

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y ELECTRÓNICA



**EFFECTOS DEL PROTOCOLO DE SWAPPING Y OPERACIONES
LOCALES ESTOCÁSTICAS SOBRE PROPIEDADES CUÁNTICAS
INSPIRADAS EN ENTRELAZAMIENTO**

Pedro Pablo Rosario Vargas

Supervisor

Dr. Sc. Cristian Edwin Susa Quintero
Profesor Asociado, Dpto. Física y Electrónica, Universidad de Córdoba

Co-supervisor

MSc. Andrés Felipe Ducuara García
Candidato a Ph. D., Universidad de Bristol, Inglaterra

Montería, Diciembre, 2021

COLOMBIA

Dedicatoria

A mis padres y hermanos

Si las puertas de la percepción se depurasen, todo aparecería a los hombres como realmente es: infinito. Pues el hombre se ha encerrado en sí mismo hasta ver todas las cosas a través de las estrechas rendijas de su caverna

William Blake

Agradecimientos

Comienzo agradeciendo al profesor Cristian E. Susa Quintero quien me acompañó en todo mi proceso de formación y me enseñó el día a día del buen científico. De igual forma, le agradezco por todos los conocimientos y buenos hábitos transmitidos.

Agradezco a mi co-supervisor Andrés F. Ducuara de quien aprendí muchos conceptos y herramientas matemáticas durante la elaboración de este trabajo.

Agradezco al profesor Hector R. Maya quien me inspiró con una de sus clases a ingresar al programa de Física y descubrir la belleza de este.

Agradezco a mi Padre por el apoyo en todo este proceso . De igual forma, agradezco a mi Madre por darme la libertad de elegir y formar mi propia vertiente de pensamiento.

Agradezco al claustro de profesores del Departamento de Física de la Universidad de Córdoba, al igual que a mis compañeros de promoción por los buenos momentos vividos.

Finalmente, agradezco a la Universidad de Córdoba por su apoyo económico para mi intercambio académico en México en el año 2020. De igual forma, le agradezco por su apoyo económico parcial en el desarrollo de este trabajo bajo el proyecto FCB-08-19.

Contenido

Resumen	4
Introducción	5
I. Fundamentos	7
1.1. El qubit	7
1.2. Operador densidad y medidas	9
1.2.1. Medidas proyectivas	12
1.2.2. POVM	13
II. Correlaciones cuánticas	14
2.1. localidad de Bell y escenario (2,2,2)	14
2.2. ERP-steering	18
2.3. Utilidad para teletransportación	20
2.4. Entrelazamiento cuántico	21
2.5. Obesidad cuántica	22
III. Protocolo swapping y KLM-SLOCC	23
3.1. Protocolo swapping	23
3.2. KLM-SLOCC	27
3.2.1. KLM-SLOCC en la representación R	30
IV. Análisis de correlaciones bajo los efectos conjuntos de los protocolos swapping y KLM-SLOCC	31
4.1. Escenario 1: Estado inicial general en una de las fuentes y medidas de Bell	32
4.2. Escenario 2: Estado inicial general en ambas fuentes y medidas de Bell	37
4.2.1. El mismo estado en ambas fuentes	39
4.2.2. Dos estados diferentes con las mismas correlaciones	41
4.3. Escenario 3: Estados iniciales y medidas proyectivas generales	44

V. Análisis de obesidad cuántica bajo la influencia de los protocolos swapping y filtros locales	49
5.1. Resultado analítico para obesidad cuántica	49
5.2. Obesidad para estados tipo X luego de $F+S$ y $S+F$	52
5.2.1. Obesidad bajo el efecto conjunto swapping + KLM-SLOCC ($S+F$)	53
5.2.2. Obesidad bajo el efecto conjunto KLM-SLOCC + swapping ($F+S$)	56
5.2.3. Comparación de los factores $g(f_A, f_B, \rho_{AD})$ y $g(f'_A, f'_B, \rho_{AB})$ para estados tipo X	57
5.3. Cálculo explícito de los estados después de $F+S$ y $S+F$ para estados iniciales tipo X	61
VI. Conclusiones	66
A. Swapping entre estados Bell diagonal	69
B. Swapping entre estados tipo X	70
C. KLM-SLOCC para estados tipo X	72
Referencias	73

Lista de Abreviaturas

Nombre	Abreviatura
Clauser, Horne, Shimony y Holt	CHSH
swapping + KLM-SLOCC	S+F
Estado inicial	IS
Estado después del swapping	PSS
Estado después del filtro	PFS
Estado después del proceso swapping + KLM-SLOCC	PSFS
Estado después del proceso KLM-SLOCC + swapping	PFSS
Estado después del proceso KLM-SLOCC + swapping	PFSS
Einstein, Podolsky y Rosen	EPR
KLM-SLOCC + swapping	F+S
Kent, Linden y Massar	KLM
Local hidden variable	LHV
Local hidden state	LHS
Positive operator valued measure	POVM
Stochastic local operation and classical communication	SLOCC
Usefulness for teleportation	UFT

Resumen

El protocolo de swapping es un proceso que permite activar las correlaciones cuánticas en un par de partículas que inicialmente no presentaban ninguna correlación. Por otro lado, los KLM-SLOCC son un grupo selecto de las SLOCC (stochastic local operations and classical communication) que toman a un estado y lo llevan a su forma máximamente correlacionada, es decir, a su forma Bell diagonal. Hasta la fecha, el protocolo de swapping y las KLM-SLOCC han sido estudiadas por separado y por ende, uno de los propósitos de este trabajo es combinar ambas herramientas y evaluar qué combinación de protocolos; swapping + KLM-SLOCC ó KLM-SLOCC + swapping optimiza el comportamiento de las correlaciones cuánticas. De igual forma, en el transcurso del documento daremos prioridad a una correlación cuántica introducida recientemente denominada “Obesidad” que ha demostrado ser menos restrictiva que el entrelazamiento y está directamente relacionada con el volumen del elipsoide de steering. En este trabajo, presentamos primeramente tres resultados analíticos para el protocolo swapping organizados de forma constructiva. En el primero mostramos que la no-localidad de Bell, EPR-steering, utilidad para teletransportación, entrelazamiento y obesidad cuántica de un estado bipartito son conservadas cuando se lleva a cabo el protocolo swapping entre este estado y uno de la base de Bell, en el segundo se muestra el protocolo swapping entre dos estados generales al proyectar en uno de los elementos de la base de Bell y en el tercero mostramos de forma analítica el protocolo swapping entre dos estados generales al utilizar un conjunto de medidas genelares. Posteriormente y en base a los resultados anteriores mostramos un análisis del comportamiento de las correlaciones cuánticas bajo los procesos S+F y F+S, donde por medio de simulaciones numéricas para diversos estados pudimos notar que el proceso F+S optimiza mejor las correlaciones cuánticas. Finalmente, en el segundo capítulo de resultados mostramos una expresión analítica general para la obesidad cuántica del estado resultante del protocolo swapping al utilizar un conjunto de medidas generales. Seguidamente, utilizando estados tipo X mostramos que la obesidad cuántica de los estados resultantes del proceso F+S es mayor a la obesidad de los estados resultantes del proceso S+F. Este último hecho es demostrado gráficamente por medio de simulaciones numéricas para 10^6 estados tipo X aleatorios.

Introducción

El estudio de propiedades cuánticas ha sido en las últimas décadas un tema vital para el desarrollo de futuras tecnologías. El gran interés por entenderlas y manipularlas surge debido al alto impacto que están empezando a tener en diversos campos como el internet de las cosas (IoT), inteligencia artificial, ciberseguridad, entre otras. Recientemente un estudio publicado por el Banco Interamericano de Desarrollo muestra como los países desarrollados tales como China, la Unión Europea, Estados Unidos y otros están invirtiendo en la creación de centros especializados en información y tecnologías cuánticas [1]. Por tanto, es conveniente entender el comportamiento de los sistemas atómicos y las correlaciones que se forman entre ellos para tratar de aprovechar las extrañezas de la mecánica cuántica y llevar a cabo tareas que la tecnología clásica actual no puede realizar. Por otro lado, el envío de información cuántica a través de canales clásicos de un lugar a otro ha resultado ser un reto debido a que las correlaciones cuánticas disminuyen en función de la distancia [2], por ende, es indispensable encontrar los mejores mecanismos que permitan optimizar las correlaciones, y en general, las propiedades cuánticas de los sistemas físicos en el dominio cuántico.

Las correlaciones cuánticas han tenido un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de la información cuántica y de las hoy conocidas tecnologías cuánticas en las últimas décadas. Esto se debe al hecho de que dos partículas correlacionadas cuánticamente, permiten el intercambio de información entre ellas de una forma sin análogo clásico. No obstante, en el mundo real el manejo de las correlaciones cuánticas no es tarea fácil, debido a que la mera interacción de los sistemas cuánticos con el ambiente podría en principio provocar una pérdida de las correlaciones tal que en un tiempo finito estas tiendan a desaparecer [3]. Por tal motivo, ha surgido en el transcurso de los años formas de evitar la decoherencia de los sistemas llevando a cabo operaciones que permitan la preservación, y en ocasiones el aumento de las correlaciones. Un ejemplo de estas operaciones son purificación cuántica y repetidores cuánticos [4, 5]. La primera consiste en tomar un grupo de estados y sacar de ellos un sub-grupo menor de estados con mayor entrelazamiento y pureza, el segundo consiste en potenciar la transmisión de correlaciones a largas distancias [6]. Sin embargo, las operaciones anteriores no son las únicas que podrían provocar un aumento en las correlaciones de los sistemas cuánticos; varios autores han probado que dos partículas que inicialmente no están correlacionadas, pueden resultar en un estado cuántico entrelazado después de pasar por el protocolo de swapping (ver por ejemplo,

[7]). Por otro lado, también ha sido demostrado que el uso de operaciones locales estocásticas y comunicación clásica (SLOCC por sus siglas en Inglés) puede en algunos escenarios inducir el aumento en las correlaciones como la *no-localidad* de Bell (Bell nonlocality) y la *direccionalidad* cuántica (EPR-steering) (ver por ejemplo, [8, 9], para más detalles).

Debido a lo anterior, en este trabajo nos enfocamos en analizar el comportamiento de las correlaciones cuánticas tales como no-localidad de Bell, EPR-steering, utilidad para teletransportación, entrelazamiento y obesidad cuántica bajo la acción conjunta del protocolo swapping y los filtros locales óptimos, con el fin de determinar qué proceso las optimiza. Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo I se presenta los fundamentos y herramientas matemáticas para el desarrollo del trabajo, en el Capítulo II se presenta la descripción y respectivas métricas de las correlaciones cuánticas utilizadas en este estudio, en el Capítulo III se presenta la definición del protocolo swapping y las denominadas KLM-SLOCC. Por otro lado, en los Capítulos IV y V se presentan los principales resultados de este trabajo; 8 en total. Finalmente en el Capítulo VI presentamos las conclusiones de acuerdo a los objetivos planteados. También, se presentan los productos relacionados a la ejecución de este trabajo. Algunos cálculos intermedios y demostraciones se dejan en los Anexos A-C.

Capítulo I

Fundamentos

En este capítulo realizamos una breve revisión de los fundamentos y herramientas matemáticas más usadas en este trabajo de grado. Comenzando con la medida mínima de información en teoría de información cuántica, seguidamente introducimos los grupos especiales de operadores de medida proyectivas y POVM en conjunto con las propiedades que debe cumplir un estado cuántico para tener sentido físico.

1.1. El qubit

En la teoría clásica de la información John Wilder Tukey introdujo el término de *bit* para referirse a un sistema binario que puede tomar dos posibles valores 0 o 1, tales valores pueden representar acciones opuestas por ejemplo “encendido” y “apagado”, respectivamente. Por otra parte, en la teoría de la información cuántica la unidad mínima de información es representada por un *qubit* (quantum bit) y a diferencia del *bit* clásico puede tomar dos posibles valores al mismo tiempo siguiendo las reglas probabilísticas de la mecánica cuántica. Por lo tanto, el *qubit* representa un sistema 2-dimensional, cuyo estado cuántico puede escribirse como una superposición o combinación lineal de una base ortonormal. En particular, la base estándar o computacional utilizada es $\{|0\rangle; |1\rangle\}$, y el estado puede escribirse como [10]:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.1)$$

donde α y β son números complejos y representan las amplitudes de probabilidad y sus cuadrados $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ son la probabilidad de que el *qubit* esté en el estado base $|0\rangle$ o $|1\rangle$ respectivamente. Por lo tanto, deben cumplir que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Debido a la condición de normalización es posible escribir de forma general el estado de un

qubit Ec. (1.1) de la siguiente forma

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (1.2)$$

donde $e^{i\gamma}$ es una fase global y no tiene efectos observables sobre el sistema. Por otro lado, los parámetros $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$ definen a los *qubits* como puntos sobre una esfera, conocida como esfera de Bloch¹. En esta representación geométrica los estados base $|0\rangle$ y $|1\rangle$ están ubicados en los polos de la esfera, es decir, antiparalelos.

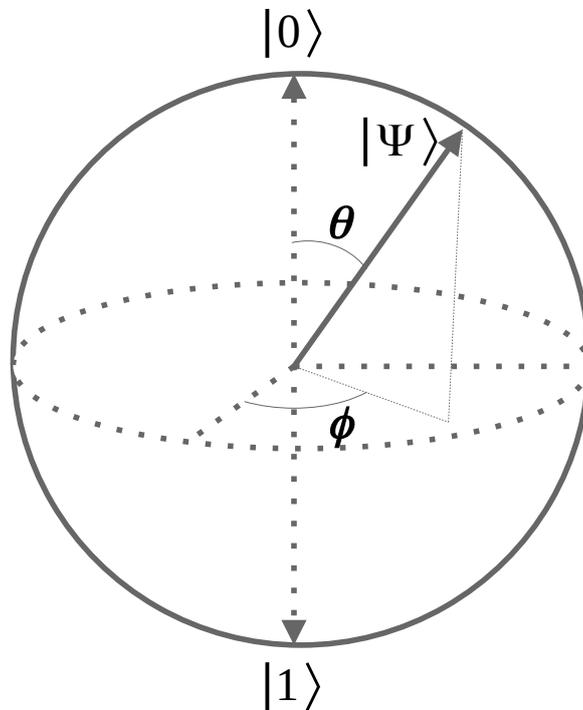


Figura 1.1: Representación del *qubit* como un vector en la esfera de Bloch

Se observa en la Fig. 1.1 que el *qubit* puede tomar infinitos valores como una superposición de los vectores base $|0\rangle$ y $|1\rangle$. De igual forma, en esta representación geométrica las operaciones unitarias sobre el vector *qubit* se interpretan como rotaciones del vector de un punto a otro de la esfera de Bloch.

