sexto orden considerando las condiciones de frontera **SSBC** y **CBC** dadas en las secciones **2.1** y **2.3** respectivamente.

3.2.1. Condiciones de contorno simplemente apoyada

Consideramos el problema elíptico de sexto orden (3.1) con condiciones de frontera simplemente apoyadas (ver e.g. [25])

$$-\Delta^3 u = f \qquad \text{en } \Omega, \tag{3.4a}$$

$$u = \Delta u = \Delta^2 u = 0 \qquad \text{sobre } \Gamma, \tag{3.4b}$$

con $f \in H^{-1}(\Omega)$. Ahora, para proponer una formulación variacional asociada a (3.4) introducimos una incógnita adicional $w = \Delta u$ en Ω, entonces el sistema de ecuaciones (3.4) se puede escribir de la siguiente manera

$$-\Delta^2 w = f \qquad \text{en } \Omega, \tag{3.5a}$$

$$\Delta u = w \qquad \text{en } \Omega, \tag{3.5b}$$

$$w = \Delta w = 0 \qquad \text{sobre } \Gamma, \tag{3.5c}$$

$$u = 0 \qquad \text{sobre } \Gamma. \tag{3.5d}$$

Luego, multiplicamos la ecuación (3.5b) con $\tau \in V_0$, integramos por partes sobre Ω, y usamos la condición de frontera de Dirichlet (3.5d), para obtener

$$\int_\Omega w\tau \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \tau \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \tau \in V_0. \tag{3.6}$$

Por otro lado, multiplicamos la ecuación (3.5a) por $v \in W$, integramos por partes en Ω dos veces y usamos las condiciones de frontera simplemente apoyadas para w (3.5c) para obtener

$$\int_\Omega \Delta w \Delta v \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega f v \, \mathrm{d}x \qquad \forall v \in W. \tag{3.7}$$

Por lo tanto, de (3.6) y (3.7) llegamos a la siguiente formulación variacional:

Problema 3.2.1. *Hallar $w \in W$, $u \in V$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta w \Delta v \, \mathrm{d}x &= -\int_\Omega f v \, \mathrm{d}x && \forall v \in W, \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \tau \, \mathrm{d}x &= -\int_\Omega w\tau \, \mathrm{d}x && \forall \tau \in V_0. \end{aligned}$$

Ahora, escribiremos la formulación variacional anterior con una notación mas compacta. Primero nosotros denotaremos por $\mathbb{H}$ al espacio producto $\mathbb{H} := W \times V_0$, dotado de la siguiente norma de producto

$$||(v,\tau)||_{\mathbb{H}} := \left(||v||^2_{2,\Omega} + ||\tau||^2_{1,\Omega}\right)^{1/2}. \tag{3.9}$$

Observación 1. Para todo $v \in W$, la norma $||\Delta v||_{0,\Omega}$ es una norma equivalente a la norma habitual en $H^2(\Omega)$ (ver por ejemplo [25, Teorema 2.31]).

Para introducir una formulación variacional asociada al Problema 3.2.1 definimos las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}; \quad \mathbb{A}((w,u),(v,\tau)) := a^{\Delta}(w,v) + a^{\nabla}(u,\tau) + a^{0}(w,\tau),\\
&F : W \to \mathbb{R}; \qquad F(v) := -\int_{\Omega} fv \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in W,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde

$$a^{\Delta} : W \times W \to \mathbb{R}; \qquad a^{\Delta}(w,v) := \int_{\Omega} \Delta w \Delta v \,\mathrm{d}x \qquad \forall w, v \in W, \tag{3.11}$$

$$a^{\nabla} : V \times V \to \mathbb{R}; \qquad a^{\nabla}(u,\tau) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \tau \,\mathrm{d}x \qquad \forall u, \tau \in V, \tag{3.12}$$

$$a^{0} : W \times V \to \mathbb{R}; \qquad a^{0}(w,\tau) := \int_{\Omega} w\tau \,\mathrm{d}x \qquad \forall w \in W,\ \forall v \in V, \tag{3.13}$$

Entonces, se da una formulación variacional asociada al Problema 3.2.1 como sigue.

Problema 3.2.2. *Hallar* $(w,u) \in \mathbb{H}$ *tal que*

$$\mathbb{A}((w,u),(v,\tau)) = F(v) \quad \forall (v,\tau) \in \mathbb{H}. \tag{3.14}$$

El siguiente resultado muestra algunas propiedades de las formas bilineales $a^{\Delta}(\cdot,\cdot)$, $a^{\nabla}(\cdot,\cdot)$, $a^{0}(\cdot,\cdot)$, $\mathbb{A}(\cdot,\cdot)$ y el funcional lineal $F(\cdot)$.

Lema 3.2.1. *Las formas definidas en* (3.10)-(3.13) *satisfacen las siguientes propiedades.*

$$|a^{\Delta}(w,v)| \lesssim ||w||_{2,\Omega}||v||_{2,\Omega}, \tag{3.15a}$$

$$|a^{\nabla}(u,\tau)| \lesssim ||u||_{1,\Omega}||\tau||_{1,\Omega}, \tag{3.15b}$$

$$|a^{0}(w,\tau)| \lesssim ||w||_{2,\Omega}||\tau||_{1,\Omega}, \tag{3.15c}$$

$$|F(v)| \lesssim ||v||_{2,\Omega}, \tag{3.15d}$$

$$|\mathbb{A}((w,u),(v,\tau))| \lesssim ||(w,u)||_{\mathbb{H}}||(v,\tau)||_{\mathbb{H}}. \tag{3.15e}$$

$$||v||^2_{2,\Omega} \lesssim a^{\Delta}(v,v). \tag{3.15f}$$

$$||u||^2_{1,\Omega} \lesssim a^{\nabla}(u,u). \tag{3.15g}$$

para todo $w, v \in W$ y $u, \tau \in V$.

Demostración. Las estimaciones (3.15a)-(3.15d) se derivan de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Además, las estimaciones (3.15a), (3.15b) y (3.15c) implican la acotación (3.15e) de la forma bilineal $\mathbb{A}(\cdot,\cdot)$. Las estimaciones de elipticidad (3.15f) y (3.15g) se pueden obtener de la desigualdad de Poincaré generalizada aplicada en los espacios W y V, respectivamente (ver por ejemplo [10] y [25, Teorema 2.31]). □

Con el fin probar que el problema 3.2.2 está bien condicionado, lo descomponemos en los siguientes subproblemas:

- Hallar $w \in W$ tal que

$$a^{\Delta}(w,v) = F(v), \qquad \forall v \in W, \tag{3.16}$$

- Hallar $u \in V_0$ tal que

$$a^{\nabla}(u,\tau) = -a^{0}(w,\tau), \qquad \forall \tau \in V_0. \tag{3.17}$$

Está claro que el Teorema de Lax-Milgram y las estimaciones (3.15a) y (3.15f) nos permiten probar el buen condicionamiento de la formulación variacional continua

(3.16). Además, usando una vez más el teorema de Lax-Milgram y las desigualdades (3.15b)-(3.15g), y la unicidad de $w \in W$ en (3.16) obtenemos la única solución $u \in V_0$ del problema (3.17). Por lo tanto, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2. *Dado $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución $(w, u) \in \mathbb{H}$ del problema 3.2.2.*

3.2.2. Resultados de regularidad para w y u

Sea $w \in W$ la solución única de (3.16), luego recurriendo a un conocido resultado de regularidad para el problema biharmónico con su lado derecho en $H^{-1}(\Omega)$, tenemos que $w \in H^{2+s}(\Omega)$ con $s \in (1/2, 1]$. Por otro lado, si $u \in V_0$ es la única solución del problema variacional (3.17), obtenemos que $u \in H^{1+t}(\Omega)$ con $t \in (0, 1)$ (ver por ejemplo [7, 27, 39]). Por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado de regularidad adicional para la solución del Problema 3.2.2.

Lema 3.2.3. *Existen $s > 1/2$, $t \in (0, 1)$, y una constante positiva C que depende solo de Ω tal que para todo $f \in L^2(\Omega)$ la única solución $(w, u) \in \mathbb{H}$ del Problema 3.2.2 satisface*

$$\|w\|_{2+s,\Omega} + \|u\|_{1+t,\Omega} \leq C\|f\|_{0,\Omega}. \tag{3.18}$$

Observación 2. Señalamos que las constantes s y t sólo dependen del dominio Ω. Además, si Ω es convexo, entonces $s = t = 1$. De lo contrario, el lema es válido para todo $s < s_0$ y $t < t_0$, donde $s_0, t_0 \in (1/2, 1]$ depende del ángulo de reentrada más grande de Ω (ver por ejemplo [7, 27, 39]).

3.2.3. Condiciones de contorno sujetas

Ahora, consideramos el problema de sexto orden (3.1) con condiciones de frontera sujetas (3.3) (ver [25])

$$-\Delta^3 u = f \qquad \text{en } \Omega, \tag{3.19a}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \Delta u = 0 \qquad \text{sobre } \Gamma. \tag{3.19b}$$

A continuación, aplicando los mismos pasos que se usaron para llegar al sistema de ecuaciones (3.5) y los problemas 3.2.1 and 3.2.2 deducimos la siguiente formulación variacional para el problema de sexto orden de condiciones de frontera sujetas.

Problema 3.2.3. *Hallar* $(w, u) \in \mathbb{H}_0$ *tal que*

$$\mathbb{A}((w, u), (v, \tau)) = F(v) \quad \forall (v, \tau) \in \mathbb{H}_0,$$

donde, hemos definido $\mathbb{H}_0$ como el espacio producto $\mathbb{H}_0 := W_0 \times V_0$ dotado de la siguiente norma producto $||\cdot||_{\mathbb{H}}$ definido en (3.9). Además, el buen planteamiento del Problema 3.2.3 sigue aplicando los mismos argumentos que se usaron para obtener la solución única de la formulación variacional (3.14).