¹Felix Bloch - (Zúrich, Suiza, 23 de octubre de 1905 - 10 de septiembre de 1983) fue un físico suizo que trabajó en energía nuclear en el Laboratorio Nacional de Los Álamos y que obtuvo el Premio Nobel de Física en 1952.

1.2. Operador densidad y medidas

El formalismo de operador densidad, es una forma equivalente de representar a los estados cuánticos. A diferencia de un vector estado, el operador densidad nos da información extra del sistema, por ejemplo, del operador densidad podemos obtener el comportamiento de las coherencias cuánticas, las cuales son el distintivo entre un estado cuántico y uno clásico. De forma general, un operador densidad se puede escribir como la descomposición convexa $\{p_i, \rho_i\}$, es decir,

$$\rho := \sum_i p_i \rho_i, \quad (1.3)$$

donde p_i representa la probabilidad de que ρ esté en el estado ρ_i . Por lo tanto, decimos que un estado es puro cuando alguna de las probabilidades p_i es igual a uno, esto implica que nuestro estado ρ solo admite una descomposición convexa. Por el contrario, cuando tenemos que nuestro estado ρ es la suma ponderada de la Ec. (1.3) entonces decimos que ρ es un estado mezclado. Por otro lado, si A y B son dos sub-sistemas con espacios de Hilbert H_A y H_B y dimensiones d_A y d_B respectivamente. Entonces, un sistema compuesto bipartito estará descrito por una matriz densidad ρ_{AB} perteneciente al espacio resultante del producto tensorial entre los sub-sistemas $H_{AB} = H_A \otimes H_B$, de ahí que un estado compuesto de dos partes o más puede estar inmerso en los siguientes dos escenarios: el primero radica en que si ρ_{AB} se puede escribir como la descomposición convexa $\{p_i, \mu_i \otimes \phi_i\}$ es decir,

$$\rho_{AB} := \sum_i p_i \mu_i \otimes \phi_i, \quad (1.4)$$

donde $\mu_i \in H_A, \phi_i \in H_B$ son estados locales de Alice y Bob respectivamente. En este caso decimos que el estado de la Ec. (1.4) es un estado separable. Similarmente, el segundo escenario radica en que si ρ_{AB} no se puede escribir como la descomposición convexa $\rho_{AB} \neq \{p_i, \mu_i \otimes \phi_i\}$ entonces es entrelazado y puede presentar otro tipo de correlaciones que no admiten un modelo de variables locales. Un ejemplo de estos estados son los denominados estados de Bell

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle \pm |01\rangle), \quad (1.5)$$

Por otra parte, cuando es necesario deshacernos de una de las partes de un sistema compuesto. Por ejemplo, si tenemos un sistema bipartito compartido entre Alice y Bob podemos utilizar un método denominado traza parcial para quedarnos con el estado local de Alice o de Bob simplemente.

Sea entonces el sistema bipartito ρ_{AB} un estado mezclado, si queremos el estado local de Alice

tenemos entonces que

$$\rho_A = \text{Tr}_B [\rho_{AB}].$$

Similarmente para obtener el estado local de Bob

$$\rho_B = \text{Tr}_A [\rho_{AB}].$$

Este mismo procedimiento puede extenderse para sistemas de mayor dimensión y es la base del teorema de purificación (ver [10] para más detalles).

Un operador densidad como el presentado en (1.3) debe cumplir las siguientes condiciones para que represente un estado físico, $\text{Tr} [\rho] = 1$ y $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \forall \psi$, condición de traza unitaria y positividad respectivamente. Similarmente, un estado ρ es puro si $\text{Tr} [\rho^2] = 1$, de lo contrario decimos que ρ es mezclado.

Por otro lado, podemos utilizar la representación de Bloch para escribir el estado de un qubit $\in H_A$ general en su representación de matriz densidad.

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 r_i \sigma_i \right), \quad (1.6)$$

donde r_i representa las tres componentes del denominado vector de Bloch \vec{r} para un qubit y σ_i las matrices de Pauli (mostradas en Ec. (1.7)). Otro hecho importante es que la representación geométrica de \vec{r} puede observarse en la Fig. 1.1 y sus componentes pueden obtenerse como $r_i = \text{Tr} [\rho \sigma_i]$ (ver [11]) para más detalles).

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

De igual forma, un estado compuesto de dos qubits $\in H_A \otimes H_B$ se puede escribir en términos de la denominada representación de Bloch

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^A \otimes \mathbb{1}^B + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}^A \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes \vec{b} \cdot \vec{\sigma}^B + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \right), \quad (1.8)$$

donde \vec{a} y \vec{b} son vectores locales de Bloch para Alice y Bob respectivamente, con sus componentes dadas por $a_i = \text{Tr} [\rho_{AB}(\sigma_i \otimes \mathbb{1})]$, $b_i = \text{Tr} [\rho_{AB}(\mathbb{1} \otimes \sigma_i)]$. En esta representación, $\vec{\sigma}$ representa el vector de las matrices de Pauli ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) y la matriz T es cuadrada de dimensión 3 con componentes dadas por $T_{ij} = \text{Tr} [\rho_{AB}(\sigma_i \otimes \sigma_j)]$ y se denominada la matriz de correlación dado que la información de las correlaciones cuánticas de ρ_{AB} está contenida en ella.

Similarmente, otra forma equivalente de escribir la matriz densidad para estados de dos qubits utilizando la base homogénea de Pauli $\{\sigma_i\}_{i=0}^3$ con $\sigma_0 = \mathbb{1}$ es dada por

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \sum_{i,j} R_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

donde R es una matriz cuadrada de dimensión 4 dada por

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \vec{b}^T \\ \vec{a} & T \end{pmatrix},$$

y sus componentes pueden ser encontradas como $R_{i,j} = \text{Tr} [\rho_{AB}(\sigma_i \otimes \sigma_j)]$ con $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ [11].

Las transformaciones de estados cuánticos se pueden entender como la acción de operadores sobre dichos estados. Por ejemplo, en el caso de estados puros, dado un operador A unitario, el estado después de la acción de A sobre el estado $|\psi\rangle$, es: $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$. Para un estado mezclado de la forma $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ el resultado de la acción de A se escribe como: $\rho' = A \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| A^\dagger$

Una clase de operadores de gran interés en el estudio de los sistemas cuánticos, es el de operadores de medida M . Así, si realizamos una medida descrita por el conjunto de operadores $\{M_m\}$, con valores de salida $m = 1, 2, \dots, k$, sobre el ensamble de estados puros $\rho = \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. La probabilidad de obtener la salida m para un estado particular $|\psi_i\rangle$ del ensamble, es

$$p(m|i) = \langle\psi_i| M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle = \text{Tr} [M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle\langle\psi_i|]$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener m para todo el ensamble de estados será

$$p(m) = \sum_i p_i p(m|i) = \sum_i p_i \text{Tr} [M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle\langle\psi_i|] = \text{Tr} [M_m^\dagger M_m |\psi\rangle\langle\psi|]$$

Donde $\rho = \sum_i p_i \rho_i = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = |\psi\rangle\langle\psi|$, lo cual conlleva a que

$$p(m) := \text{Tr} [M_m^\dagger M_m \rho]. \quad (1.10)$$

De ahí que, si el estado inicial es $|\psi_i\rangle$ entonces el estado después de obtener el resultado m estará dado por

$$|\psi_i^m\rangle := \frac{M_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle\psi_i| M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle}}$$

Luego de las mediciones, se genera un ensamble de estados de la forma $\{p(i|m), |\psi_i^m\rangle\}_{i=1}^n$. Por

lo tanto, en la representación de matriz densidad ρ_m estará dado por

$$\rho_m := \sum_i p(i|m) |\psi_i^m\rangle\langle\psi_i^m| = \sum_i p(i|m) \frac{M_m |\psi_i\rangle\langle\psi_i| M_m^\dagger}{\langle\psi_i| M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle}$$

Utilizando la propiedad $p(i|m) = p(m, i)/p(m) = p(m|i)p_i/p(m)$ obtenemos que ρ_m toma la forma

$$\rho_m := \sum_i p_i \frac{M_m |\psi_i\rangle\langle\psi_i| M_m^\dagger}{p(m)}$$

Finalmente, utilizando la Ec. (1.10) y $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ obtenemos

$$\rho_m := \frac{M_m^\dagger \rho M_m}{\text{Tr} [M_m^\dagger M_m \rho]}, \quad (1.11)$$

donde la Ec. (1.11) representa la forma de llevar a cabo una medida en el formalismo de operador densidad (ver [10] para más detalles). En base a lo anterior, es importante resaltar que hay dos casos importantes en el proceso de medida, uno de ellos es el caso de medidas proyectivas y el otro es el operador de valor positivo de medida (POVM por sus siglas en inglés).

1.2.1. Medidas proyectivas

Este grupo especial son conocidos como *medidas proyectivas* dado que proyectan el estado de un sistema ρ en la “dirección” de otro estado δ . Por lo tanto, una medida proyectiva es descrita por un *observable* hermítico M que tiene descomposición espectral

$$M = \sum_m m \Pi_m, \quad (1.12)$$

donde m son los valores propios de M y Π_m el proyector asociado de m en el espacio propio de M . Entonces, al medir un estado $|\psi\rangle$ la probabilidad de obtener m estará dada por

$$p(m) = \langle\psi| \Pi_m |\psi\rangle$$

y el estado resultante inmediatamente después de la medida será

$$|\psi^m\rangle = \frac{\Pi_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}, \quad (1.13)$$

donde los proyectores deben cumplir la relación de completéz mencionada anteriormente para medidas generales, además deben cumplir la relación de ortogonalidad dada por [10]

$$M_m M_{m'} = \delta_{m,m'} M_m. \quad (1.14)$$

1.2.2. POVM

En ocasiones obtener el estado resultante de una medida M_m no es de gran interés, dado que hay experimentos donde solo podemos realizar una medida. Por ende, en estos casos es de mayor prioridad calcular la probabilidad de obtener un estado en específico luego de una medida M_m . Para poder calcular esa probabilidad existe un formalismo denominado POVM (positive operator valued measure).

Supongamos que una medida M_m es aplicada a un sistema en el estado $|\psi\rangle$. Entonces, la probabilidad de obtener m estará dada por

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle, \quad (1.15)$$

por lo cual definimos $E_m = M_m^\dagger M_m$ como un operador positivo tal que $\sum_m E_m = \mathbb{1}$, por lo tanto $p(m) = \langle \psi | E_m | \psi \rangle$. De modo que, podemos decir que E_m es un grupo de operadores suficiente para determinar las probabilidades de los diferentes resultados de las medidas. Entonces, el operador E_m es el elemento de POVM asociado a una medida M_m . De ahí que, el grupo completo $\{E_m\}$ es conocido como POVM.

Por otro lado, si consideramos medidas proyectivas de la forma Π_m como las presentadas en Ec. (1.12) tal que $\sum_m \Pi_m = \mathbb{1}$ y $\Pi_m \Pi_{m'} = \delta_{m,m'} \Pi_m$, entonces para este caso y solo este caso los elementos del POVM son iguales a la medida, es decir

$$E_m = \Pi_m^\dagger \Pi_m = \Pi_m, \quad (1.16)$$

por lo tanto $\{E_m\} = \{\Pi_m\}$ (ver [10] para más detalles)

Capítulo II

Correlaciones cuánticas

Las correlaciones cuánticas son una propiedad intrínseca de los sistemas de dos cuerpos o más, las cuales han sido la base del desarrollo de la teoría de la información y tecnologías cuánticas. De igual forma, la extrañeza de estas correlaciones ha permitido el desarrollo de protocolos como el de teletransportación, el cual permite teletransportar el estado de una partícula de un lugar a otro, lo cual es algo impensable en la teoría clásica. Similarmente, el desarrollo de la hoy conocida computación cuántica se debe a las ventajas computacionales que las correlaciones cuánticas como el entrelazamiento y no-localidad de Bell tienen sobre los sistemas clásicos actuales (ver [12] para más detalles). En la Fig. 2.1 se muestra la jerarquía de las correlaciones utilizadas para el desarrollo de este trabajo.

2.1. localidad de Bell y escenario (2,2,2)

Decimos que un estado cuántico multipartito (i.e., compuesto por dos o más subsistemas) es local cuando sus correlaciones cuánticas pueden ser reproducidas por medio de variables locales ocultas (LHV) en cada uno de sus sub-sistemas locales. Anteriormente se pensaba que el entrelazamiento era una señal directa de no-localidad, aunque Werner en su artículo seminal [13] propuso un grupo de estados que siendo entrelazados no violaban las desigualdades de Bell propuestas 20 años antes [9]. En la actualidad, se sabe que la no-localidad es la correlación más restrictiva entre la clasificación existente.

Probar que un estado es local es uno de los más grandes retos que ha motivado innumerables desarrollos teóricos (ver por ejemplo [14, 15, 16, 17]) debido a que cuando se habla de localidad hay que tener cuidado del escenario en el cual estamos trabajando, es decir, el número de partículas, el número de medidas y el número de salidas por medida que lo define. Basados en este hecho, la desigualdad CHSH está desarrollada bajo el escenario (2, 2, 2) es decir, dos partículas, dos medidas (una por partícula) y dos posibles salidas por medida (ver Fig. 2.2).

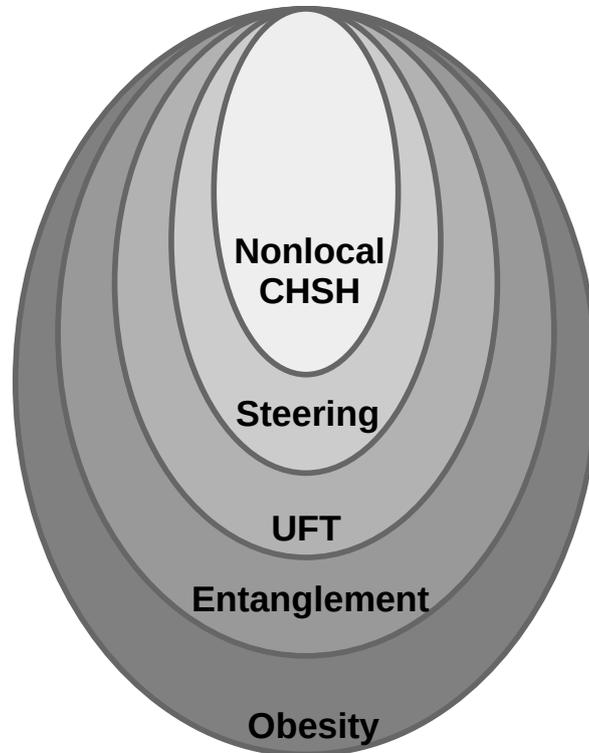


Figura 2.1: Jerarquía de las correlaciones cuánticas utilizadas para el desarrollo de este trabajo. Las correlaciones están ubicadas de acuerdo a su grado de restrictividad, siendo la más restrictiva la no-localidad de Bell (nonlocal CHSH para escenario $(2, 2, 2)$).

De acuerdo con el resultado presentado en 1969 por Clauser, Horne, Shimony y Holt (CHSH) [18] es posible construir un experimento para verificar si la teoría cuántica es o no consistente con una teoría de variables ocultas (LHV).

Consideremos el esquema mostrado en la Fig. 2.2 donde Alice y Bob están lo suficientemente separados tal que no pueda haber interacción entre ellos. Cada uno posee dos observables A_x y B_y los cuales realizan mediciones en las direcciones \hat{a} y \hat{b} , el montaje es tal que pueden haber solo dos salidas posibles de signo opuesto $\{1, -1\}$. A cada parte se le envían dos partículas idénticas que provienen de la misma fuente.

Supongamos que la correlación entre las mediciones de Alice $A(\hat{a})$ y las de Bob $B(\hat{b})$ es debido a la información llevada y localizada en las partículas, y que, en algún momento del pasado estas interactuaron. Esta información localizada no es cuántica y depende exclusivamente de

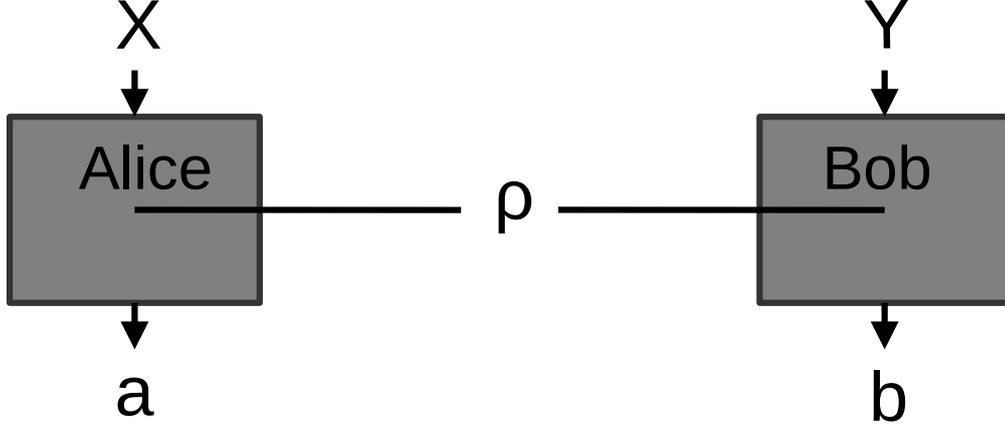


Figura 2.2: Esquema estandar del test de Bell: Alice y Bob comparten un estado entrelazado ρ , cada individuo por separado lleva a cabo medidas locales $\{M_{a|x}^A\}$ y $\{M_{b|y}^B\}$ que dependen de las entradas clásicas $\{x, y\}$, finalmente obtienen como resultado $\{a, b\}$ respectivamente. Por otro lado, la regla de Born nos dice que la probabilidad de obtener a y b dados x y y esta dada por $p(ab|xy) = \text{Tr} [(M_{a|x}^A \otimes M_{b|y}^B)\rho]$.

variables ocultas, las cuales son denotadas por λ . Por lo tanto, los resultados de la medición estarán dados por $A(\hat{a}, \lambda)$ y $B(\hat{b}, \lambda)$. Adicionalmente se requiere que la medida $A(\hat{a}, \lambda)$ no dependa de la dirección \hat{b} de Bob y que la medida $B(\hat{b}, \lambda)$ no dependa de la dirección \hat{a} de Alice. Por lo tanto, dado que el ajuste \hat{a} y \hat{b} es independiente de la generación de las partículas, la distribución de probabilidad que caracteriza al sistema $\rho(\lambda)$ es netamente dependiente de λ .

Se define entonces $\langle A(\hat{a}, \lambda) \rangle$ y $\langle B(\hat{b}, \lambda) \rangle$ como el promedio de las medidas y se define la función de correlación como

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) \langle A(\hat{a}, \lambda) \rangle \langle B(\hat{b}, \lambda) \rangle.$$

Por lo tanto, sabiendo que \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} y \hat{d} son diferentes configuraciones para los detectores

$$P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{d}) = \int d\lambda \rho(\lambda) \left[\langle A(\hat{a}, \lambda) \rangle \langle B(\hat{b}, \lambda) \rangle \left(1 \pm \langle A(\hat{c}, \lambda) \rangle \langle B(\hat{d}, \lambda) \rangle \right) \right] \\ - \int d\lambda \rho(\lambda) \left[\langle A(\hat{a}, \lambda) \rangle \langle B(\hat{d}, \lambda) \rangle \left(1 \pm \langle A(\hat{c}, \lambda) \rangle \langle B(\hat{b}, \lambda) \rangle \right) \right].$$

De a quí se obtiene que

$$\left| P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{d}) \right| = \int d\lambda \rho(\lambda) \left(2 \pm \langle A(\hat{c}, \lambda) \rangle \langle B(\hat{d}, \lambda) \rangle \pm \langle A(\hat{c}, \lambda) \rangle \langle B(\hat{b}, \lambda) \rangle \right).$$

Luego

$$\begin{aligned} \left| P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{d}) \right| &\leq 2 \pm \left(P(\hat{c}, \hat{b}) + P(\hat{c}, \hat{d}) \right) + \left| P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{d}) \right| \\ &\quad + \left| P(\hat{c}, \hat{b}) + P(\hat{c}, \hat{d}) \right| \leq 2. \end{aligned}$$

Finalmente utilizando la desigualdad triangular obtenemos

$$-2 \leq P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{d}) + P(\hat{c}, \hat{b}) + P(\hat{c}, \hat{d}) \leq 2$$

La cual corresponde a la famosa desigualdad CHSH.

Actualmente, la forma mas usual de expresarla es como sigue

$$S = |E_{11} + E_{12} + E_{21} - E_{22}| \leq 2, \quad (2.1)$$

donde E_{ij} representan los valores esperador obtenidos en el experimento.

$$E_{ij} = \text{Tr} [\rho (A_i \otimes B_j)] \quad i, j = 1, 2.$$

Donde los observables $A_x = (+1)M_{1|x}^A + (-1)M_{-1|x}^A$ y $B_y = (+1)M_{1|y}^B + (-1)M_{-1|y}^B$ tienen valores propios ± 1 . Por lo tanto, si la desigualdad (2.1) se cumple el sistema completo admite una descripción en términos de variables ocultas λ en el escenario $(2, 2, 2)$ donde $a, b \in \{+1, -1\}$, de lo contrario estaríamos hablando de un sistema que no admite descripción tipo Bell-local bajo el escenario $(2, 2, 2)$ (ver [19] para más detalles)

Para llevar a cabo los cálculos de este trabajo utilizaremos la medida normalizada de CHSH dada por [20]

$$B(\rho) = \text{máx} \{0, s_1^2 + s_2^2 - 1\}, \quad (2.2)$$

donde s_1, s_2 son los dos valores singulares más grandes de la matriz de correlación del estado bipartio ρ en cuestión. De igual forma, decimos que un estado viola CHSH cuando

$$s_1^2 + s_2^2 > 1.$$

2.2. ERP-steering

La noción de EPR-steering fue inicialmente introducida por Schrödinger como una respuesta a la aparente paradoja de Einstein, Podolsky and Rosen (EPR) [21]. El concepto de EPR-steering, se refiere al hecho de que si Alice y Bob comparten un estado entrelazado, entonces una medida local efectuada por Bob sobre su estado local puede “dirigir” el posible estado resultante local de Alice tal y como se muestra en la Fig. 2.3.

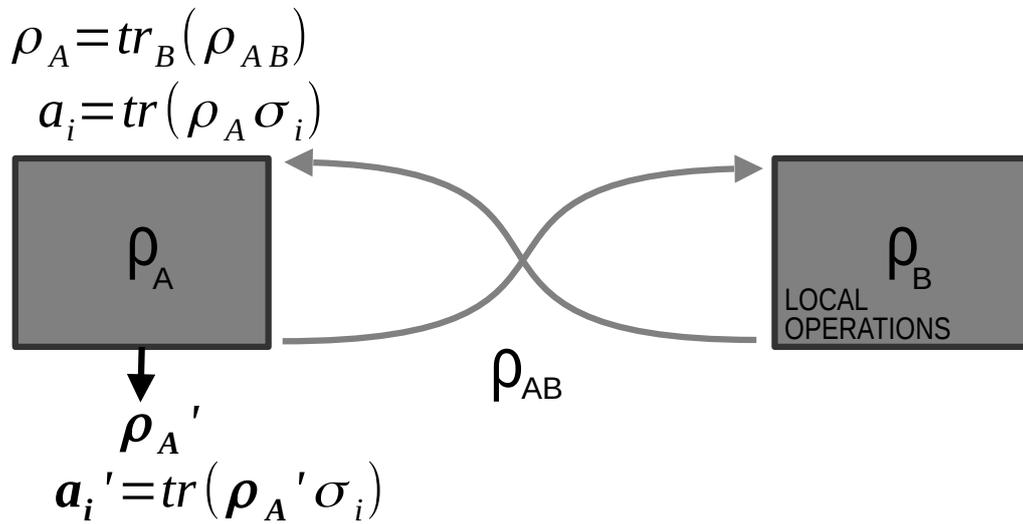


Figura 2.3: Cuando Alice y Bob comparten un estado bipartito de la forma ρ_{AB} , entonces medidas locales de Bob “dirigen” el posible estado local de Alice de ρ_A a $\rho_{A'}$.

Consideremos entonces que Alice y Bob comparten un estado bipartito de la forma

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 R_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j,$$

con

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \vec{b}^T \\ \vec{a} & T \end{pmatrix}.$$

Entonces si Bob aplica un POVM y obtiene como salida de su estado local $\rho_B' = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 r_k \sigma_k$ donde r es un vector de cuatro componentes dadas por $(1 \ \vec{x})$, con \vec{x} siendo el vector de Bloch

asociado de ρ'_B . Por lo tanto, el estado “dirigido” de Alice estará dado por

$$\begin{aligned}
\rho'_A &\propto \text{Tr}_B [\rho_{AB}(\mathbb{1} \otimes \rho'_B)], \\
&= \text{Tr}_B \left[\frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 R_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \left(\mathbb{1} \otimes \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 r_k \sigma_k \right) \right], \\
&= \frac{1}{8} \text{Tr}_B \left[\sum_{i,j=0}^3 \sum_{k=0}^3 R_{ij} r_k \sigma_i \otimes \sigma_j \sigma_k \right], \\
&= \frac{1}{8} \sum_{i,j=0}^3 \sum_{k=0}^3 R_{ij} r_k \sigma_i 2\delta_{jk} = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 R_{ij} r_j \sigma_i.
\end{aligned}$$

El factor de normalización del estado ρ'_A estará dado por

$$\text{Tr}_A \left[\frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 R_{ij} r_j \sigma_i \right] = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 R_{ij} r_j 2\delta_{0i} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 R_{0j} r_j = \frac{1}{2} (1 + \vec{b} \cdot \vec{x}),$$

donde \vec{b} es el vector de Bloch local de Bob y \vec{x} es el vector de Bloch local de Bob después de aplicar el POVM sobre su estado local ρ_B . Por lo tanto, el estado “dirigido” por Bob a Alice estará dado finalmente por (ver [22] para más detalles)

$$\rho'_A = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \frac{R_{ij} r_j}{1 + \vec{b} \cdot \vec{x}} \sigma_i. \quad (2.3)$$

Por otra parte, decimos que el estado de Alice fue “dirigido” por Bob si ρ'_A no admite una representación por medio de variables locales para todas las posibles salidas de los POVM de Bob $M_{i|j}$. Es decir, ρ'_A no puede escribirse de la forma

$$\rho'_A{}^{(i|j)} = \sum_{\lambda} p_{\lambda} p_{i|j,\lambda} \phi_{\lambda}, \quad (2.4)$$

donde ϕ_{λ} representa un estado local oculto (LHS) para Alice y $p_{\lambda}, p_{i|j,\lambda}$ distribuciones de probabilidad que dependen de una variable oculta λ (LHV).

Para el desarrollo de este trabajo, utilizaremos la medida normalizada de EPR-steering [20]

$$BF_3(\rho) = \max \left\{ 0, \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 1}{2} \right\}, \quad (2.5)$$

donde s_1, s_2, s_3 representan los valores singulares de la matriz de correlación del estado bipartito ρ en cuestión.

2.3. Utilidad para teletransportación

En 1993 Bennett *et.al* introdujeron un nuevo aspecto involucrado con la inseparabilidad de los sistemas cuánticos bipartitos, denominado *teletransportación cuántica* [23]. Este hecho consiste en utilizar sistemas cuánticos singletes como medio para reconstruir un estado $|\phi\rangle$ en un lugar diferente con fidelidad igual a uno.