Observación 3. El problema de sexto orden con condiciones de frontera fijas (3.19a)-(3.19b) se puede analizar usando los mismos argumentos que los aplicados para el sistema (3.4a)-(3.4b). Mencionamos que la verificación numérica para este caso será abordada en la Sección 5.

3.3. Problema discreto

En esta sección nos interesa establecer un esquema discreto mediante elementos virtuales para aproximar la solución del Problema 3.2.2. Con este fin consideraremos los siguientes espacios de elementos virtuales introducidos en [1, 3, 44, 11].

3.3.1. Espacios de elementos virtuales

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_h$ una sucesión de descomposiciones de Ω en polígonos K. Denotamos por h_K el diámetro del polígono K y por h el máximo de los diámetros de todos los polígonos de la malla, es decir, $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$. En lo que sigue, denotamos por N_{v}^{P} el número de vértices de K, por e una arista genérica de $\{\mathcal{T}_h\}_h$ y para todo $e \in \partial K$, dejamos que $\mathbf{n}_K$ denote el vector unitario normal que apunta fuera de K. Además, haremos las siguientes suposiciones como en [1, 3, 44]. Existe un número real positivo $C_{\mathcal{T}}$ tal que, para cada h y cada $K \in \mathcal{T}_h$,

- **A1** la relación entre el borde más corto y el diámetro h_K de K es mayor que $C_{\mathcal{T}}$;

- **A2**: $K \in \mathcal{T}_h$ es estrellado con respecto a cada punto de una bola de radio $C_{\mathcal{T}} h_K$.

Primero definimos dos espacios discretos preliminares como sigue: Para cada polígono $K \in \mathcal{T}_h$ (es decir, conjunto abierto simplemente conexo cuya frontera es una línea que no se cruza hecha de un número finito de segmentos de línea recta) definimos los siguientes espacios de dimensión finita

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_h^K := \{v_h \in H^2(K) : \Delta^2 v_h \in \mathbb{P}_2(K), v_h|_{\partial K} \in C^0(\partial K), v_h|_e \in \mathbb{P}_3(e)\, \forall e \in \partial K,\\ \nabla v_h|_{\partial K} \in C^0(\partial K)^2,\, \partial_{\mathbf{n}} v_h|_e \in \mathbb{P}_1(e)\, \forall e \in \partial K\}\,,\end{aligned}$$

and

$$\widetilde{V}_h^K := \left\{\tau_h \in H^1(K) : \Delta \tau_h \in \mathbb{P}_1(K), \tau_h|_{\partial K} \in C^0(\partial K), \tau_h|_e \in \mathbb{P}_1(e)\, \forall e \in \partial K\right\},$$

Tenga en cuenta que para todos los $v_h \in \widetilde{W}_h^K$ y para todos los $\tau_h \in \widetilde{V}_h^K$ se cumplen las siguientes condiciones:

- para cualquier $v_h \in \widetilde{W}_h^K$ la traza en la frontera de K es continua y en cada arista es un polinomio de grado 3;
- para cualquier $v_h \in \widetilde{W}_h^K$ el gradiente en la forntera es continuo y en cada arista su componente normal es un polinomio de grado 1;
- para cualquier $v_h \in \widetilde{W}_h^K$ el gradiente en la forntera es continuo y en cada arista su componente tangencial es un polinomio de grado 3, esto es una consecuencia del hecho de que en un borde genérico la función virtual es un polinomio de grado 3;
- para cualquier $\tau_h \in \widetilde{V}_h^K$ la traza en la rontera de K es continua y en cada arista es un polinomio de grado 1;
- $\mathbb{P}_2(K) \times \mathbb{P}_1(K) \subseteq \widetilde{W}_h^K \times \widetilde{V}_h^K$.

Por lo tanto, los siguientes grados de libertad permiten determinar de manera única v_h y ∇v_h en ∂K, y τ_h en ∂K, ver [3].

$\mathbf{D_1}$: evaluación de v_h en los vértices N_{v}^K de K;

D$_2$: evalución de ∇v_h en los N_{v}^K vértices de K;

D$_3$: evaluación de τ_h en los N_{v}^K vértices de K.

3.3.2. Formas discretas definidas en espacios de elementos virtuales

Con el objetivo de construir el esquema discreto introducimos la versión discreta de las formas definidas en (3.10)-(3.13).

$$\begin{aligned}\mathbb{A}((w,u),(v,\tau)) &:= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} a_K^{\Delta}(w,v) + a_K^{\nabla}(u,\tau) + a_K^{0}(w,\tau),\\ F(v) &:= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} F_K(v)\end{aligned}$$

donde, hemos definido

$$\begin{aligned}
&a_K^{\Delta} : H^2(K)\times H^2(K)\to\mathbb{R}; \qquad a_K^{\Delta}(w,v) := \int_K \Delta w\Delta v\,\mathrm{d}x\,,\\
&a_K^{\nabla} : H^1(K)\times H^1(K)\to\mathbb{R}; \qquad a_K^{\nabla}(u,\tau) := \int_K \nabla u\cdot\nabla\tau\,\mathrm{d}x\,,\\
&a_K^{0} : H^2(K)\times H^1(K)\to\mathbb{R}; \qquad a_K^{0}(w,\tau) := \int_K w\tau\,\mathrm{d}x\,,\\
&F_K : L^2(K)\to\mathbb{R}; \qquad F_K(v) := -\int_K fv\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$\forall w,v\in H^2(K)$, y $u,\tau\in H^1(K)$

Ahora, definimos el proyector $\Pi_2^{\Delta} : \widetilde{W}_h^K \longrightarrow \mathbb{P}_2(K) \subseteq \widetilde{W}_h^K$ para todo $v_h\in\widetilde{W}_h^K$ como la solución del siguiente problema local

$$\begin{aligned} a_K^D(\Pi_2^{\Delta}v_h,q) &= a_K^D(v_h,q) \quad \forall q\in\mathbb{P}_2(K),\\ ((\Pi_2^{\Delta}v_h,q))_K &= ((v_h,q))_K \quad \forall q\in\mathbb{P}_1(K),\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} a_K^D(w,v) &:= \int_K D^2w : D^2v\,\mathrm{d}x \quad \forall w,v\in H^2(K)\\ ((\varphi_h,\phi_h))_K &:= \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{v}}^K}\varphi_h(\mathrm{v}_i)\phi_h(\mathrm{v}_i), \quad \forall\varphi_h,\phi_h\in C^0(\partial K),\end{aligned}$$

donde $D^2 v$ denota la matriz hessiana de v y v_i, $1 \leq i \leq N_{\mathrm{v}}^K$, siendo los vértices de K.

Observamos que el operador Π_2^{Δ} está bien definido en $\widetilde{W}_h^K$ y, lo más importante, para todo $v_h \in \widetilde{W}_h^K$ el polinomio $\Pi_2^{\Delta} v_h$ se puede calcular usando solo los valores de los operadores $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D_2}$ calculado sobre v_h. Esto sigue fácilmente al integrar por partes (ver [3]).

De manera similar, definimos el proyector $\Pi_1^{\nabla} : \widetilde{V}_h^K \longrightarrow \mathbb{P}_1(K) \subseteq \widetilde{V}_h^K$ para cada $\tau_h \in \widetilde{V}_h^K$ como la solución de las siguientes ecuaciones del sistema local

$$
\begin{aligned}
a_K^{\nabla}(\Pi_1^{\nabla} \tau_h, q) &= a_K^{\nabla}(\tau_h, q) \qquad \forall q \in \mathbb{P}_1(K), \\
(\Pi_1^{\nabla} \tau_h, 1)_{\partial K} &= (\tau_h, 1)_{\partial K}.
\end{aligned}
$$

Observamos que el operador Π_1^{∇} está bien definido en $\widetilde{V}_h^K$ y, como antes, para todo $\tau_h \in \widetilde{V}_h^K$ el polinomio $\Pi_1^{\nabla} \tau_h$ se puede calcular usando solo los valores de los operadores $\mathbf{D_3}$ calculado sobre τ_h, que se sigue de una integración por partes (ver [1]).

A continuación, presentamos nuestros espacios virtuales locales mejorados establecidos en [3] y [1], respectivamente:

$$
W_h^K := \left\{ v_h \in \widetilde{W}_h^K : \int_K (\Pi_2^{\Delta} v_h - v_h) q = 0 \qquad \forall q \in \mathbb{P}_2(K) \right\},
$$

y

$$
V_h^K := \left\{ \tau_h \in \widetilde{V}_h^K : \int_K (\Pi_1^{\nabla} \tau_h - \tau_h) q = 0 \qquad \forall q \in \mathbb{P}_1(K) \right\}.
$$

Está claro que $W_h^K \times V_h^K \subseteq \widetilde{W}_h^K \times \widetilde{V}_h^K$. Así, los operadores lineales Π_2^{Δ} y Π_1^{∇} están bien definidos en W_h^K y V_h^K, respectivamente.

En el Lema 2.1 de [3] se ha establecido que el conjuntos de operadores $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D_2}$ constituye un conjunto de grados de libertad para el espacio W_h^K. Además, el conjunto de operadores $\mathbf{D_3}$ constituye un conjunto de grados de libertad para el espacio V_h^K (ver [1]).

También tenemos que $\mathbb{P}_2(K) \times \mathbb{P}_1(K) \subseteq W_h^K \times V_h^K$. Esto garantizará las buenas propiedades de aproximación de los espacios.