Por lo tanto, si Alice y Bob comparten un single EPR $|\psi^\pm\rangle$ o $|\Phi^\pm\rangle$ (Ec. (1.5)) y además Alice tiene un sistema de dos niveles extra $|\phi\rangle$ que quiere enviar a Bob, entonces Alice realiza medidas proyectivas conjuntas tipo Bell sobre sus dos partículas, la partícula desconocida $|\phi\rangle$ y la partícula que comparte con Bob por medio del singlete EPR. Luego de este proceso, Alice envía el resultado de su medida a Bob clásicamente y Bob conociendo esta información suministrada por Alice puede convertir el estado de su partícula EPR que comparte con Alice en el estado desconocido $|\phi\rangle$. De esta forma, el estado $|\phi\rangle$ va de un lugar a otro, dado que el estado $|\phi\rangle$ que tenía Alice se destruye y queda en manos de Bob (Ver [23] para más detalles).

Popescu *et.al* en 1994 [24] introdujeron el hecho de que estados mezclados bipartitos compartidos por Alice y Bob pueden ser también útiles para llevar a cabo el proceso de teletransportación, la diferencia en utilizar estados singletes EPR o estados mezclados se encuentra en la fidelidad con la cual el proceso de teletransportación puede llevarse a cabo. Por lo tanto, cuando se utilizan estados mezclados se habla de una teletransportación imperfecta dado que la fidelidad es menor que uno.

Por lo tanto, el concepto de *utilidad para teletransportación* se refiere al hecho de que tan útil es un estado bipartito ρ_{AB} compartido por Alice y Bob para llevar a cabo el protocolo de teletransportación. De ahí que, Horodecki *et.al.* demostraron que todo estado que viola CHSH es útil para teletransportación y además que no todo estado entrelazado es útil para este protocolo [25]. El resultado actual es que el conjunto de estados UFT es más grande que CHSH [26]

Por tanto, en este trabajo utilizaremos una métrica normalizada para cuantificar qué tan útil es un estado para llevar a cabo el protocolo de teletransportación dada por [20]

$$D(\rho) = \max \left\{ 0, \frac{|s_1| + |s_2| - \chi|s_3| - 1}{2} \right\}, \quad (2.6)$$

donde s_1, s_2 y s_3 son los valores singulares de la matriz de correlación de un estado de la forma mostrada en Ec. (1.8), con $s_1 \geq s_2 \geq s_3$, y χ su determinante.

2.4. Entrelazamiento cuántico

El entrelazamiento es una característica de la mecánica cuántica que permite llevar a cabo protocolos como la teletransportación [23], comunicación densa [27] y representa en la actualidad una ventaja computacional para realizar tareas que sistemas clásicos tardarían mucho tiempo en resolver. En términos del formalismo de matriz densidad decimos que un estado bipartito es entrelazado si no puede ser escrito en una descomposición convexa de la forma $\{p_i, \mu_i \otimes \phi_i\}$, es decir, como la presentada en la Ec. (1.4). De igual forma, decimos que un estado puro bipartito es entrelazado si no puede ser escrito como producto de estados de un qubit, es decir, de la forma presentada en Ec. (2.7)

$$|\psi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle). \quad (2.7)$$

Uno de los conceptos más utilizados para cuantificar el entrelazamiento de un sistema, es denominado *entrelazamiento de formación* (EOF por sus siglas en inglés) introducido por Bennett *et.al.* en [28]. Se define entonces el EOF como la cantidad promedio de entrelazamiento de estados puros mínima necesaria para crear un estado ρ de la forma Ec. (1.3).

Sea un estado bipartito mezclado escrito como

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (2.8)$$

Entonces el entrelazamiento E de cada uno de los estados puros $|\psi_i\rangle$ de la mezcla estadística se define como la entropía de uno de sus sub-sistemas $\rho_A = \text{Tr}_B [|\psi_i\rangle\langle\psi_i|]$ o $\rho_B = \text{Tr}_A [|\psi_i\rangle\langle\psi_i|]$.

$$E(\psi_i) = -\text{Tr} [\rho_A \log_2 \rho_A] = -\text{Tr} [\rho_B \log_2 \rho_B]. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, el entrelazamiento de formación del estado mezclado (Ec. (2.8)) estará dada por

$$E(\rho) = \min \sum_i p_i E(\psi_i). \quad (2.10)$$

Donde la Ec. (2.10) nos dice, que de las infinitas descomposiciones que puede admitir ρ , debemos tomar aquella cuyo entrelazamiento de formación para crearlo sea el mínimo (ver [29] para más detalles).

Por otra parte, para el desarrollo de este trabajo utilizaremos una métrica auxiliar introducida

por Wootters en [29] denominada *conurrencia*, la cual tiene el mismo comportamiento que el EOF, pero su forma de calcular es más simple. Por lo tanto, se define la concurrencia de un estado bipartito como

$$C(\rho) = \text{máx} \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}, \quad (2.11)$$

donde λ_i son los valores propios de la matriz $\rho(\sigma_2 \otimes \sigma_2)\rho^*(\sigma_2 \otimes \sigma_2)$ ordenados de la siguiente forma $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$, con ρ^* siendo la conjugada de ρ y σ_2 una matriz de Pauli.

2.5. Obesidad cuántica

Recientemente en [22, 30] se ha introducido el concepto y formalismo de una propiedad cuántica que satisface los criterios de una correlación cuántica: I) Es cero para estados clásico-cuánticos de la forma $\rho_{AB} = \sum_i |i\rangle\langle i|_A \otimes \rho_B^{(i)}$ II) Es invariante bajo transformaciones unitarias locales, III) Es monótono de entrelazamiento; es decir, se reduce a entrelazamiento para estados puros (para más detalles de los tipos de criterios que debe cumplir una correlación ver [12]). De igual forma, cumple las siguientes propiedades; normalizada entre cero y uno, es mayor o igual que la concurrencia para todo estado, es maximizada por el KLM-SLOCC. Dicha correlación denominada *Obesidad cuántica* está presente en aquellos estados cuyo volumen de elipsoide de EPR-steering es diferente de cero. El elipsoide de EPR-steering es una figura geométrica que se forma dentro de la esfera de Bloch local de Alice con los vectores de Bloch de sus estados "dirigidos" ρ'_A (Ec. (2.3)), cuando Bob realiza un conjunto de medidas locales en su parte local del estado bipartito ρ_{AB} compartido con Alice [30].

En este trabajo usamos la definición original de obesidad cuántica como sigue: Sea un estado general de dos qubits en su forma de matriz R dado por

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{ij} R_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \quad i, j = 0, 1, 2, 3,$$

entonces su obesidad cuántica está dada por

$$\Omega(\rho) = |\det\{R\}|^{1/4}. \quad (2.12)$$

Capítulo III

Protocolo swapping y KLM-SLOCC

En este capítulo, se introduce las nociones generales del protocolo swapping y las operaciones locales KLM-SLOCC. Las cuales, son las herramientas que permiten llevar a cabo nuestro estudio sobre cómo las correlaciones cuánticas (capítulo II) se comportan bajo la acción conjunta de estos dos procesos.

3.1. Protocolo swapping

Hasta finales del siglo XX se consideraba que el entrelazamiento era dependiente de la fuente de donde se emitían las partículas y el hecho de que estas hubieran interactuado en el pasado. Por otra parte, en los últimos años del mismo siglo M. Żukowski *et.al.* [31] probaron que es posible generar entrelazamiento entre dos partículas que provienen de diferentes fuentes y que además no han interactuado jamás en el pasado. Este hecho puede ser logrado realizando medidas proyectivas tipo Bell sobre el estado de dos partículas que no han interactuado anteriormente, este proceder recibió el nombre de “entanglement swapping”. Por otro lado, esta nueva visión sobre el entrelazamiento ha marcado un antes y un después en lo que respecta a las posibilidades de aplicación en sistemas de intercambio de información [32, 33].

Entanglement swapping es una de las herramientas principales para la distribución de entrelazamiento, dado que puede ser utilizado para la creación de estados multipartitos entrelazados a partir de estados bipartitos entrelazados [34]. Cabe resaltar que los estados que intervienen en el protocolo no necesariamente deben tener máximo entrelazamiento, esto da lugar a que pueden obtenerse estados con una mayor correlación que la de los estados iniciales.

El protocolo swapping se describe como sigue, en el formalismo del operador densidad [35]: Para un sistema de cuatro partículas, sea ρ_{AB} el operador densidad del estado de la pareja A y B , y ρ_{CD} el respectivo operador densidad de las partículas C y D , el estado total del sistema es

descrito por el operador densidad

$$\rho_{AB} \otimes \rho_{CD} = \rho_{ABCD}.$$

De acuerdo al esquema mostrado en la Fig. 3.1, lo que queremos es proyectar los estados de las partículas B y C en la base de Bell, para ello debemos hacer uso de uno de los postulados de la mecánica cuántica correspondiente a la medida de un estado cuántico. Se propone el siguiente operador de medida

$$\Pi_i = \mathbb{1}_2 \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \otimes \mathbb{1}_2,$$

donde $\mathbb{1}_2$ corresponde a la matriz identidad de orden 2 y $|\phi_i\rangle$ representa a alguno de los cuatro elementos de la base de Bell. Por lo tanto, el operador Π_i nos está diciendo que la proyección solo se realiza sobre las partículas B y C . Por consiguiente, el estado cuántico después de la medida estará dado por

$$\rho'_{ABCD} = \frac{\Pi_i \rho_{ABCD} \Pi_i^\dagger}{\text{Tr} [\Pi_i \rho_{ABCD} \Pi_i^\dagger]}.$$

Ahora, solo nos interesa quedarnos con el estado de las partículas A y D , para ello tomamos traza parcial sobre los estados de las partículas B y C

$$\rho'_{AD} = \text{Tr}_{BC} \left[\frac{\Pi_i \rho_{ABCD} \Pi_i^\dagger}{\text{Tr} [\Pi_i \rho_{ABCD} \Pi_i^\dagger]} \right]. \quad (3.1)$$

Finalmente, la Ec. (3.1) corresponde al estado de las partículas A y D después del protocolo swapping.

Consideremos ahora que de cada fuente en la Fig. 3.1 se produce un par EPR, es decir, dos partículas que comparten un estado máximamente entrelazado. El estado emitido por la fuente I es

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A\rangle \otimes |0_B\rangle + |1_A\rangle \otimes |1_B\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

y el estado emitido por la fuente II es

$$|\psi_{CD}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_C\rangle \otimes |0_D\rangle + |1_C\rangle \otimes |1_D\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

Los subíndices $i, j = 1, 2, 3, 4$ en $|\psi_{ij}\rangle$ identifican las partículas involucradas en el estado. Por lo tanto, el estado conjunto de las cuatro partículas estará dado por el producto tensorial (por simplicidad usaremos la equivalencia: $|i_k\rangle \otimes |j_l\rangle \equiv |i_k j_l\rangle$)

$$|\psi_{AB}\rangle \otimes |\psi_{CD}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_C 0_D\rangle + |1_C 1_D\rangle) \right).$$

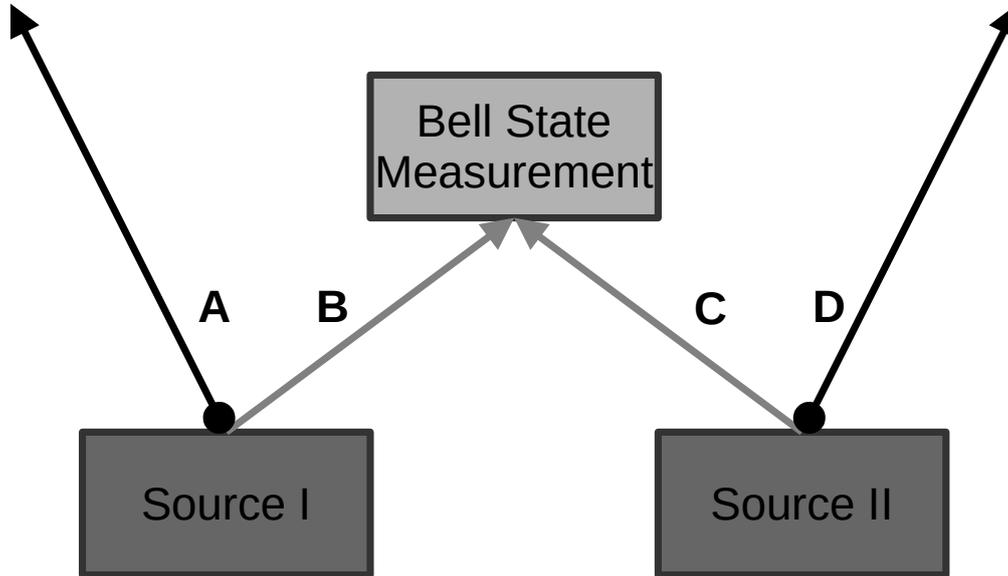


Figura 3.1: Protocolo swapping: los pares de partículas (A,B) y (C,D) provienen de diferentes fuentes y nunca han interactuado en el pasado, en la caja superior se llevan a cabo medidas proyectivas tipo Bell (BSM) sobre las partículas (B,C). El protocolo termina con un estado correlacionado para las partículas (A,D).

Lo cual es equivalente a

$$|\psi_{AB}\rangle \otimes |\psi_{CD}\rangle = \frac{1}{2}(|0_A 0_B 0_C 0_D\rangle + |0_A 0_B 1_C 1_D\rangle + |1_A 1_B 0_C 0_D\rangle + |1_A 1_B 1_C 1_D\rangle).$$

Como se observa en la Fig. 3.1 las partículas B y C provienen de diferentes fuentes pero se dirigen a un punto en común donde se hará una medida proyectiva en una base tipo Bell. Por lo tanto, el anterior estado nos conviene escribirlo de la siguiente forma

$$|\psi_{AB}\rangle \otimes |\psi_{CD}\rangle = \frac{1}{2}(|0_A\rangle |0_B 0_C\rangle |0_D\rangle + |0_A\rangle |0_B 1_C\rangle |1_D\rangle + |1_A\rangle |1_B 0_C\rangle |0_D\rangle + |1_A\rangle |1_B 1_C\rangle |1_D\rangle). \quad (3.2)$$

Ahora, podemos escribir los posibles estados de las partículas B y C en términos de la base de Bell, lo cual es igual a efectuar la medida proyectiva en esta base. Por lo tanto, se define la base de Bell en términos de los estados de las partículas B y C como:

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_B 0_C\rangle + |1_B 1_C\rangle),$$

$$\begin{aligned}
|\phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_B0_C\rangle - |1_B1_C\rangle), \\
|\phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_B1_C\rangle + |1_B0_C\rangle), \\
|\phi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_B0_C\rangle - |0_B1_C\rangle).
\end{aligned}$$

De aquí obtenemos en terminos de la base de Bell que

$$\begin{aligned}
|0_B0_C\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle), \\
|0_B1_C\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_3\rangle + |\phi_4\rangle), \\
|1_B0_C\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_3\rangle - |\phi_4\rangle), \\
|1_B1_C\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle).
\end{aligned}$$

llevamos entonces estos resultados al estado (3.2) y obtenemos

$$\begin{aligned}
|\psi_{AB}\rangle \otimes |\psi_{CD}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0_A\rangle (|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle) |0_D\rangle + |0_A\rangle (|\phi_3\rangle + |\phi_4\rangle) |1_D\rangle \\
&+ |1_A\rangle (|\phi_3\rangle - |\phi_4\rangle) |0_D\rangle + |1_A\rangle (|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle) |1_D\rangle).
\end{aligned}$$

Si nos fijamos en este último resultado, vemos que si la medida proyectiva llevada a cabo sobre las partículas B y C es $|\phi_1\rangle$ el estado para las partículas A y D se reduce a

$$|\psi_{AD}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A0_D\rangle + |1_A1_D\rangle) = |\Phi_1\rangle.$$

Si la medida llevada a cabo sobre las partículas B y C es $|\phi_2\rangle$ entonces el estado para las partículas A y D se reduce al estado

$$|\psi_{AD}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A0_D\rangle - |1_A1_D\rangle) = |\Phi_2\rangle.$$

De este mismo modo para los otros dos casos restantes, si las medidas efectuadas sobre las partículas B y C son $|\phi_3\rangle$ o $|\phi_4\rangle$, los estados para las partículas A y D serán respectivamente

$$|\psi_{AD}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A1_D\rangle + |1_A0_D\rangle) = |\Phi_3\rangle,$$

$$|\psi_{AD}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 1_D\rangle - |1_A 0_D\rangle) = |\Phi_4\rangle.$$

Este hecho, nos permite escribir el estado de la Ec. (3.2) finalmente de la forma

$$|\psi_{AB}\rangle \otimes |\psi_{CD}\rangle = |\Phi_1\rangle |\phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle |\phi_2\rangle + |\Phi_3\rangle |\phi_3\rangle + |\Phi_4\rangle |\phi_4\rangle, \quad (3.3)$$

donde los estados $|\Phi_i\rangle$ son únicamente función de las partículas A y D y los estados $|\phi_j\rangle$ son únicamente función de las partículas B y C . Por ende, el estado de la Ec. (3.3) nos está diciendo que si proyectamos el estado de las partículas B y C en cualquiera de los elementos de la base de Bell, entonces el estado resultante del sistema total $|\psi_{AB}\rangle \otimes |\psi_{CD}\rangle$ se verá reducido a un estado entrelazado de las partículas A y D . Lo importante de este protocolo es que las partículas A y D tal y como se observa en la Fig. 3.1 provienen de fuentes distintas y además de eso no han interactuado en el pasado y luego de efectuar medidas proyectivas en los estados de las partículas B y C (las cuales también provienen de diferentes fuentes) terminan presentando correlaciones cuánticas.

3.2. KLM-SLOCC

Dado que en mecánica cuántica las operaciones sobre los estados cuánticos representan transformaciones observables, el conjunto de operaciones estocásticas locales y comunicación clásica (SLOCC por sus siglas en Inglés) son un tipo especial de operaciones que, aunque no pueden crear entrelazamiento (mapean estados separables a estados separables), sí pueden aumentar el entrelazamiento de estados entrelazados. La forma en que estas operaciones actúan se describe en la Fig. 3.2. Supongamos que tenemos dos personas Alice y Bob las cuales comparten un estado cuántico entrelazado ρ_{AB} , supongamos también que Alice y Bob se encuentran en diferentes laboratorios y pueden efectuar sobre su estado en particular operaciones o medidas [36].

El hecho de que Alice y Bob lleven a cabo operaciones locales sobre ρ_A o ρ_B puede afectar al estado en conjunto ρ_{AB} , es decir, afectar las correlaciones totales del sistema. Por otro lado, el término *local* se debe a que Alice o Bob pueden realizar operaciones justo en el lugar donde se encuentran y sobre su estado en particular, de igual forma el término *comunicación clásica* se debe a que luego de efectuar operaciones locales, Alice o Bob deben comunicar por medio de un canal clásico, el tipo de medida efectuada, esto es necesario dado que de lo contrario se podría pensar que la información entre las dos partes viaja más rápido que la luz. Como se dijo anteriormente, las SLOCC no pueden crear entrelazamiento en estados separables, dado que son las operaciones libres para el recurso entrelazamiento. Sin embargo, se ha mostrado que las SLOCC ayudan a potenciar el grado de entrelazamiento [37] y permiten crear correlaciones

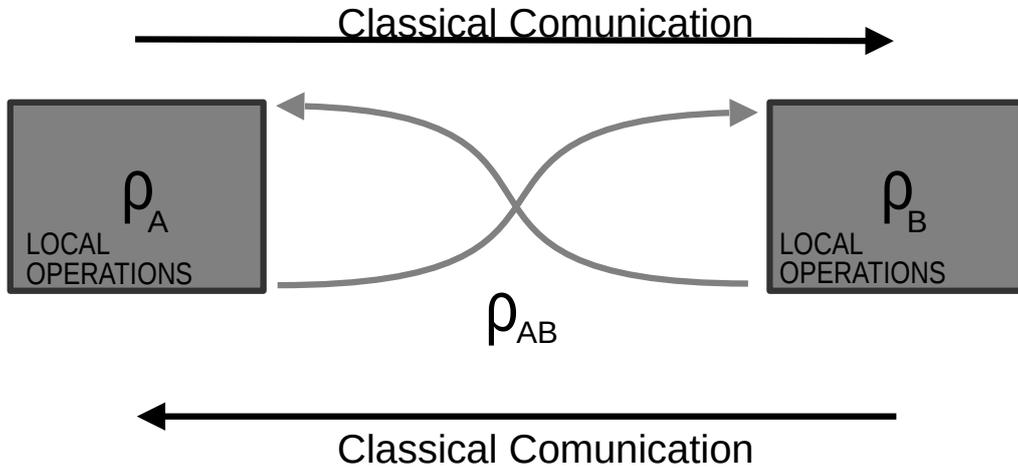


Figura 3.2: Esquema de operaciones locales y comunicación clásica, las flechas curvas representan que el estado ρ_{AB} está correlacionado.

más restrictivas como la no-localidad, el EPR-steering y la utilidad para teletransportación [20].

Consideremos entonces que f_A y f_B representan operadores locales para Alice y Bob respectivamente tal que

$$\begin{aligned} f_A^\dagger f_A &\leq \mathbb{1}_2, \\ f_B^\dagger f_B &\leq \mathbb{1}_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el estado conjunto de Alice y Bob luego de efectuar las operaciones locales estará dado por

$$\rho'_{AB} = \frac{(f_A \otimes f_B) \rho_{AB} (f_A \otimes f_B)^\dagger}{\text{Tr}[(f_A \otimes f_B) \rho_{AB} (f_A \otimes f_B)^\dagger]}. \quad (3.4)$$

El propósito es entonces determinar la forma que deben tener los operadores f_A y f_B para incrementar las correlaciones cuánticas.

En 1999 Kent, Linden y Massar (KLM) mostraron en [37] que si el estado que comparte Alice y Bob ρ_{AB} no es aleatorio, tiene EOF (entrelazamiento de formación) diferente de cero y además no es Bell diagonal, entonces existe una familia de operaciones locales estocásticas y comunicación clásica (SLOCC) que puede aumentar el entrelazamiento de ρ_{AB} con una probabilidad diferente de cero. Lo anterior se enuncia mediante los siguientes teoremas:

Considerese una matriz densidad general de dos qubits de la siguiente forma

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}_4 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} + \sum_{i,j} T_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right), \quad (3.5)$$

donde $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ representan los vectores de Bloch locales de Alice y Bob, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ representa el vector de las matrices de Pauli y T_{ij} una matriz de correlación.

Teorema 3.2.1 *Sea ρ_{AB} una matriz densidad de la forma (3.5) con EOF diferente de cero, entonces existe una SLOCC invertible de la forma $f_A \otimes f_B$ que mapea a ρ_{AB} con probabilidad diferente de cero a un estado ρ'_{AB} con mayor o igual EOF.*

Teorema 3.2.2 *Sea ρ_{AB} de la forma (3.5) con EOF diferente de cero. Si $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ son diferentes de cero, entonces existe una SLOCC invertible que mapea ρ_{AB} a un estado ρ'_{AB} diagonal de Bell el cual tiene el máximo entrelazamiento que se puede obtener de ρ_{AB} por medio de SLOCC.*

Teorema 3.2.3 *Sea ρ_{AB} la matriz densidad de un estado con EOF diferente de cero, entonces el estado diagonal de Bell ρ'_{AB} que puede obtenerse por SLOCC es único módulo transformadas unitarias locales. Por lo tanto ρ'_{AB} tiene el máximo posible de EOF.*

Los anteriores teoremas indican que existen operaciones locales particulares, que en este trabajo denominamos KLM-SLOCC, cuyo efecto es optimizar (maximizar) el entrelazamiento de los estados cuánticos. Esto implica que correlaciones basadas en dicho recurso; utilidad para teletransportación, no-localidad de Bell, EPR-steering, pueden también maximizarse bajo filtros locales KLM-SLOCC [20].

En la representación usada en este trabajo, el estado ρ_{AB} luego de la aplicación de operaciones KLM-SLOCC está dado por

$$\rho'_{AB} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 R_{ij}^{KLM} \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad (3.6)$$

donde $\sigma_0 = \mathbb{1}_2$ y R^{KLM} está dado por

$$R^{KLM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{v_1/v_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{v_2/v_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{v_3/v_0} \end{pmatrix},$$

y v_0, v_1, v_2, v_3 con $v_0 \geq v_1 \geq v_2 \geq v_3$ son los valores propios de la matriz β :

$$\beta = \eta R \eta R^T.$$

Con

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde los coeficientes de R pueden ser obtenidos de la siguiente forma

$$R_{ij} = \text{Tr}[(\sigma_i \otimes \sigma_j)\rho_{AB}] \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Por lo tanto, el estado de la Ec. (3.6) representará el estado máximamente correlacionado que puede obtenerse por medio de operaciones locales efectuadas por Alice y Bob sobre ρ_{AB} . Es importante aclarar que para estados generales, aunque no es posible identificar siempre el conjunto de SLOCC que filtran el estado a uno con mayor correlación, siempre es posible identificar dicho estado final (Ec. (3.6)). Para estados específicos, como aquellos con operadores densidad en forma de X (Anexo C), algunos autores han encontrado las KLM-SLOCC explícitamente [38].

3.2.1. KLM-SLOCC en la representación R

Sea la matriz R cuadrada de dimensión 4 de un estado bipartito ρ_{AB} como el de la Ec. (1.9), cuyas componentes estan dadas por $R_{ij} = \text{Tr}[(\sigma_i \otimes \sigma_j)\rho_{AB}] \quad i, j = 0, 1, 2, 3$. entonces la matriz R es tranformada por operaciones locales de la siguiente forma [39]

$$R^{KLM} = \frac{\Lambda_A R \Lambda_B^T \det\{f_A\} \det\{f_B\}}{\text{Tr}[(f_A^\dagger f_A \otimes f_B^\dagger f_B)\rho_{AB}]}, \quad (3.7)$$

donde f_A y f_B son los filtros óptimos de ρ_{AB} que cumplen $f_i^\dagger f_i \leq \mathbb{1}$ y $\Lambda_i = \Upsilon(f_i \otimes f_i^*) \Upsilon^\dagger / |\det\{f_i\}|$ son las transformaciones de Lorentz ortocronas, es decir, que satisfacen ($\det\{\Lambda_i\} = 1$ y $\Lambda_i^{00} \geq 0$), $i = A, B$. Υ está dado por

$$\Upsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Capítulo IV

Análisis de correlaciones bajo los efectos conjuntos de los protocolos swapping y KLM-SLOCC

En el presente capítulo, se muestran los resultados obtenidos en el transcurso de esta investigación. En términos del protocolo de swapping, los resultados se dividen en diferentes escenarios respecto a los estados considerados en las dos fuentes, y el conjunto de medidas proyectivas. En adelante identificamos las partículas con letras del alfabeto latino. En la sección 4.1 se considera un estado inicial general ρ_{AB} en la fuente I y un estado Bell ρ_{CD} en la fuente II, utilizando medidas proyectivas de Bell en la pareja BC . En la sección 4.2 mostramos el comportamiento de las correlaciones cuánticas cuando consideramos ambos estados iniciales generales y medidas proyectivas pertenecientes a la base de Bell. Finalmente, en la sección 4.3 mostramos una generalización analítica para el protocolo swapping utilizando proyectores diferentes a los de Bell, que puede reducirse sin dificultad a los resultados encontrados en la literatura.

4.1. Escenario 1: Estado inicial general en una de las fuentes y medidas de Bell

Resultado 1: Sea ρ_{AB} (en la fuente I) un estado general identificado con la terna (\vec{a}, \vec{b}, T) , es decir, de la forma

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + \vec{a} \cdot \sigma^A \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes \vec{b} \cdot \sigma^B + \sum_{ij=1}^3 T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \right),$$

y ρ_{CD} (en la fuente II) un estado cualquiera de la base de Bell

$$\rho_{CD} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{CD} - \sum_{k=1}^3 (\mathbb{1} \otimes \sigma_n)(\sigma_k^C \otimes \sigma_k^D)(\mathbb{1} \otimes \sigma_n) \right); \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

donde la forma explícita de ρ_{CD} depende de la escogencia de n . Entonces, utilizando como proyector también un estado de Bell (dependiente de la escogencia de m)

$$\Pi = \mathbb{1}^A \otimes \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{BC} - \sum_{l=1}^3 (\mathbb{1} \otimes \sigma_m)(\sigma_l^B \otimes \sigma_l^C)(\mathbb{1} \otimes \sigma_m) \right) \otimes \mathbb{1}^D; \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

El estado $\rho_{AD}^{n,m}$ después del swapping está dado por

$$\rho_{AD}^{n,m} = (\mathbb{1} \otimes \sigma_n \sigma_m) \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AD} + \vec{a} \cdot \sigma^A \otimes \mathbb{1}^D + \mathbb{1}^A \otimes \vec{b} \cdot \sigma^D + \sum_{ij} T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^D \right) (\mathbb{1} \otimes \sigma_m \sigma_n), \quad (4.1)$$

donde $\{\sigma_i\}$ con $i = 0, 1, 2, 3$ es el conjunto de matrices de Pauli.