Por otro lado, definimos el proyector L^2-ortogonal estándar en $\mathbb{P}_k(K)$, $k = 1,2$ de la siguiente manera.

$$\Pi_k^0 : L^2(K) \to \mathbb{P}_k(K); \qquad \int_K (\Pi_k^0 v - v) q \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_k(K), \quad k = 1,2. \tag{3.23}$$

Ahora, en [1, 3] se estableció que $\Pi_2^0 v_h = \Pi_2^\Delta v_h$ y $\Pi_1^0 \tau_h = \Pi_1^\nabla \tau_h$ para todo $v_h \in W_h^K$, y para todo $\tau_h \in V_h^K$.

Ahora, para cada descomposición $\mathcal{T}_h$ de Ω en polígonos simples K, introducimos el espacio producto $\mathbb{H}_h := W_h \times V_h$, donde

$$W_h := \{v_h \in W : v_h|_K \in W_h^K\} \quad \text{y} \quad V_h := \{\tau_h \in V : \tau_h|_K \in V_h^K\}.$$

Se da un conjunto de grados de libertad para $\mathbb{H}_h$ por todos los valores puntuales de v_h y τ_h en todos los vértices de $\mathcal{T}_h$ junto con todos los valores puntuales de ∇v_h en todos los vértices de $\mathcal{T}_h$.

A continuación, analizamos la construcción de la versión discreta de las formas locales. Con este fin, consideramos $s_K^\Delta(\cdot,\cdot)$ y $s_K^\nabla(\cdot,\cdot)$ cualquier forma bilineal definida positiva simétrica que satisfaga:

$$a_K^D(v_h, v_h) \lesssim s_K^\Delta(v_h, v_h) \lesssim a_K^D(v_h, v_h) \quad \forall v_h \in W_h^K \cap \ker(\Pi_2^\Delta),$$

$$a_K^\nabla(\tau_h, \tau_h) \lesssim s_K^\nabla(\tau_h, \tau_h) \lesssim a_K^\nabla(\tau_h, \tau_h) \quad \forall \tau_h \in V_h^K \cap \ker(\Pi_1^\nabla).$$

Luego, definimos las formas discretas $\mathbb{A}_h(\cdot,\cdot) : \mathbb{H}_h \times \mathbb{H}_h \to \mathbb{R}$, y $F_h(\cdot) : W_h \to \mathbb{R}$ como sigue

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_h((w_h, u_h), (v_h, \tau_h)) &:= a_h^\Delta(w_h, v_h) + a_h^\nabla(u_h, \tau_h) + a_h^0(w_h, \tau_h) \\
&:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \{a_{h,K}^\Delta(w_h, v_h) + a_{h,K}^\nabla(u_h, \tau_h) + a_{h,K}^0(w_h, \tau_h)\}, \\
F_h(v_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} F_{h,K}(v_h) &:= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Pi_2^0 f \Pi_2^0 v_h dx,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

para todo $(w_h, u_h), (v_h, \tau_h) \in \mathbb{H}_h$, donde $a^{\Delta}_{h,K}(\cdot,\cdot)$, $a^{\nabla}_{h,K}(\cdot,\cdot)$, y $a^{0}_{h,K}(\cdot,\cdot)$ son formas bilineales locales definidas por

$$a^{\Delta}_{h,K} : W_h^K \times W_h^K \to \mathbb{R};\ a^{\Delta}_{h,K}(w_h, v_h) := a^{\Delta}_K(\Pi^{\Delta}_2 w_h, \Pi^{\Delta}_2 v_h) + s^{\Delta}_K(w_h - \Pi^{\Delta}_2 w_h, v_h - \Pi^{\Delta}_2 v_h), \tag{3.25}$$

$$a^{\nabla}_{h,K} : V_h^K \times V_h^K \to \mathbb{R};\ a^{\nabla}_{h,K}(u_h, \tau_h) := a^{\nabla}_K(\Pi^{\nabla}_1 u_h, \Pi^{\nabla}_1 \tau_h) + s^{\nabla}_K(u_h - \Pi^{\nabla}_1 u_h, \tau_h - \Pi^{\nabla}_1 \tau_h), \tag{3.26}$$

$$a^{0}_{h,K} : W_h^K \times V_h^K \to \mathbb{R};\ a^{0}_{h,K}(w_h, \tau_h) := a^{0}_K(\Pi^{0}_2 w_h, \Pi^{0}_1 \tau_h). \tag{3.27}$$

Ahora, como es habitual en la teoría del elemento virtual, necesitamos establecer las propiedades de consistencia y estabilidad para las formas bilineales locales definidas en (3.25), (3.26) y (3.27). Dado que la prueba se puede obtener a partir de argumentos estándar en la literatura VEM, se omite.

Proposición 3.3.1. *Las formas locales $a^{\Delta}_{h,K}(\cdot,\cdot)$, $a^{\nabla}_{h,K}(\cdot,\cdot)$, y $a^{0}_{h,K}(\cdot,\cdot)$ en cada elemento K satisface las siguientes propiedades*

- *Consistencia: para todo $h > 0$ y para todo $K \in \mathcal{T}_h$ tenemos que*

$$a^{\Delta}_{h,K}(v_h, q) = a^{\Delta}_K(v_h, q) \qquad \forall q \in \mathbb{P}_2(K) \quad \forall v_h \in W_h^K, \tag{3.28}$$

$$a^{\nabla}_{h,K}(\tau_h, q) = a^{\nabla}_K(\tau_h, q) \qquad \forall q \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall \tau_h \in V_h^K, \tag{3.29}$$

- *Estabilidad y acotamiento:*

$$a^{\Delta}_K(v_h, v_h) \lesssim a^{\Delta}_{h,K}(v_h, v_h) \lesssim a^{\Delta}_K(v_h, v_h) \qquad \forall v_h \in W_h^K \cap \ker(\Pi^{\Delta}_2), \tag{3.30}$$

$$a^{\nabla}_K(\tau_h, \tau_h) \lesssim a^{\nabla}_{h,K}(\tau_h, \tau_h) \lesssim a^{\nabla}_K(\tau_h, \tau_h) \qquad \forall \tau_h \in V_h^K \cap \ker(\Pi^{\nabla}_1). \tag{3.31}$$

Ahora, estamos en condiciones de escribir la discretización con elementos virtuales del Problema 3.2.2.

Problema 3.3.1. *Hallar $(w_h, u_h) \in \mathbb{H}_h$ tal que*

$$\mathbb{A}_h((w_h, u_h), (v_h, \tau_h)) = F_h(v_h) \quad \forall (v_h, \tau_h) \in \mathbb{H}_h. \tag{3.32}$$

En la siguiente sección probaremos el buen planteamiento del problema discreto 3.3.1. Con este objetivo, presentamos a continuación la versión discreta del Lema 3.2.1.

Lema 3.3.2. *Las formas bilineales locales* $a_h^{\Delta}(\cdot,\cdot)$, $a_h^{\nabla}(\cdot,\cdot)$ *y* $a_h^0(\cdot,\cdot)$ *satisfacen las siguientes propiedades .*

$$|a_h^{\Delta}(w_h, v_h)| \lesssim ||w_h||_{2,\Omega}||v_h||_{2,\Omega}, \tag{3.33a}$$

$$|a_h^{\nabla}(u_h, \tau_h)| \lesssim ||v_h||_{1,\Omega}||\tau_h||_{1,\Omega}, \tag{3.33b}$$

$$|a_h^0(w_h, \tau_h)| \lesssim ||w_h||_{2,\Omega}||\tau_h||_{1,\Omega}, \tag{3.33c}$$

$$||v_h||_{2,\Omega}^2 \lesssim a_h^{\Delta}(v_h, v_h), \tag{3.33d}$$

$$||u_h||_{2,\Omega}^2 \lesssim a_h^{\nabla}(u_h, u_h). \tag{3.33e}$$

Demostración. La prueba se puede obtener siguiendo los mismos argumentos que se aplican para probar el Lema 3.2.1 unido a la proposición 3.3.1. □

3.3.3. Buen planteamiento del problema discreto

En esta sección presentamos el buen planteamiento del Problema discreto 3.3.1. Para obtener eso, procederemos como el caso continuo. De hecho, nosotros vamos a descomponer la formulación variacional discreta (3.32) en los siguientes problemas discretos:

- Hallar $w_h \in W_h$ tal que

$$a_h^{\Delta}(w_h, v_h) = F_h(v_h), \forall v_h \in W_h. \tag{3.34}$$

- Hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$a_h^{\nabla}(u_h, \tau_h) = -a_h^0(w_h, \tau_h), \forall \tau_h \in V_h. \tag{3.35}$$

El Teorema de Lax-Milgram y las estimaciones (3.33a) y (3.33d) implican la solución única de la formulación variacional discreta (3.34). A continuación, aplicando nuevamente el Teorema de Lax-Milgram y las desigualdades (3.33b), (3.33c) y (3.33e) obtenemos la solución única $u_h \in V_h$ del problema discreto (3.35). Así, obtenemos la versión discreta del Teorema 3.2.2 como sigue.

Teorema 3.3.3. *Dado $f \in L^2(\Omega)$, entonces existe una única $(w_h, u_h) \in \mathbb{H}_h$ tal que el problema 3.3.1 se cumple.*

3.4. Convergencia y estimativos del error

En esta sección probaremos que

$$||(w,u) - (w_h, u_h)||_{\mathbb{H}} \to 0$$

cuando $h \to 0$ y establecer estimaciones de error.