La Ec. (4.1) puede obtenerse como sigue. Sea nuestro sistema inicial dado por $\rho_{ABCD} = \rho_{AB} \otimes \rho_{CD}$, donde ρ_{AB} , ρ_{CD} y Π están determinados como en la caja **Resultado 1**. Calculando la Ec. (3.1), es posible mostrar que el estado AD después de swapping es

$$\rho_{AD}^{n,m} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AD} + \vec{a} \cdot \sigma^A \otimes \mathbb{1}^D + \mathbb{1}^A \otimes (\vec{b}')^n \cdot \sigma^D + \sum_{ij=1}^3 (T'_{ij})^m \sigma_i^A \otimes \sigma_j^D \right),$$

donde el vector $(\vec{b}')^m$ y la matriz de correlación $(T'_{ij})^m$ están determinados por

$$(\vec{b}')^n \cdot \sigma^D = \sigma_n \sigma_m (\vec{b} \cdot \sigma^D) \sigma_m \sigma_n,$$

y

$$\sum_{ij=1}^3 (T'_{ij})^m \sigma_i^A \otimes \sigma_j^D = \sum_{ij=1}^3 T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_n \sigma_m \sigma_j^D \sigma_m \sigma_n.$$

Así, el estado final puede escribirse como

$$\rho_{AD}^{n,m} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{\text{AD}} + \vec{a} \cdot \sigma^A \otimes \mathbb{1}^{\text{D}} + \mathbb{1}^{\text{A}} \otimes \sigma_n \sigma_m (\vec{b} \cdot \sigma^D) \sigma_m \sigma_n + \sum_{ij=1}^3 T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_n \sigma_m \sigma_j^D \sigma_m \sigma_n \right),$$

que teniendo en cuenta las propiedades de las matrices de Pauli puede escribirse en la forma de la Ec. (4.1). La importancia de este resultado radica en el hecho de que el estado final $\rho_{AD}^{n,m}$ es equivalente al estado inicial en la fuente I, ρ_{AB} , a través de operaciones locales unitarias. Esto implica que las correlaciones del estado final son iguales a las respectivas correlaciones del estado inicial general. Kirby *et.al.* [35] dieron una prueba parcial de este hecho para el entrelazamiento utilizando la concurrencia sobre operadores densidad en forma de X y simulaciones numéricas en el caso general. En nuestro desarrollo, hemos extendido la prueba analítica para cualquier estado general ρ_{AB} . A continuación analizamos el efecto conjunto de swapping y operaciones KLM-SLOCC.

Con el fin de analizar las correlaciones bajo efectos de los protocolos mencionados, consideramos el siguiente estado en forma de X

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} p \cos^2 \theta + \frac{1-p}{2} & 0 & 0 & p \cos \theta \sin \theta \\ 0 & \frac{1-p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-p}{4} & 0 \\ p \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 & p \sin^2 \theta + \frac{1-p}{4} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

es decir, el estado tipo Werner $(1-p)\mathbb{1}/4 + p|\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)|$ en la fuente I, donde $p \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi/4]$ y $|\psi(\theta)\rangle = \cos \theta |00\rangle + \sin \theta |11\rangle$. Para la fuente II, el estado $\rho_{CD} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$, con $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$, y una medida proyectiva de Bell sobre el estado singlete $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ en BC . El cálculo de los valores singulares de la matriz de correlación para el estado inicial ρ_{AB} y el estado final después de swapping $\rho_{AD}^{3,2}$, son iguales; $s_1^2 = p^2$, $s_2^2 = p^2 \sin^2 2\theta$ y $s_3^2 = p^2 \sin^2 2\theta$, lo que implica que adicional al entrelazamiento, las correlaciones no-localidad CHSH, EPR-steering y utilidad para teletransportación de ambos estados son iguales.

En la Fig. 4.1 se muestra el comportamiento de las correlaciones para los estados ρ_{AB} (Ec.

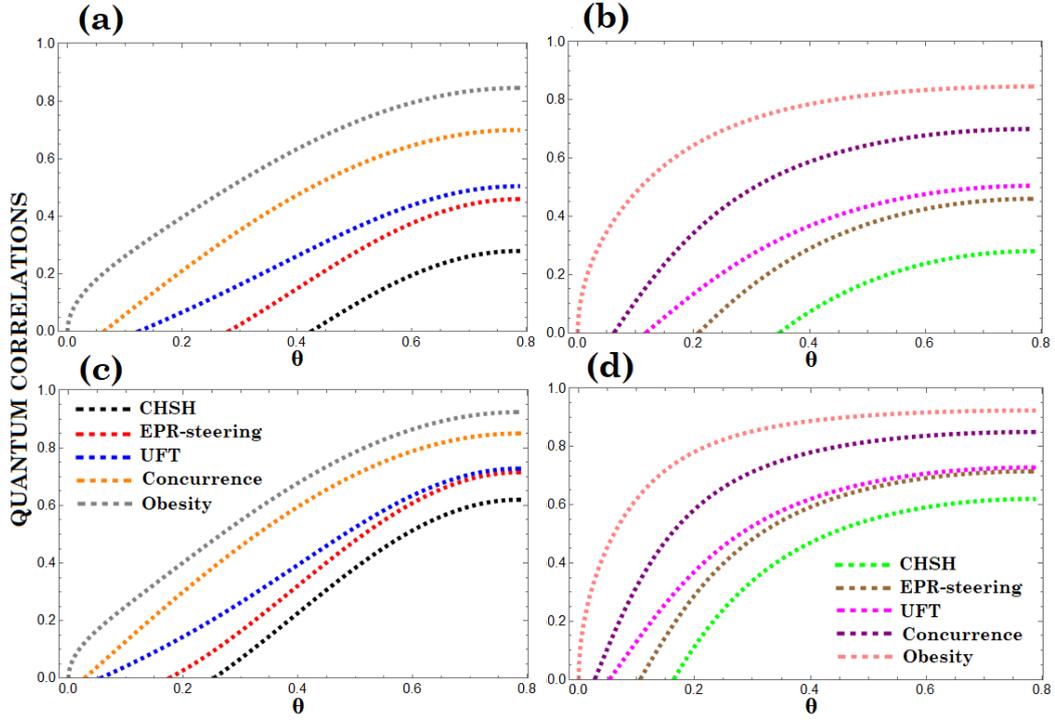


Figura 4.1: Correlaciones en función del parámetro θ , para los estados inicial y final en el protocolo swapping, para los escenarios (a) $p = 0,8$ y (c) $p = 0,9$. Comportamiento de las correlaciones después de los efectos de los filtros locales en las combinaciones KLM-SLOCC + swapping y swapping + KLM-SLOCC, de nuevo para (b) $p = 0,8$ y (d) $p = 0,9$.

(4.2)) y $\rho_{AD}^{3,2}$. El comportamiento de B (CHSH no-localidad), BF_3 (EPR-steering), D (UFT), C (concurrancia) y Ω (obesidad) en función del parámetro θ y para dos valores de p (Fig. 4.1(a) $p = 0,8$ y Fig. 4.1(c) $p = 0,9$). Como las correlaciones son iguales para ambos estados de acuerdo a la Ec. (4.1), solo se grafica una curva para cada cantidad. En las Figs. 4.1(b) y (d), se muestra el efecto conjunto de los dos protocolos sobre las correlaciones; proceso $\rho_{AB}, \rho_{CD} \rightarrow$ KLM-SLOCC + swapping $\rightarrow \rho_{AD}^{3,2}$ y proceso $\rho_{AB}, \rho_{CD} \rightarrow$ swapping + KLM-SLOCC $\rightarrow \rho_{AD}^{3,2}$. De nuevo, solo se presenta una curva para cada cantidad debido a que en este escenario, tanto el estado inicial ρ_{AB} después del filtro KLM-SLOCC como el estado final después de ambas combinaciones de protocolos, tienen las mismas correlaciones.

Es importante anotar que un efecto positivo al adicionar los filtros KLM-SLOCC al protocolo swapping, es que todas las correlaciones se ven aumentadas en magnitud. Y más relevante aún; no-localidad, steering y UFT se crean en zonas de θ en las que originalmente estos recursos eran idénticamente igual a cero.

Con el proposito de evaluar la generalización de nuestro resultado, ahora consideramos una familia de estados que no tiene forma de X. Para ρ_{AB} tenemos entonces [12].

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2 + 8xy} \begin{pmatrix} 1 - x - y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4xy + y & 4xy & y \\ 0 & 4xy & 4xy + x & x \\ 0 & y & x & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

donde $x, y \in [0, 1]$ y $0 \leq x + y \leq 1$. Para la fuente II (ρ_{CD}) consideramos al estado de Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$.

De nuestro resultado en la Ec. (4.1), es claro que las correlaciones del estado final son iguales para ambas combinaciones de protocolos; ya sea swapping + KLM-SLOCC ó KLM-SLOCC + swapping. Esto es debido a que las correlaciones son invariantes bajo transformaciones unitarias y del resultado (4.1), mostramos que el protocolo swapping conserva las correlaciones investigadas para este escenario. De esta manera, solamente el protocolo KLM-SLOCC tiene efectos sobre las correlaciones iniciales de ρ_{AB} .

El estado de la Ec. (4.3) es entrelazado para la región dada por $1 + 10xy - 16x^2y^2(4x + 1)(4y + 1) - 7(x^2 + y^2) + 2(x + y)(1 + 2(x^2 - 4xy + y^2))$. Para esta zona, mostramos los efectos de los filtros KLM-SLOCC en la Fig. 4.2 sobre las diferentes correlaciones. Para el entrelazamiento, la zona permanece invariante (dado que las SLOCC no pueden crear este recurso). Sin embargo, los filtros producen que la cantidad de recurso aumente; comparece las Figs. 4.2(g) y (h) para la concurrencia. El efecto más importante se evidencia en las demás correlaciones, donde la región de estados que presentan el recurso físico se ve aumentada. En otras palabras, los filtros KLM-SLOCC crean dichas correlaciones. En particular, la no-localidad CHSH (4.2(a)) y el EPR steering (4.2(c)), que originalmente no existen en el conjunto de estados (4.3), son revelados por los filtros como se muestra en las Figs. 4.2(b) y (d). Para UFT, aunque sí hay una región con este recurso originalmente, ésta es ampliada por los filtros (véase las Figs. 4.2(e) y (f)).

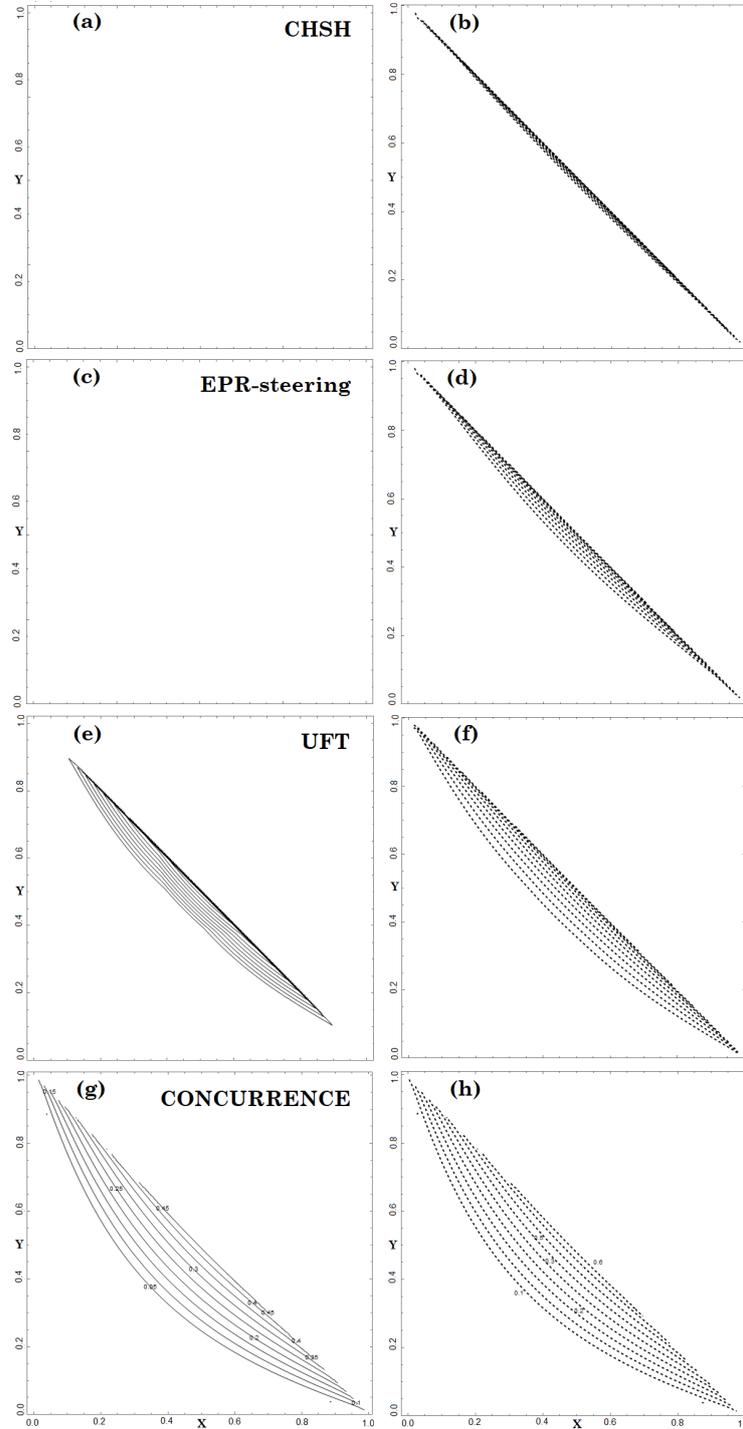


Figura 4.2: Correlaciones cuánticas en función de los parámetros X y Y del estado (4.3) antes de los filtros (a) CHSH, (c) EPR-steering, (e) UFT y (g) Concurrencia. El efecto de la aplicación de los filtros KLM-SLOCC se muestra en (b), (d), (f) y (h), respectivamente.

4.2. Escenario 2: Estado inicial general en ambas fuentes y medidas de Bell

Resultado 2: Sean ρ_{AB} y ρ_{CD} los estados generales en las fuentes caracterizados por (\vec{a}, \vec{b}, T) y (\vec{q}, \vec{p}, S) , respectivamente. Entonces el estado ρ_{AD}^γ después del swapping al proyectar en cualquiera de los estados de Bell, estará dado por

$$\rho_{AD}^\gamma = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AD} + \vec{w}^\gamma \cdot \sigma^A \otimes \mathbb{1}^D + \mathbb{1}^A \otimes \vec{v}^\gamma \cdot \sigma^D + \sum_{in} H_{in}^\gamma \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D \right), \quad (4.4)$$

donde

$$\vec{w}^\gamma = \frac{\vec{a} + TN_\gamma \vec{q}}{1 + \vec{b} \cdot (N_\gamma \vec{q})} \quad \vec{v}^\gamma = \frac{\vec{p} + S^T N_\gamma \vec{b}}{1 + \vec{b} \cdot (N_\gamma \vec{q})} \quad H^\gamma = \frac{\vec{a} \vec{p}^T + TN_\gamma S}{1 + \vec{b} \cdot (N_\gamma \vec{q})}.$$

N_γ con $\gamma = 0, 1, 2, 3$, es la matriz de correlación para los cuatro estados de Bell, y A^T representa la transpuesta de la cantidad A (vector o matriz).

Es claro que el **Resultado 2** es más general que el de la sección 4.1, dado que aquí consideramos estados generales para ambas fuentes en el protocolo de swapping. Es decir, con ρ_{AB} y Π como en la sección 4.1, pero ahora considerando el estado en la fuente II como

$$\rho_{CD} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{CD} + \vec{q} \cdot \sigma^C \otimes \mathbb{1}^D + \mathbb{1}^C \otimes \vec{p} \cdot \sigma^D + \sum_{mn} S_{mn} \sigma_m^C \otimes \sigma_n^D \right).$$

Luego de realizar el protocolo swapping con esta variación, se obtiene el estado ρ_{AD}^γ en la Ec. (4.4). Las matrices de correlación N_γ están dadas por

$$N_0 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para discutir el comportamiento de las correlaciones en este escenario, por simplicidad consideramos estados iniciales en ambas fuentes que tengan las mismas correlaciones, $\delta(\rho_{AB}) = \delta(\rho_{CD})$, donde δ identifica cualquiera de las correlaciones estudiadas. Así, la comparación de los efectos de los protocolos puede hacerse de forma directa con el estado inicial.

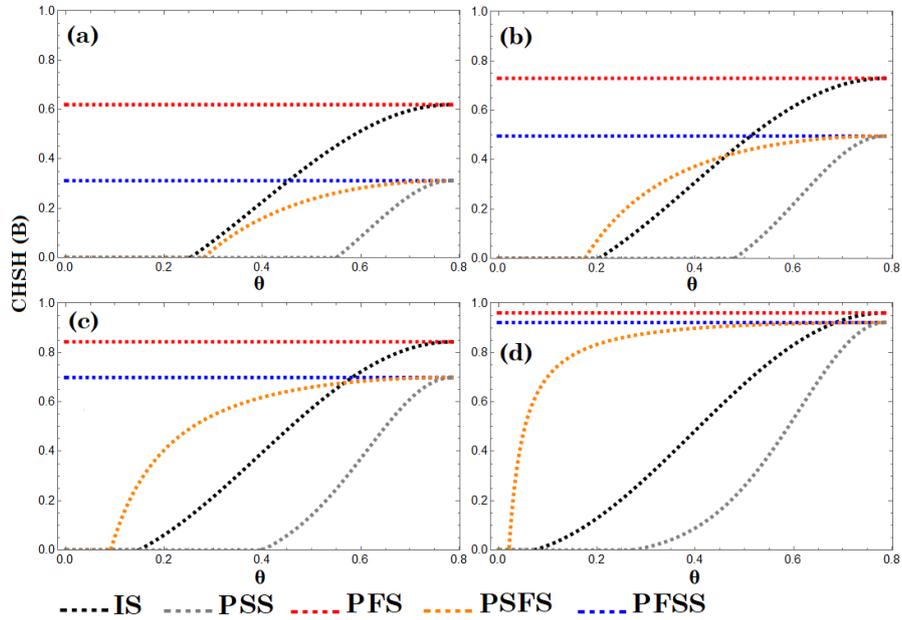


Figura 4.3: No-localidad CHSH para (a) $p = 0,9$, (b) $p = 0,93$, (c) $p = 0,96$ y (d) $p = 0,99$

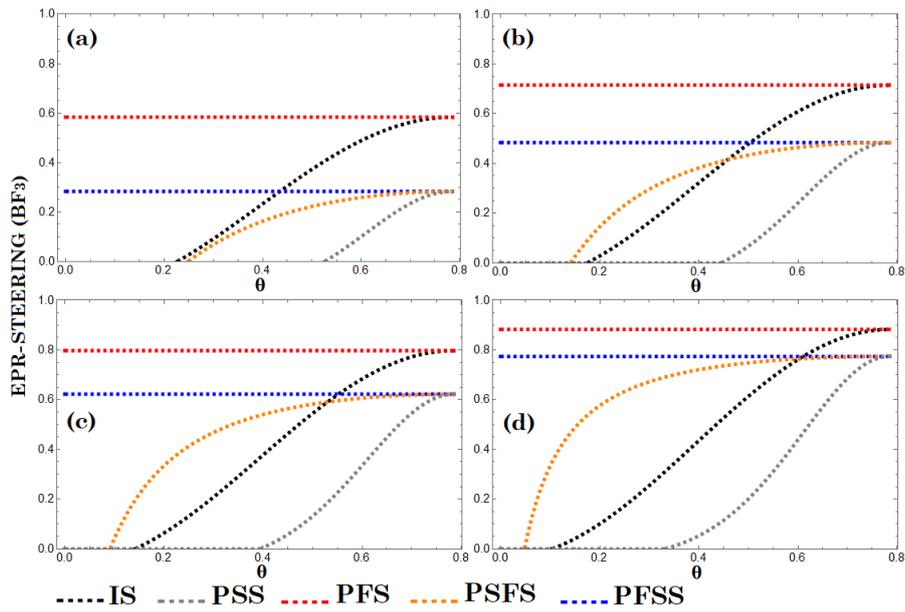


Figura 4.4: EPR-steering para (a) $p = 0,85$, (b) $p = 0,9$, (c) $p = 0,93$ y (d) $p = 0,96$.

4.2.1. El mismo estado en ambas fuentes

En esta ocasión el estado inicial en las fuentes es

$$\rho_{AB} = \rho_{CD} = p |\psi\rangle\langle\psi| + (1-p)\rho_A \otimes \frac{\mathbb{1}}{2}, \quad (4.5)$$

donde $\rho_A = \text{Tr}_B [|\psi\rangle\langle\psi|]$, $|\psi\rangle = \cos\theta |00\rangle + \sin\theta |11\rangle$, $\theta \in [0, \pi/4]$ y $p \in [0, 1]$. El estado de la Ec. (4.5) es entrelazado para $p > 1/3$. Como para este escenario, las correlaciones ya no se conservan después del protocolo swapping, y en general, son afectadas por ambos protocolos, definimos la siguiente nomenclatura para los estados en las diferentes combinaciones de procesos: Estado inicial (**IS**), Estado después del swapping (**PSS**), Estado después de los filtros KLM-SLOCC (**PFS**), Estado después de swapping + KLM-SLOCC (**PSFS**) y Estado después de KLM-SLOCC + swapping (**PFSS**).

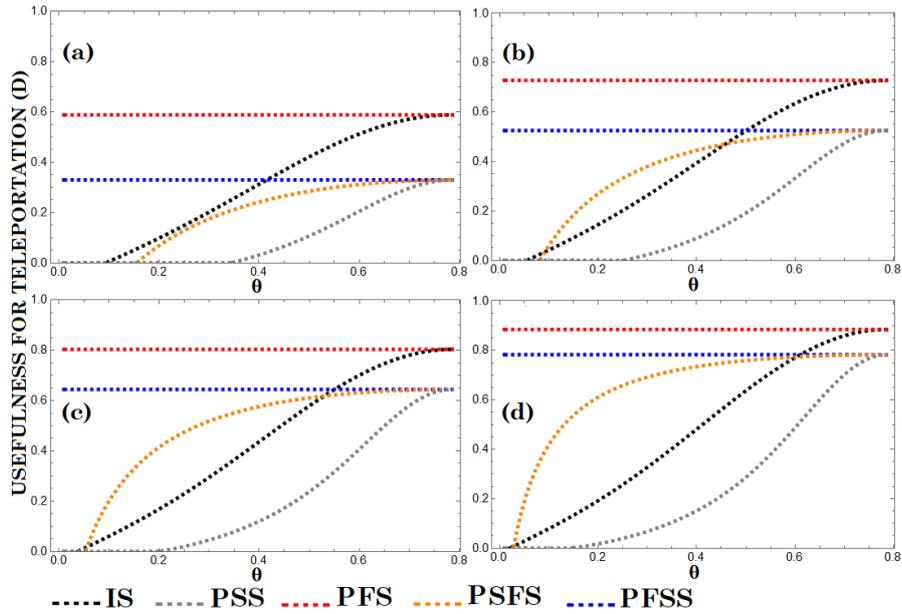


Figura 4.5: UFT para (a) $p = 0,84$, (b) $p = 0,9$, (c) $p = 0,93$ y (d) $p = 0,96$.

El comportamiento de las correlaciones se muestra en el conjunto de Figs. 4.3 (CHSH), 4.4 (EPR-steering), 4.5 (UFT), 4.6 (Concurrencia) y 4.7 (obesidad). Todas las correlaciones se grafican en función de θ y para cuatro valores diferentes del parámetro de mezcla p . El análisis general del comportamiento de las correlaciones para los diferentes protocolos es como sigue: las correlaciones transferidas por medio de swapping se degradan en general (la curva PSS es siempre menor o igual a la curva IS). Considerando la combinación de ambos protocolos, los resultados muestran que aplicar primero los filtros KLM-SLOCC optimiza las correlaciones con respecto a la combinación contraria swapping + KLM-SLOCC. Esto se evidencia en las

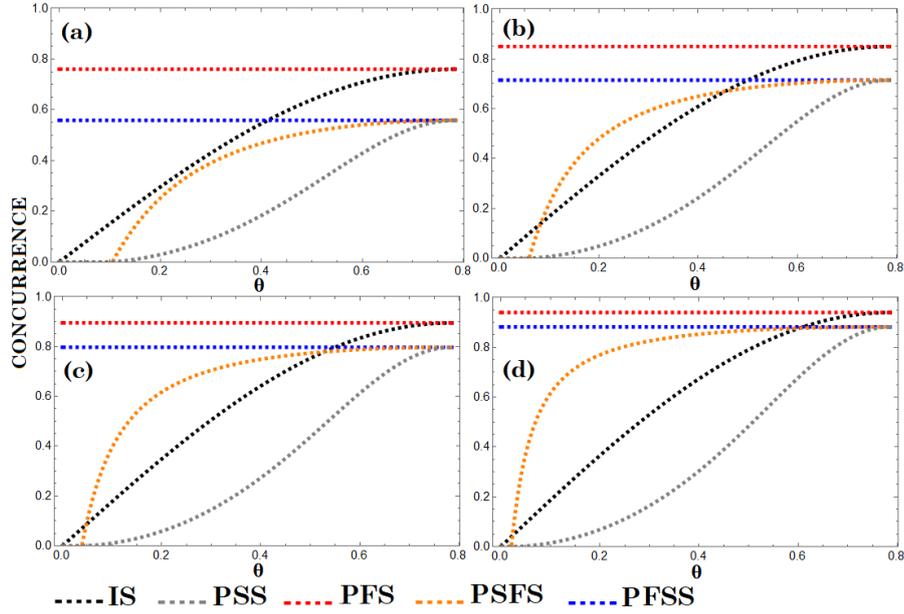


Figura 4.6: Concurrencia para (a) $p = 0,84$, (b) $p = 0,9$, (c) $p = 0,93$ y (d) $p = 0,96$

Figs. 4.3-4.7 dado que las curvas azules (PFSS) son siempre mayor o igual a las curvas naranjas (PSFS). Aquí, sin embargo, se produce un fenómeno interesante resultado del uso conjunto de los protocolos; para ambas combinaciones, existen regiones respecto a los parámetros θ y p , para las cuales las correlaciones se aumentan con respecto a las correlaciones de los estados iniciales en las fuentes, sugiriendo así un efecto positivo frente al protocolo swapping por sí solo. Nótese que en todas las Figuras, la curva horizontal azul corta en un punto (θ_c) a la curva negra, por lo que para la región $\theta \in [0, \theta_c]$ la respectiva correlación del estado final es mayor que la del inicial (el valor de θ_c es dependiente de p y diferente para cada correlación). Un comportamiento similar ocurre para el estado después de swapping + KLM-SLOCC (curvas naranjas), cuyas regiones de mejoría no ocurren para todo p , por ejemplo, en el panel (a) de cada Figura, esta curva no sobrepasa la respectiva curva IS.

Los efectos de los diferentes protocolos en las Figs. 4.3-4.7, ocurren obedeciendo la jerarquía de correlaciones mostrada en la Fig. 2.1. En particular, la mejoría en las correlaciones finales respecto a las del estado inicial se presenta primero en la obesidad cuántica y ligeramente después para la concurrencia. Compárese por ejemplo el punto de corte entre las curvas PSFS y PFSS con respecto a la curva IS en las Figs. 4.6(b) y 4.7(b). Así mismo, se observa que no-localidad CHSH, EPR-steering y UFT son activadas por la combinación conjunta de los protocolos. Es decir, la región de estados que inicialmente no tienen el recurso físico (la respectiva correlación), o que pierden dicho recurso por la acción meramente de swapping, se disminuye al combinar los protocolos.