Con este fin, en primer lugar, introducimos la definición de la seminorma quebrada.

$$|v|^2_{\ell,h} := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|^2_{\ell,K} \quad \forall v \in L^2(\Omega), v|_K \in H^\ell(K) \qquad \ell = 1,2.$$

Luego, para cualquier $v, \tau \in L^2(\Omega)$ tal que $v|_K \in H^2(K)$ y $\tau|_K \in H^1(K)$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$, definimos $\Pi^{\Delta}_{2,h}$ y $\Pi^{\nabla}_{1,h}$ en $L^2(\Omega)$ de la siguiente manera

$$(\Pi^{\Delta}_{2,h} v)|_K := \Pi^{\Delta}_2 (v|_K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{3.36}$$

$$(\Pi^{\nabla}_{1,h} \tau)|_K := \Pi^{\nabla}_1 (\tau|_K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{3.37}$$

Ahora, presentamos algunos resultados de interpolación preliminares bien conocidos en la literatura de los métodos de elementos virtuales que serán necesarios para probar la convergencia del problema discreto (3.32). Empezamos con el siguiente resultado sobre polígonos estrellados, que se deriva por interpolación entre espacios de Sobolev (ver por ejemplo [26, Teorema I.1.4]). Mencionamos que este resultado ha sido declarado en [44, Proposición 4.2] para valores enteros y se deriva de la teoría clásica de Scott-Dupont, véase [9].

Proposición 3.4.1. *Si se cumple el supuesto* **A1**, *entonces por cada* $v \in H^{\delta}(K)$ *existe* $v_{\pi} \in \mathbb{P}_k(K)$, $k \geq 0$ *tal que*

$$|v - v_{\pi}|_{\ell,K} \lesssim h_K^{\delta-\ell}|v|_{\delta,K} \quad 0 \leq \delta \leq k+1, \ell = 0, \ldots, [\delta],$$

donde $[\delta]$ *denota el entero más grande menor o igual que* $\delta \in \mathbb{R}$.

Los siguientes son resultados de interpolación en los espacios virtuales W_h y V_h. La prueba se puede consultar en [11, 3] y [44, 36], respectivamente

Proposición 3.4.2. *Suponga que **A1**–**A2** se satisfacen, sea* $w \in H^{\varepsilon}(\Omega)$ *con* $\varepsilon \in [2,3]$. *Entonces, existe* $w_I \in W_h$ *tal que*

$$\|w - w_I\|_{\ell,\Omega} \lesssim h^{\varepsilon-\ell}\|w\|_{\varepsilon,\Omega}, \qquad \ell = 0, 1, 2.$$

Proposición 3.4.3. *Suponga que **A1**–**A2** se satisfacen, Sea* $u \in H^{1+t}(\Omega)$ *con* $t \in (0,1]$. *Entonces, existe* $u_I \in V_h$ *tal que*

$$\|u - u_I\|_{1,\Omega} \lesssim h^t|u|_{1+t,\Omega}.$$

Finalmente, el siguiente resultado establece un estimativo para el proyector $\Pi_{2,h}^{\Delta}$ (cf. (3.36)).

Lema 3.4.4. *Sea* $v_h \in W_h$, *entonces*

$$\|v_h - \Pi_{2,h}^{\Delta}v_h\|_{0,\Omega} \lesssim h^2\|v_h\|_{2,\Omega}.$$

Demostración. La prueba se puede comprobar en [37, Lemma 3.5]. □

Ahora, estamos en posición de probar la convergencia de nuestro esquema discreto (3.32).

Proposición 3.4.5. *Sea* $(w, u) \in \mathbb{H}$ *la solución del Problema 3.2.2, y sea* $(w_h, u_h) \in \mathbb{H}_h$ *la solución del Problema 3.3.1. Entonces la siguiente estimación se cumple*

$$||w - w_h||_{2,\Omega} + ||u - u_h||_{1,\Omega} \lesssim h^{\text{mín}\{s,t\}}||f||_{0,\Omega}.$$

Para algún $s \in (1/2, 1]$ y $t \in (0, 1)$.

Demostración. Dadas $f \in L^2(\Omega)$, $(w, u) \in \mathbb{H}$ y $(w_h, u_h) \in \mathbb{H}_h$ las soluciones únicas de los problemas 3.2.2 y 3.3.1, respectivamente. Luego, a partir de estimaciones (3.18), existe $(w_I, u_I) \in \mathbb{H}_h$ tal que las proposiciones 3.4.2 y 3.4.3 son verdaderas. Ahora, una aplicación de la desigualdad triangular permite

$$||w - w_h||_{2,\Omega} \lesssim ||w - w_I||_{2,\Omega} + ||w_I - w_h||_{2,\Omega}, \tag{3.38}$$

$$||u - u_h||_{1,\Omega} \lesssim ||u - u_I||_{1,\Omega} + ||u_I - u_h||_{2,\Omega}. \tag{3.39}$$

A continuación, definimos $v_h = w_h - w_I \in W_h$, luego de la elipticidad de las formas bilineales $a_h^{\Delta}(\cdot, \cdot)$ (cf. (3.33d)) tenemos

$$\begin{aligned}
&||w_h - w_I||^2_{2,\Omega} = ||v_h||^2_{2,\Omega} \lesssim a_h^{\Delta}(v_h, v_h) \qquad \Big(\text{usar } v_h = w_h - w_I\Big) \\
&= a_h^{\Delta}(w_h - w_I, v_h) = a_h^{\Delta}(w_h, v_h) - a_h^{\Delta}(w_I, v_h) \qquad \Big(\text{aplicar(3.34)}\Big) \\
&= F_h(v_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{h,K}^{\Delta}(w_I, v_h) \qquad \Big(\text{sumar} \pm w_\pi\Big) \\
&= F_h(v_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{a_{h,K}^{\Delta}(w_I - w_\pi, v_h) + a_{h,K}^{\Delta}(w_\pi, v_h)\right\} \qquad \Big(\text{usar (3.28)}\Big) \\
&= F_h(v_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{a_{h,K}^{\Delta}(w_I - w_\pi, v_h) + a_K^{\Delta}(w_\pi, v_h)\right\} \qquad \Big(\text{sumar } \pm w\Big) \\
&= F_h(v_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{a_{h,K}^{\Delta}(w_I - w_\pi, v_h) + a_K^{\Delta}(w_\pi - w, v_h)\right\} + a_K^{\Delta}(w, v_h)\Big\} \Big(\text{usar (3.16)}\Big) \\
&= \underbrace{F_h(v_h) - F(v_h)}_{T_1} + \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{h,K}^{\Delta}(w_\pi - w_I, v_h)}_{T_2} + \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_K^{\Delta}(w - w_\pi, v_h)\Big\}}_{T_3},
\end{aligned} \tag{3.40}$$

donde hemos considerado $u_\pi \in L^2(\Omega)$ tal que $u_\pi|_K \in \mathbb{P}_2(K)$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$ y Proposición 3.4.1 se cumplen.

Ahora, vincularemos los términos T_1, T_2 y T_3. De hecho, para el término T_1 usamos las estimaciones (3.24),(3.10), y la definición del operador Π_2^0 dos veces para obtener

$$T_1 = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \{fv_h - \Pi_2^0 f v_h\} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \{(f - \Pi_2^0 f)v_h\}$$
$$= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \{(f - \Pi_2^0 f)(v_h - \Pi_2^0 v_h)\}.$$

A continuación, aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tomamos la suma sobre $K \in \mathcal{T}_h$, usamos el hecho de que $\Pi_2^0 v_h = \Pi_2^\Delta v_h$ y aplicamos el Lema 3.4.4 en la igualdad anterior para deducir

$$T_1 \lesssim \sum_{K\in\mathcal{T}_h} ||\Pi_2^0 f - f||_{0,K} ||v_h - \Pi_2^0 v_h||_{0,K} \lesssim ||\Pi_2^0 f - f||_{0,\Omega} ||v_h - \Pi_{2,h}^\Delta v_h||_{0,\Omega}$$
$$\lesssim h^2 ||f||_{0,\Omega} ||v_h||_{2,\Omega}. \tag{3.41}$$

Por otro lado, para el término T_2 aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (3.30), sumamos $K \in \mathcal{T}_h$, sumamos $\pm w$ y [25, Teorema 2.31]) para obtener

$$T_2 \lesssim \sum_{K\in\mathcal{T}_h} a_{h,K}^\Delta(w_\pi - w_I, v_h) \lesssim \sum_{K\in\mathcal{T}_h} a_{h,K}^\Delta(w_\pi - w_I, w_\pi - w_I)^{1/2} a_{h,K}^\Delta(v_h, v_h)^{1/2}$$
$$\lesssim \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |w_\pi - w_I|_{2,K} |v_h|_{2,K} \lesssim |w_\pi - w_I|_{2,h} ||v_h||_{2,\Omega} \lesssim \Big(|w_\pi - w + w - w_I|_{2,h}\Big)|v_h|_{2,\Omega}$$
$$\lesssim \Big(|w - w_\pi|_{2,h} + ||w - w_I||_{2,\Omega}\Big)||v_h||_{2,\Omega}.$$

Entonces, de las Proposiciones 3.4.1 y 3.4.2 y Lema 3.2.3 tenemos

$$T_2 \lesssim h^s ||w||_{2+s,\Omega} \lesssim h^s ||f||_{0,\Omega} ||v_h||_{2,\Omega}. \tag{3.42}$$

Para el término T_3, aplicamos argumentos similares a los aplicados para estimar (3.42) y así podemos deducir

$$T_3 \lesssim h^s ||w||_{2+s,\Omega} \lesssim h^s ||f||_{0,\Omega} ||v_h||_{2,\Omega}. \tag{3.43}$$

Por lo tanto, de (3.40), (3.41), (3.42), (3.43), y dividiendo por $||v_h||_{2,\Omega}$ tenemos la siguiente estimación

$$||w_h - w_I||_{2,\Omega} \lesssim h^s ||f||_{0,\Omega}. \tag{3.44}$$

Finalmente, aplicamos la Proposición 3.4.2 sobre la estimación (3.38), y luego usamos la estimación (3.44) para implicar

$$||w - w_h||_{2,\Omega} \lesssim h^s ||f||_{0,\Omega}. \tag{3.45}$$

Ahora, la estimación (3.39) se puede obtener con los mismos argumentos que los aplicados para probar (3.38) (para $\tau_h := u_h - u_I \in V_h$ en este caso). Por lo tanto, podemos concluir la siguiente estimación

$$||u - u_h||_{1,\Omega} \lesssim h^t ||f||_{0,\Omega}. \tag{3.46}$$

Por tanto, la demostración se completa a partir de las estimaciones (3.45) y (3.46).

□

3.4.1. Estimaciones del error en $L^2(\Omega)$

En esta sección usaremos los argumentos de dualidad para establecer estimaciones en $L^2(\Omega)$ de nuestro esquema discreto (3.32).

Teorema 3.4.6. *Sea $(w, u) \in \mathbb{H}$ la solución del Problema 3.2.2, y sea $(w_h, u_h) \in \mathbb{H}_h$ la solución del Problema 3.3.1. Entonces, se cumple el siguiente resultado*

$$||w - w_h||_{0,\Omega} \lesssim h^{2s} \Big(||f||_{0,\Omega} + |f|_{1,h} \Big),$$

y

$$||u - u_h||_{0,\Omega} \lesssim h^{2t} ||f||_{0,\Omega} + h^{2s} \Big(||f||_{0,\Omega} + |f|_{1,h} \Big).$$

Demostración. Consideremos el siguiente problema bien planteado. Encuentre $\phi \in W$ tal que

$$a^{\Delta}(\phi, v) = a^0(w - w_h, v), \qquad \forall v \in W.$$

Es bien sabido que $\phi \in H^{2+s}(\Omega)$ tal que $||\phi||_{2+s,\Omega} \lesssim ||w - w_h||_{0,\Omega}$, donde $s \in (1/2, 1)$ si Ω es un dominio no convexo, y $s = 1$ cuando Ω es un dominio convexo (ver por ejemplo [27]). Entonces, elegimos $\phi_\pi \in L^2(\Omega)$ tal que $\phi_\pi|_K \in \mathbb{P}_2(K)$ $\forall K \in \mathcal{T}_h$ y consideramos $\phi_I \in W_h$ tales que las Proposiciones 3.4.1 y 3.4.2 son verdaderas. A continuación, obtenemos los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} ||w - w_h||^2_{0,\Omega} &= a^{\Delta}(\phi, w - w_h) = a^{\Delta}(w - w_h, \phi - \phi_I) + a^{\Delta}(w, \phi_I) - a^{\Delta}(w_h, \phi_I) \\ &= a^{\Delta}(w - w_h, \phi - \phi_I) + a^{\Delta}(w, \phi_I) - a_h^{\Delta}(w_h, \phi_I) + a_h^{\Delta}(w_h, \phi_I) - a^{\Delta}(w_h, \phi_I) \\ &= a^{\Delta}(w - w_h, \phi - \phi_I) + F(\phi_I) - F_h(\phi_I) + a_h^{\Delta}(w_h, \phi_I) - a^{\Delta}(w_h, \phi_I). \end{aligned}$$

A continuación, siguiendo argumentos similares a los aplicados en [15, Teorema 5.1]), junto con las Proposiciones 3.4.1, 3.4.2 para $\phi \in H^{2+s}(\Omega)$ obtenemos

$$||w - w_h||_{0,\Omega} \lesssim h^{2s} \Big\{ ||f||^2_{0,\Omega} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |f|^2_{1,K} \Big\}^{1/2} = h^{2s} \Big(||f||_{0,\Omega} + |f|_{1,h} \Big). \tag{3.47}$$

Por otro lado, empleamos los argumentos de dualidad una vez más para obtener un resultado estimado para u en L^2- norma. En efecto, consideramos el siguiente problema bien planteado. Encuentre $z \in V_0$ tal que

$$a^{\nabla}(z, \tau) = a^0(u - u_h, \tau), \qquad \forall \tau \in V_0. \tag{3.48}$$

Es bien sabido que $z \in H^{1+t}(\Omega)$ con t como en la observación 2, y

$$||z||_{1+t,\Omega} \lesssim ||u - u_h||_{0,\Omega}, . \tag{3.49}$$

entonces, de las proposiciones 3.4.1 y 3.4.3 existen $z_\pi \in L^2(\Omega)$ y $z_I \in V_h$ tales que

$$|z - z_\pi|_{1,h} \lesssim h^t ||z||_{1+t,\Omega}, \tag{3.50a}$$

$$|z - z_I|_{1,\Omega} \lesssim h^t ||z||_{1+t,\Omega}. \tag{3.50b}$$

A continuación, para probar la formulación variacional (3.48) con $\tau := u - u_h \in V_0$, sumando y restando el término z_I, usando (3.17), y (3.35) obtenemos

$$\begin{aligned} ||u-u_h||_{0,\Omega}^2 &= a^\nabla(z, u-u_h) = a^\nabla(z - z_I, u - u_h) + a^\nabla(z_I, u) - a^\nabla(z_I, u_h) \\ &= a^\nabla(z - z_I, u - u_h) - a^0(w, z_I) - a^\nabla(u_h, z_I) \\ &= \underbrace{a^\nabla(z - z_I, u - u_h)}_{T_4} + \underbrace{a_h^0(w_h, z_I) - a^0(w, z_I)}_{T_5} + \underbrace{a_h^\nabla(u_h, z_I) - a^\nabla(u_h, z_I)}_{T_6}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Ahora, vincularemos los términos T_4, T_5 y T_6. De hecho, para el primer término usamos estimaciones (3.15b), (3.50b), Proposición 3.4.5, y (3.49) para obtener

$$T_4 \lesssim h^t ||z||_{1+t,\Omega} h^{\min\{s,t\}} ||f||_{0,\Omega} \lesssim h^{2t} ||f||_{0,\Omega} ||u - u_h||_{0,\Omega}. \tag{3.52}$$

Para el término T_5 tenemos los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} T_5 &= a_h^0(w_h, z_I) - a^0(w, z_I) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(a_{h,K}^0(w_h, z_I) - a_K^0(w, z_I) \Big) \qquad \text{usar (3.27)} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(a_K^0(\Pi_2^0 w_h, \Pi_1^0 z_I) - a_K^0(w, z_I) \Big) \qquad \text{aplicar(3.23)} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(a_K^0(w_h, \Pi_1^0 z_I) - a_K^0(w, z_I) \Big) \qquad \text{sumar } \pm z_I \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(a_K^0(w_h, \Pi_1^0 z_I - z_I) + a_K^0(w_h - w, z_I) \Big) \qquad \text{usar (3.23) y sumar } \pm z \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(a_K^0(w_h - \Pi_1^0 w_h, \Pi_1^0 z_I - z_I) + a_K^0(w_h - w, z_I - z) \\ &\quad + a_K^0(w_h - w, z) \Big) \end{aligned}$$

En la igualdad anterior sumamos $\pm\Pi_1^0 z$ y $\pm z$, aplicamos la Proposición 3.4.1, sumamos $K \in \mathcal{T}_h$, aplicamos la Proposición 3.4.5 y estima (3.47), (3.18) para obtener

$$\begin{aligned}
T_5 = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big(& a_K^0(w_h - \Pi_1^0 w_h, \Pi_1^0(z_I - z) + (\Pi_1^0 z - z) + (z - z_I)) \\
& + a_K^0(w_h - w, z_I - z) + a_K^0(w_h - w, z)\Big) \\
& \lesssim h||w_h||_{2,\Omega}\Big(2||z - z_I||_{0,\Omega} + ||z - \Pi_1^0 z||_{0,\Omega}\Big) + ||w - w_h||_{0,\Omega}(||z - z_I||_{0,\Omega} + ||z||_{0,\Omega}) \\
& \lesssim h||w_h||_{2,\Omega} h^t ||z||_{1+t,\Omega} + h^{2s}\Big(||f||_{0,\Omega} + |f|_{1,h}\Big)||z||_{1+t,\Omega} \\
& \lesssim h^{1+t}||w_h||_{2,\Omega}||u - u_h||_{0,\Omega} + h^{2s}\Big(||f||_{0,\Omega} + |f|_{1,h}\Big)||u - u_h||_{0,\Omega} \\
& \lesssim \Big(h^{1+t}||f||_{0,\Omega} + h^{2s}\Big(||f||_{0,\Omega} + |f|_{1,h}\Big)\Big)||u - u_h||_{0,\Omega}. \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

Ahora, para el término T_6 sumamos y restamos $u_\pi := \Pi_1^0 u$, y aplicamos la propiedad de consistencia (3.29), luego sumamos $\pm z_\pi := \Pi_1^0 z$, y usa (3.29) una vez más para obtener

$$\begin{aligned}
T_6 = a_h^\nabla(u_h, z_I) - a^\nabla(u_h, z_I) &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big(a_{h,K}^\nabla(u_h, z_I) - a_K^\nabla(u_h, z_I)\Big) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big(a_{h,K}^\nabla(u_h - u_\pi, z_I) + a_K^\nabla(u_\pi - u_h, z_I)\Big) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big(a_{h,K}^\nabla(u_h - u_\pi, z_I - z_\pi) + a_K^\nabla(u_\pi - u_h, z_I - z_\pi)\Big).
\end{aligned}$$

A continuación, usamos el hecho de que $a^\nabla(\cdot,\cdot)$ y $a_h^\nabla(\cdot,\cdot)$ están acotados. Agregamos los términos $\pm u, \pm z$, y al aplicar la Proposición 3.4.5 conjunta con las estimaciones (3.50a), (3.50b) y (3.49) se tiene que

$$T_6 \lesssim h^t||z||_{1+t,\Omega} h^{\text{mín}\{s,t\}}||f||_{0,\Omega} \lesssim h^{2t}||f||_{0,\Omega}||u - u_h||_{0,\Omega}. \qquad (3.54)$$

Por lo tanto, de (3.51) y (3.52),(3.53) y (3.54) tenemos

$$||u - u_h||_{0,\Omega}^2 \lesssim \left(h^{2t}||f||_{0,\Omega} + h^{2s}\Big(||f||_{0,\Omega} + |f|_{1,h}\Big)\right)||u - u_h||_{0,\Omega}.$$

Finalmente se sigue que

$$||u - u_h||_{0,\Omega} \lesssim h^{2t}||f||_{0,\Omega} + h^{2s}\Big(||f||_{0,\Omega} + |f|_{1,h}\Big).$$

□

3.5. Resultados numéricos

Presentamos en esta sección los resultados de algunas simulaciones numéricas realizadas con el esquema discreto 3.3.1, que confirman los resultados teóricos (3.4.1),(3.4.2),(3.4.3),(3.4.4),(3.4.5),(3.4.6). El método numérico se ha implementado en un código MATLAB.

Para comparar nuestros resultados con los presentados en la literatura de métodos numéricos para problemas de sexto orden hemos considerado el dominio computacional Ω como sigue:

$$\text{Dominio cuadrado:} \qquad \Omega_{\mathbf{S}} := (0,1) \times (0,1).$$

Por otro lado, hemos probado el método utilizando diferentes familias de mallas poligonales (ver Figura 3.1):

- Ω_h^s: mallas rectangulares;
- Ω_h^t: mallas triangulares;
- Ω_h^{hex} mallas hexagonales hechas de hexágonos convexos;
- Ω_h^{tz}: mallas trapezoidales.

Hemos utilizado refinamientos sucesivos de una inicial malla (ver Figura 3.1). Los parámetros de refinamiento N y N_K utilizados para etiquetar cada malla son el número de elementos en cada borde de $\Omega_{\mathbf{S}}$, y el número de polígonos dentro del dominio computacional, respectivamente. Además, definimos los errores individuales

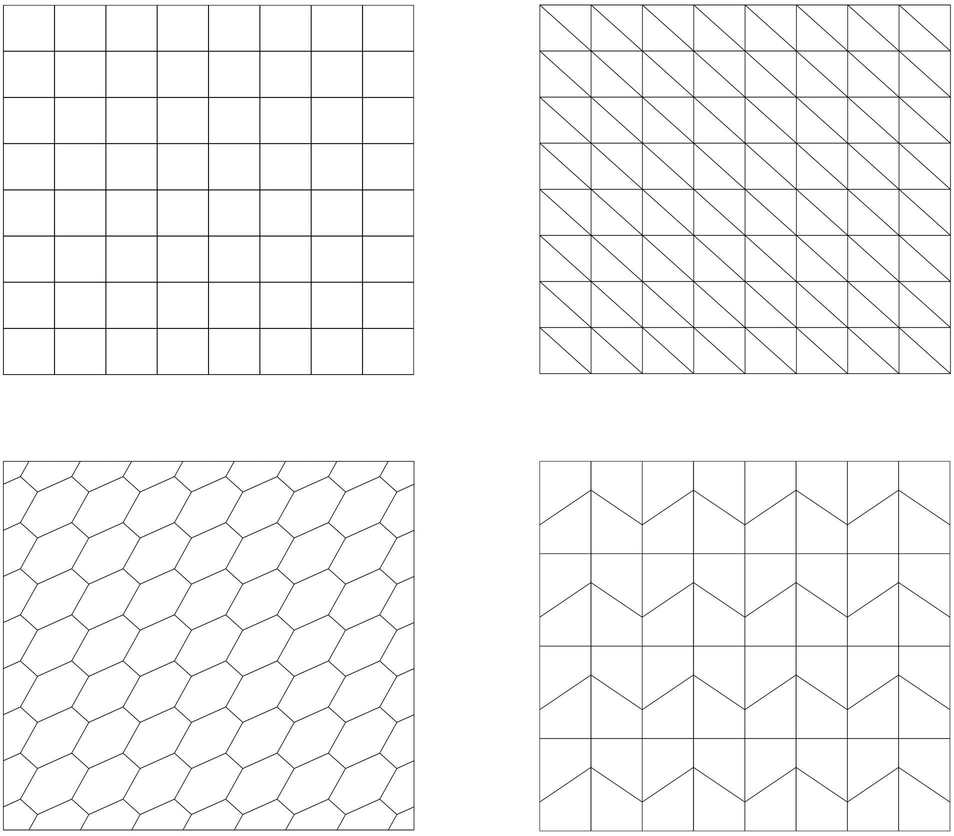

FIGURA 3.1: Mallas de muestra: Ω_h^s (arriba a la izquierda), Ω_h^t (arriba a la derecha), Ω_h^{dh} (abajo a la izquierda) y Ω_h^{tz} (abajo a la derecha).

por:

$$\mathrm{e}_0^{\nabla}(\tau,\tau_h) := ||\tau - \Pi_h^{\nabla}\tau_h||_{0,\Omega}, \quad \mathrm{e}_1^{\nabla}(\tau,\tau_h) := |\tau - \Pi_h^{\nabla}\tau_h|_{1,h} \qquad \forall\tau \in H_0^1(\Omega), \quad \forall\tau_h \in V_h, \tag{3.55}$$

donde, el proyector Π_h^{∇} se definió en (3.37). Hemos calculado las tasas experimentales de convergencia para cada error individual de la siguiente manera:

$$\mathrm{r}_{\star}^{\nabla}(\cdot) := \frac{\log(\,\mathrm{e}_{\star}^{\nabla}(\cdot)\,/\,\widetilde{\mathrm{e}}_{\star}^{\nabla}(\cdot))}{\log(N_{dof}\,/\,\widetilde{N}_{dof})}, \tag{3.56}$$

donde el subíndice $\star \in \{0,1\}$ y N_{dof}, $\widetilde{N}_{dof}$ denotan los grados de libertad de las respectivas descomposiciones poligonales con errores respectivos $\mathrm{e}_{\star}^{\nabla}(\cdot)$ and $\widetilde{\mathrm{e}}_{\star}^{\nabla}(\cdot)$.

A continuación presentamos las pruebas numéricas para ambas condiciones de frontera **(SSBC)** y **(CBC)**.

TABLA 3.1: Prueba 1 Errores y tasas de convergencia experimental e_0^∇, e_1^∇, y r_0^∇, rc_1^∇, respectivamente, (cf. (3.55) y (3.56)) de la solución discreta del problema elíptico de sexto orden.

Ω_S	N	e_0^∇	r_0^∇	e_1^∇	r_1^∇
	1.6000e+01	1.7283e-08	-	3.1211e-07	-
Ω_h^s	3.2000e+01	1.4472e-09	3.5780e+00	1.5032e-07	1.0540e+00
	6.4000e+01	3.2490e-10	2.1552e+00	7.4828e-08	1.0064e+00
	1.2800e+02	8.4917e-11	1.9359e+00	3.7367e-08	1.0018e+00
	1.6000e+01	2.9810e-08	-	3.6195e-07	-
Ω_h^{hex}	3.2000e+01	5.1441e-09	2.6489e+00	1.6279e-07	1.2047e+00
	6.4000e+01	1.0921e-09	2.2861e+00	7.9392e-08	1.0593e+00
	1.2800e+02	2.4972e-10	2.1527e+00	3.9450e-08	1.0203e+00
	1.6000e+01	1.9588e-08	-	3.3842e-07	-
Ω_h^{tz}	3.2000e+01	1.7924e-09	3.4500e+00	1.6454e-07	1.0404e+00
	6.4000e+01	3.5197e-10	2.3484e+00	8.2284e-08	9.9978e-01
	1.2800e+02	9.0192e-11	1.9644e+00	4.1148e-08	9.9978e-01
	1.6000e+01	1.1269e-08	-	3.3429e-07	-
Ω_h^t	3.2000e+01	2.9443e-09	1.9364e+00	1.6773e-07	9.9495e-01
	6.4000e+01	7.4865e-10	1.9755e+00	8.3949e-08	9.9858e-01
	1.2800e+02	1.8801e-10	1.9934e+00	4.1985e-08	9.9965e-01

3.5.1. Las condiciones de contorno (SSBC)

Para comparar nuestros resultados con los que existen en la literatura (ver por ejemplo [21]) hemos considerado dos pruebas para resolver las ecuaciones diferenciales parciales de sexto orden (3.4a)-(3.4b).

Test 1

En este ejemplo hemos considerado f de modo que la solución exacta de (3.4a)-(3.4b) viene dada por

$$u(x,y) := x^5 y^5 (1-x)^5 (1-y)^5.$$

Reportamos en Table 3.1 los errores definidos en (3.55) y las correspondientes tasas experimentales de convergencia para cada una de las diferentes mallas. En todos los casos observamos convergencia cuadrática para el primer error y convergencia lineal para el segundo error. El esquema numérico presentado es robusto con respecto a las mallas utilizadas y los órdenes de convergencia demostrados en la teoría resultan óptimos según los experimentos numéricos realizados.

La figura 3.2 ilustra la solución exacta u del problema (3.4a)-(3.4b), y la solución aproximada u_h calculada con el esquema de elementos virtuales estudiado en este trabajo para las condiciones de contorno **(SSBC)**.

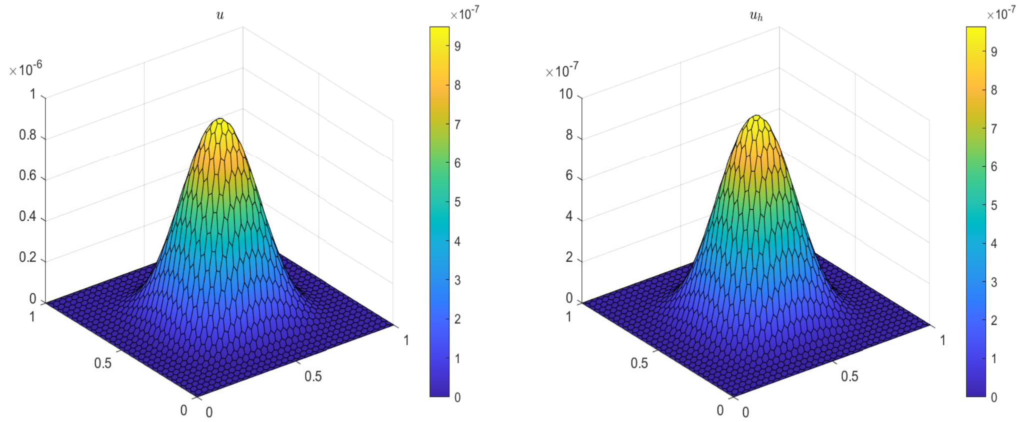

FIGURA 3.2: Soluciones exactas y aproximadas u y u_h para Test 3.5.1.

Test 2

En esta prueba numérica hemos elegido f para que la solución exacta del sistema (3.4a)-(3.4b) esté dada por

$$u(x,y) := \left(e^x + e^y\right) x^5 y^5 (1-x)^5 (1-y)^5.$$

Tabla 3.3 confirma una vez más el orden cuadrático de convergencia en L^2- norma para u y un orden lineal en H^1-seminorma. Además, la Figura 3.3 muestra la solución exacta y aproximada de los problemas 3.2.2 y 3.3.1 para el presente caso.

3.5.2. The (CBC) conditions

Una vez más presentamos dos ejemplos numéricos para confirmar los resultados teóricos cuando se consideran las condiciones **(CBC)**. Más precisamente, hemos elegido dos funciones f para que las soluciones exactas de (3.19a)-(3.19b) estén dadas por

$$u(x,y) := x^6 y^6 (x-1)^6 (y-1)^6.$$

y

$$u(x,y) := \left(\frac{2}{5}e^x + \cos y\right) x^6 y^6 (x-1)^6 (y-1)^6.$$

TABLA 3.2: Prueba 2: Errores y tasas de convergencia experimental $e_0^{\nabla}, e_1^{\nabla}$ y r_0^{∇}, r_1^{∇}, respectivamente, (cf. (3.55) y (3.56)) de la solución discreta al problema elíptico de sexto orden.

Ω_S	N	e_0^{∇}	r_0^{∇}	e_1^{∇}	r_1^{∇}
	1.6000e+01	6.4209e-08	-	1.0436e-06	-
Ω_h^s	3.2000e+01	5.0370e-09	3.6722e+00	4.9853e-07	1.0658e+00
	6.4000e+01	1.0716e-09	2.2328e+00	2.4814e-07	1.0065e+00
	1.2800e+02	2.8071e-10	1.9326e+00	1.2392e-07	1.0018e+00
	1.6000e+01	1.0345e-07	-	1.2092e-06	-
Ω_h^{hex}	3.2000e+01	1.7521e-08	2.6770e+00	5.4102e-07	1.2125e+00
	6.4000e+01	3.6673e-09	2.3071e+00	2.6382e-07	1.0595e+00
	1.2800e+02	8.3236e-10	2.1635e+00	1.3110e-07	1.0203e+00
	1.6000e+01	7.1920e-08	-	1.1314e-06	-
Ω_h^{tz}	3.2000e+01	6.2744e-09	3.5188e+00	5.4573e-07	1.0519e+00
	6.4000e+01	1.1663e-09	2.4275e+00	2.7287e-07	9.9998e-01
	1.2800e+02	2.9796e-10	1.9687e+00	1.3646e-07	9.9978e-01
	1.6000e+01	3.7242e-08	-	1.1051e-06	-
Ω_h^t	3.2000e+01	9.6923e-09	1.9420e+00	5.5435e-07	9.9534e-01
	6.4000e+01	2.4662e-09	1.9746e+00	2.7744e-07	9.9860e-01
	1.2800e+02	6.1952e-10	1.9931e+00	1.3875e-07	9.9965e-01

Tables 3.3 y 3.4 informan los errores en la norma L^2 y H^1- seminorma para las soluciones discretas calculadas con el esquema de elementos virtuales considerando **(CBC)** condiciones. Puede ser que el orden de convergencia para u esté de acuerdo con los resultados presentados en Proposición 3.4.5 y Teorema 3.4.6.

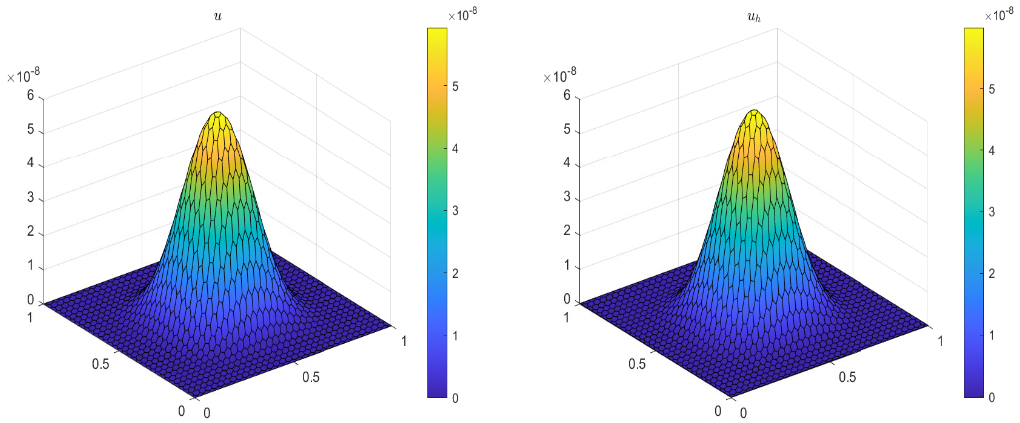

FIGURA 3.3: Soluciones exactas y aproximadas u y u_h para Test 3.5.2.

and the problem of clamped boundary conditions

$$\begin{aligned} -\Delta^3 u = f \quad \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \Delta^2 u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.57}$$

TABLA 3.3: Prueba 3: Errores y tasas de convergencia experimental $e_0^{\nabla}, e_1^{\nabla}$, y r_0^{∇}, r_1^{∇}, respectivamente, (cf. (3.55) y (3.56)) de la solución discreta al problema elíptico de sexto orden.

Ω_S	N	e_0^{∇}	r_0^{∇}	e_1^{∇}	r_1^{∇}
	1.6000e+01	1.8812e-09	-	2.2012e-08	-
Ω_h^s	3.2000e+01	1.7416e-10	3.4331e+00	1.0143e-08	1.1179e+00
	6.4000e+01	2.7103e-11	2.6839e+00	5.0349e-09	1.0104e+00
	1.2800e+02	6.1593e-12	2.1376e+00	2.5133e-09	1.0024e+00
	1.6000e+01	9.7184e-10	-	2.3407e-08	-
Ω_h^{hex}	3.2000e+01	2.6737e-10	1.9457e+00	1.0965e-08	1.1433e+00
	6.4000e+01	6.8457e-11	2.0098e+00	5.3468e-09	1.0594e+00
	1.2800e+02	1.7272e-11	2.0091e+00	2.6544e-09	1.0217e+00
	1.6000e+01	1.7846e-09	-	2.3260e-08	-
Ω_h^{tz}	3.2000e+01	1.7988e-10	3.3105e+00	1.1078e-08	1.0701e+00
	6.4000e+01	2.8931e-11	2.6364e+00	5.5346e-09	1.0012e+00
	1.2800e+02	6.5625e-12	2.1403e+00	2.7675e-09	9.9988e-01
	1.6000e+01	8.1698e-10	-	2.2436e-08	-
Ω_h^t	3.2000e+01	2.0093e-10	2.0236e+00	1.1271e-08	9.9322e-01
	6.4000e+01	5.0308e-11	1.9979e+00	5.6423e-09	9.9825e-01
	1.2800e+02	1.2587e-11	1.9988e+00	2.8220e-09	9.9957e-01

TABLA 3.4: Prueba 4: Errores y tasas de convergencia experimental $e_0^{\nabla}, e_1^{\nabla}$, y r_0^{∇}, r_1^{∇}, respectivamente, (cf. (3.55) y (3.56)) de la solución discreta al problema elíptico de sexto orden.

Ω_S	N	e_0^{∇}	r_0^{∇}	e_1^{∇}	r_1^{∇}
	1.6000e+01	2.8762e-09	-	3.3965e-08	-
Ω_h^s	3.2000e+01	2.6708e-10	3.4288e+00	1.5668e-08	1.1163e+00
	6.4000e+01	4.1797e-11	2.6758e+00	7.7775e-09	1.0104e+00
	1.2800e+02	9.5161e-12	2.1350e+00	3.8823e-09	1.0024e+00
	1.6000e+01	2.8762e-09	-	3.6149e-08	-
Ω_h^{hex}	3.2000e+01	2.6708e-10	3.4288e+00	1.6926e-08	1.1440e+00
	6.4000e+01	4.1797e-11	2.6758e+00	8.2520e-09	1.0598e+00
	1.2800e+02	9.5161e-12	2.1350e+00	4.0964e-09	1.0218e+00
	1.6000e+01	2.7067e-09	-	3.5892e-08	-
Ω_h^{tz}	3.2000e+01	2.7337e-10	3.3076e+00	1.7130e-08	1.0671e+00
	6.4000e+01	4.4518e-11	2.6184e+00	8.5588e-09	1.0011e+00
	1.2800e+02	1.0139e-11	2.1345e+00	4.2798e-09	9.9988e-01
	1.6000e+01	1.2632e-09	-	3.4705e-08	-
Ω_h^t	3.2000e+01	3.1112e-10	2.0215e+00	1.7435e-08	9.9315e-01
	6.4000e+01	7.7914e-11	1.9975e+00	8.7283e-09	9.9824e-01
	1.2800e+02	1.9496e-11	1.9987e+00	4.3654e-09	9.9957e-01

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Analizamos y aplicamos dos métodos de elementos virtuales para aproximar la solución de dos problemas de valores en la frontera usando el método de Ciarlet-Raviart, a saber: el problema de vibración de una placa delgada simplemente apoyada y modelada con las ecuaciones de Kirchhoff-Love; y un sistema de ecuaciones diferenciales parciales elípticas de sexto orden.

Inspirados en el método de Ciarlet-Raviart, las ecuaciones diferenciales de cuarto orden (2.1) que modelan la placa delgada de Kirchhoff-Love, son reescritas como un par de sistemas de EDP de segundo orden. Con lo cual, en la primera parte de este trabajo, se propuso un esquema de elementos virtuales libre de estabilización de tipo C^0 para aproximar el espectro del modelo de vibración de una placa delgada Kirchhoff-Love simplemente apoyada. Se establecieron óptimas estimaciones del error y órdenes de convergencia del método numérico desarrollado.

En la segunda parte del trabajo estudiamos el problema elíptico de sexto orden con dos tipos de condiciones de contorno: sujeta y simplemente apoyada. Aplicando una vez más los argumentos como en el método de Ciarlet-Raviart, para pasar de un sistema de ecuaciones de sexto orden a uno de cuarto orden. Se introdujo una incógnita auxiliar $w := \Delta u$ y se propuso una formulación débil en el espacio de Sobolev $H^2 \times H^1$. Se realizó un analisis riguroso de la convergencia del método usando una discretización de elementos virtuales $C^1 \times C^0$ para aproximar las soluciones de la formulación débil. Finalmente, se reportaron varios ejemplos numéricos que ilustran el óptimo rendimiento del método de elementos virtuales.

Trabajo futuro

1. Implementar computacionalmente el método numérico estudiado para el problema de vibración de una placa delgada.

2. Usar los códigos para resolver problemas de aplicación.

3. Derivar e implementar computacionalmente estimaciones de error a posteriori de los métodos numéricos desarrollados en esta tesis.

Bibliografía

[1] B. Ahmad y col. «Equivalent projectors for virtual element methods». En: *Comput. Math. Appl.* 66.3 (2013), págs. 376-391.

[2] P. F. Antonietti, G. Manzini y M. Verani. «The conforming virtual element method for polyharmonic problems». En: *Comput. Math. Appl.* 79.7 (2020), págs. 2021-2034.

[3] P. F. Antonietti y col. «A C^1 virtual element method for the Cahn-Hilliard equation with polygonal meshes». En: *SIAM J. Numer. Anal.* 54.1 (2016), págs. 34-56.

[4] Paola F. Antonietti y col. «A review on arbitrarily regular conforming virtual element methods for second- and higher-order elliptic partial differential equations». En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 31.14 (2021), págs. 2825-2853.

[5] Arthur S. Benson y J. Mayers. «General instability and face wrinkling of sandwich plates - Unified theory and applications.» En: *AIAA Journal* 5.4 (), págs. 729-739.

[6] Stefano Berrone, Andrea Borio y Francesca Marcon. «Lowest order stabilization free virtual element method for the poisson equation». En: *arXiv preprint arXiv:2103.16896* (2021).

[7] H. Blum y R. Rannacher. «On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners». En: *Math. Methods Appl. Sci.* 2.4 (1980), págs. 556-581.

[8] Susanne C Brenner, Peter Monk y Jiguang Sun. «C^0 interior penalty Galerkin method for biharmonic eigenvalue problems». En: *Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations–ICOSAHOM 2014*. Springer, 2015, págs. 3-15.

[9] Susanne C. Brenner y L. Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, New York, 2008.

[10] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.

[11] Franco Brezzi y L. Donatella Marini. «Virtual element methods for plate bending problems». En: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 253 (2013), págs. 455-462.

[12] Claudio Canuto. «A hybrid finite element method to compute the free vibration frequencies of a clamped plate». En: *RAIRO Anal. Numér.* 15.2 (1981), págs. 101-118.

[13] Shuhao Cao, Long Chen y Ruchi Guo. «A virtual finite element method for two-dimensional Maxwell interface problems with a background unfitted mesh». En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 31.14 (2021), págs. 2907-2936.

[14] Sun-Yung Alice Chang. «Conformal invariants and partial differential equations». En: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 42.3 (2005), págs. 365-393.

[15] Claudia Chinosi y L. Donatella Marini. «Virtual element method for fourth order problems: L^2-estimates». En: *Comput. Math. Appl.* 72.8 (2016), págs. 1959-1967.

[16] Philippe G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM, 2002.

[17] Philippe G Ciarlet y Pierre-Arnaud Raviart. «A mixed finite element method for the biharmonic equation». En: *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*. Elsevier, 1974, págs. 125-145.

[18] F. Dassi y L. Mascotto. «Exploring high-order three dimensional virtual elements: bases and stabilizations». En: *Comput. Math. Appl.* 75.9 (2018), págs. 3379-3401.

[19] F. Dassi y G. Vacca. «Bricks for the mixed high-order virtual element method: projectors and differential operators». En: *Appl. Numer. Math.* 155 (2020), págs. 140-159.

[20] C. W. Dekanski. *Design and analysis of propeller blade geometry using the PDE method. Ph.D. Thesis, University of Leeds*. 1993.

[21] Jérôme Droniou y col. «A mixed finite element method for a sixth-order elliptic problem». En: *IMA J. Numer. Anal.* 39.1 (2019), págs. 374-397.

[22] Gabriel N Gatica. *Introducción al Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones*. Reverté, 2014.

[23] Gabriel N. Gatica, Mauricio Munar y Filánder A. Sequeira. «A mixed virtual element method for a nonlinear Brinkman model of porous media flow». En: *Calcolo* 55.2 (2018), Paper No. 21, 36.

[24] Gabriel N. Gatica, Mauricio Munar y Filánder A. Sequeira. «A mixed virtual element method for the Navier-Stokes equations». En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 28.14 (2018), págs. 2719-2762.

[25] Filippo Gazzola, Hans-Christoph Grunau y Guido Sweers. *Polyharmonic boundary value problems*. Vol. 1991. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2010, págs. xviii+423.

[26] Vivette Girault y Pierre-Arnaud Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[27] Pierre Grisvard. *Elliptic Problems in Non-Smooth Domains*. Pitman, Boston, 1985.

[28] Thirupathi Gudi y Michael Neilan. «An interior penalty method for a sixth-order elliptic equation». En: *IMA J. Numer. Anal.* 31.4 (2011), págs. 1734-1753.

[29] Jianguo Huang, Ling Guo y Zhongci Shi. «Vibration analysis of Kirchhoff plates by the Morley element method». En: *J. Comput. Appl. Math.* 213.1 (2008), págs. 14-34.

[30] D. Lesnic. «On the boundary integral equations for a two-dimensional slowly rotating highly viscous fluid flow». En: *Adv. Appl. Math. Mech.* 1.1 (2009), págs. 140-150. ISSN: 2070-0733.

[31] Dan Liu y Guoliang Xu. «A general sixth order geometric partial differential equation and its application in surface modeling». En: *Journal of Information and Computational Science* 4 (), pág. 2007.

[32] Xin Liu, Rui Li y Zhangxin Chen. «A virtual element method for the coupled Stokes-Darcy problem with the Beaver-Joseph-Saffman interface condition». En: *Calcolo* 56.4 (2019), Paper No. 48, 28.

[33] VV Meleshko. «Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem». En: *Appl. Mech. Rev.* 56.1 (2003), págs. 33-85.

[34] Jian Meng y Liquan Mei. «A mixed virtual element method for the vibration problem of clamped Kirchhoff plate». En: *Adv. Comput. Math.* 46.5 (2020), Paper No. 68, 18. ISSN: 1019-7168.

[35] Felipe Millar y David Mora. «A finite element method for the buckling problem of simply supported Kirchhoff plates». En: *J. Comput. Appl. Math.* 286 (2015), págs. 68-78.

[36] David Mora, Gonzalo Rivera y Rodolfo Rodríguez. «A virtual element method for the Steklov eigenvalue problem». En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 25.8 (2015), págs. 1421-1445.

[37] David Mora, Gonzalo Rivera e Iván Velásquez. «A virtual element method for the vibration problem of Kirchhoff plates». En: *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* 52.4 (2018), págs. 1437-1456.

[38] David Mora y Rodolfo Rodríguez. «A piecewise linear finite element method for the buckling and the vibration problems of thin plates». En: *Math. Comp.* 78.268 (2009), págs. 1891-1917.

[39] Giuseppe Savaré. «Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains». En: *J. Funct. Anal.* 152.1 (1998), págs. 176-201.

[40] Giuseppe Vacca. «An H^1-conforming virtual element for Darcy and Brinkman equations». En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 28.1 (2018), págs. 159-194.

[41] L. Beirão da Veiga, F. Dassi y A. Russo. «A C^1 Virtual Element Method on polyhedral meshes». En: *Comput. Math. Appl.* 79.7 (2020), págs. 1936-1955.

[42] L. Beirão da Veiga, F. Dassi y G. Vacca. «The Stokes complex for virtual elements in three dimensions». En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 30.3 (2020), págs. 477-512.

[43] L. Beirão da Veiga, F. Dassi y G. Vacca. «Vorticity-stabilized virtual elements for the Oseen equation». En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 31.14 (2021), págs. 3009-3052.

[44] L. Beirão da Veiga y col. «Basic principles of virtual element methods». En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 23.1 (2013), págs. 199-214.

[45] L. Beirão da Veiga y col. «The hitchhiker's guide to the virtual element method». En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 24.8 (2014), págs. 1541-1573.

[46] Jikun Zhao y Bei Zhang. «The curl-curl conforming virtual element method for the quad-curl problem». En: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 31.8 (2021), págs. 1659-1690.