Los efectos discutidos sobre las correlaciones cuánticas, ocurren de tal manera que el má-

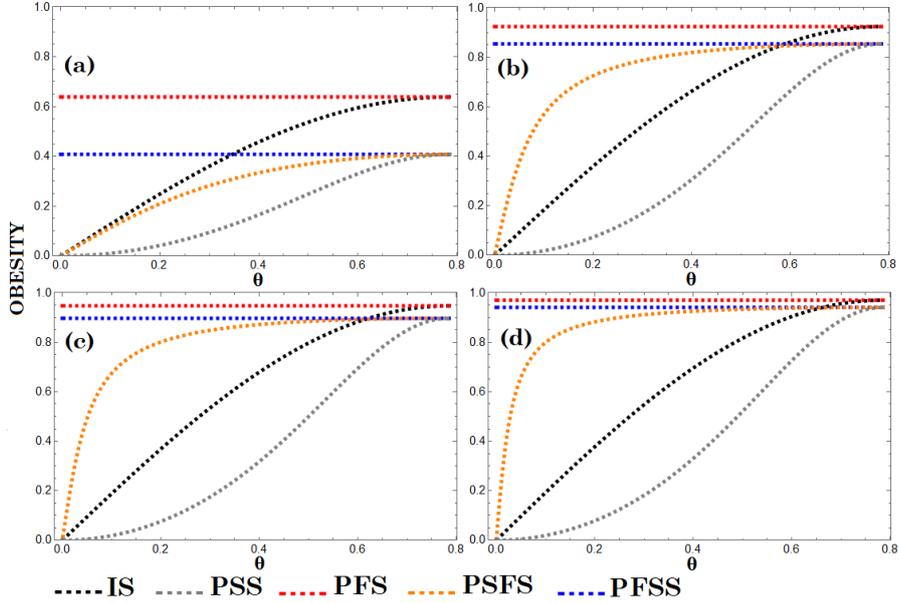


Figura 4.7: Obesidad para (a) $p = 0,55$, (b) $p = 0,9$, (c) $p = 0,93$ y (d) $p = 0,96$

ximo de correlación alcanzado después de la combinación de protocolos está limitado superiormente por la correlación en el estado inicial revelada por los filtros KLM-SLOCC. Esto es, como se aprecia en las Figs. 4.3-4.7, la curva roja (PFS) es la que toma mayor valor en todos los casos. Las combinaciones de protocolos estudiadas, optimizan las correlaciones de tal forma que solamente para $p = 1$ igualan el respectivo límite superior dado por PFS.

4.2.2. Dos estados diferentes con las mismas correlaciones

En esta ocasión consideramos la pareja de estados

$$\rho_{AB} = (1 - p) |\psi\rangle\langle\psi| + p |00\rangle\langle 00| \quad \rho_{CD} = (1 - p) |\psi\rangle\langle\psi| + p |11\rangle\langle 11|, \quad (4.6)$$

donde $|\psi\rangle = \sin \theta |01\rangle + \cos \theta |10\rangle$, $p \in [0, 1]$ y $\theta \in [0, \pi/2]$. Aunque ρ_{AB} y ρ_{CD} son diferentes, presentan un comportamiento igual en sus correlaciones cuánticas.

Como se muestra para CHSH (Fig. 4.8(a) y (b)), y para concurrencia en la Fig. 4.8(c) y (d), los filtros locales óptimos KLM-SLOCC llevan a las correlaciones a su valor máximo (curva roja para PFS). Esto hace que la combinación de swapping y filtros generen siempre máximas correlaciones, aun cuando éstas se deterioran por el efecto específico del swapping; la curva PSS (gris) evidencia que las correlaciones se degradan debido a swapping a medida que el valor de θ aumenta. El comportamiento de EPR-steering y UFT es similar al de CHSH, mientras que el de la obesidad cuántica es similar al de la concurrencia, razón por la cual no se grafican para

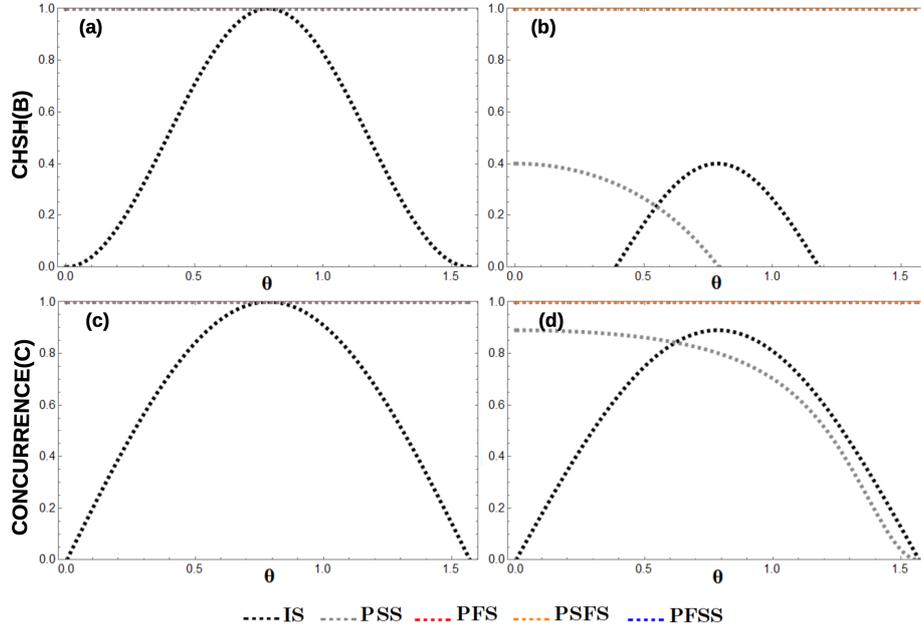


Figura 4.8: Comportamiento de CHSH y Concurrencia como función de θ para $p = 0$ ((a) y (c)) y $p = 0,01$ ((b) y (d)). El estado $|\psi^+\rangle$ ha sido usado para la medida en BC del swapping.

estos estados.

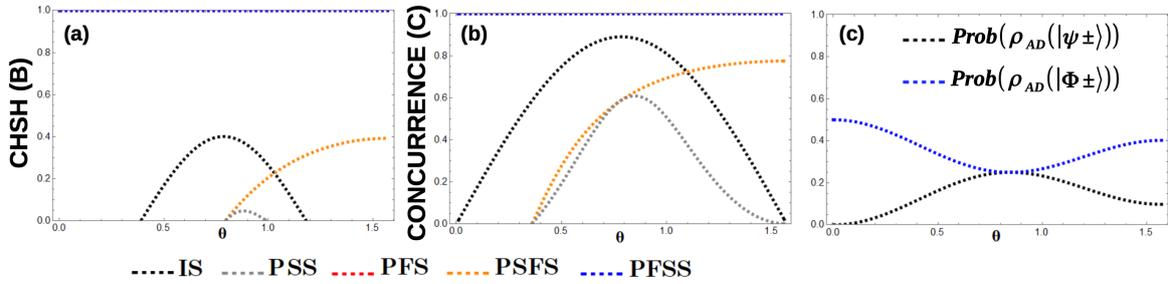


Figura 4.9: Comportamiento de (a) CHSH y (b) concurrencia cuando el protocolo swapping hace uso del estado $|\Phi^+\rangle$ para la proyección en BC y con $p = 0,11$. En (c) se muestra la probabilidad de ocurrencia de la medida con $|\psi^+\rangle$ (curva negra) y $|\Phi^+\rangle$ (curva azul).

La explicación del comportamiento asimétrico de las correlaciones después del swapping se encuentra en la escogencia del proyector de Bell. Recordemos que al final del protocolo swapping, el estado ρ_{AD} se encontrará con una probabilidad $Prob = \text{Tr} [\Pi_i \rho_{ABCD}]$, en uno de los cuatro estados de la Ec. (3.1). Para el caso de la Fig. 4.8 se ha usado el proyector $|\psi^+\rangle$ (el mismo resultado se obtiene con $|\psi^-\rangle$). El perfil de las correlaciones cambia al seleccionar el otro par de proyectores de Bell, como se muestra en la Fig. 4.9, el deterioro de las correlaciones

es mayor al proyectar sobre $|\Phi^\pm\rangle$, aunque su perfil es más parecido al de las correlaciones del estado inicial. En este escenario la asimetría respecto a θ aparece después de incluir el efecto de los filtros locales (curva naranja - PSFS). Un aspecto importante de los procesos que involucran un esquema de medida es la relación o ligadura de los estados post-medida y su probabilidad de ocurrencia. Como se muestra en la Fig. 4.9(c), la probabilidad de obtener el estado proyectado sobre $|\Phi^\pm\rangle$ (curva azul) es mayor que la de obtener el estado proyectado con $|\psi^\pm\rangle$ (curva negra). Sin embargo, es para éste último que se obtienen los mayores valores de correlaciones después de swapping.

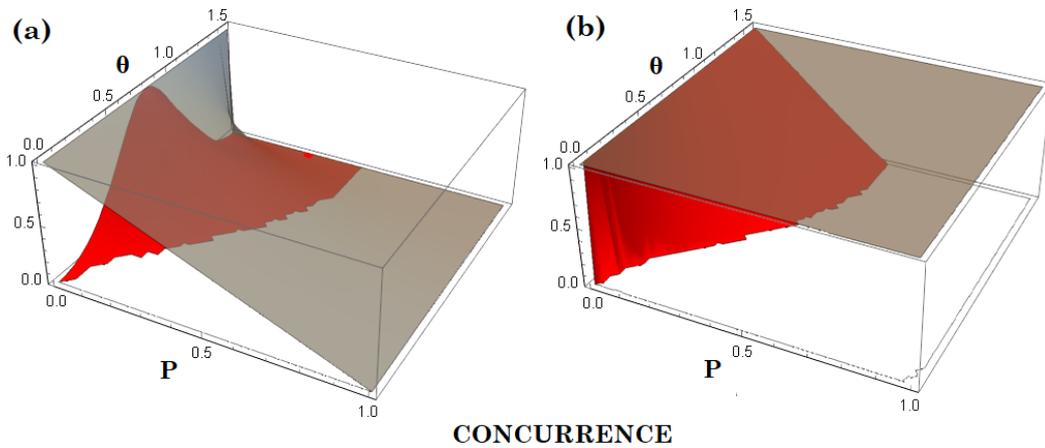


Figura 4.10: **(a)**: Concurrencia para estado obtenido después del protocolo swapping entre ρ_{AB} y ρ_{CD} utilizando dos proyectores tipo Bell distintos. **(b)**: Concurrencia para estado obtenido después del proceso swapping + KLM-SLOCC utilizando dos proyectores tipo Bell distintos. $|\psi^+\rangle$ (Gris) y $|\Phi^+\rangle$ (Rojo).

Con el fin de extender el análisis sobre la implicación de cambiar los proyectores de la base de Bell, en la Fig. 4.10 presentamos la concurrencia en función de θ y p , para el estado post-medida con proyector $|\psi^+\rangle$ (superficie gris) y $|\Phi^+\rangle$ (superficie roja). Nótese que tanto para swapping (Fig. 4.10(a)) como para el protocolo conjunto swapping + KLM-SLOCC (Fig. 4.10(b)), el escenario óptimo de correlaciones se obtienen con el proyector $|\psi^+\rangle$. Incluso, en el último caso, para cualquier configuración de parámetros, el resultado es el máximo de correlación posible.

4.3. Escenario 3: Estados iniciales y medidas proyectivas generales

Resultado 3: Sean ρ_{AB} y ρ_{CD} los estados generales en las fuentes caracterizados por (\vec{a}, \vec{b}, T) y (\vec{q}, \vec{p}, S) , respectivamente. Considerando el conjunto de POVM $\{E_{\rho_{BC}}, \{E_{\mathbb{1}-\rho_{BC}}\}\}$, donde $\sqrt{E_{\rho_{BC}}} = \mathbb{1}^A \otimes \rho_{BC} \otimes \mathbb{1}^D$ y ρ_{BC} un estado identificado con (\vec{e}, \vec{f}, N) . Entiéndase $\{E_{\mathbb{1}-\rho_{BC}}\}$ como el resto de elementos POVM tal que $\sum_i E_i = \mathbb{1}$. Entonces, el estado ρ_{AD} después del swapping está determinado por

$$\rho_{AD} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AD} + \vec{u} \cdot \sigma^A \otimes \mathbb{1}^D + \mathbb{1}^A \otimes \vec{v} \cdot \sigma^D + \sum_{in} H_{in} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D \right), \quad (4.7)$$

donde

$$\vec{u} = \frac{\vec{a} + T\vec{e} + (\vec{q} \cdot \vec{f})\vec{a} + TN\vec{q}}{1 + \vec{b} \cdot \vec{e} + \vec{q} \cdot \vec{f} + \vec{b} \cdot (N\vec{q})} \quad \vec{v} = \frac{\vec{p} + (\vec{b} \cdot \vec{e})\vec{p} + S^T \vec{f} + S^T N^T \vec{b}}{1 + \vec{b} \cdot \vec{e} + \vec{q} \cdot \vec{f} + \vec{b} \cdot (N\vec{q})},$$

$$H = \frac{\vec{a}\vec{p}^T + (T\vec{e})\vec{p}^T + (\vec{a}\vec{f}^T)S + TNS}{1 + \vec{b} \cdot \vec{e} + \vec{q} \cdot \vec{f} + \vec{b} \cdot (N\vec{q})}.$$

Con el objetivo de brindar una versión más amplia del protocolo swapping, en esta Sección consideramos conjuntos de medidas generalizadas o también conocidas como medidas cuyos valores son de operadores semi-definidos positivos (POVM por sus siglas en Inglés).

Sea entonces el estado conjunto ρ_{ABCD} dado por el producto tensorial de la pareja de estados iniciales y diferentes ρ_{AB} y ρ_{CD} tal y como sigue

$$\rho_{ABCD} = \frac{1}{4} \sum_{ij} R_{ij}^{AB} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \otimes \frac{1}{4} \sum_{mn} R_{mn}^{CD} \sigma_m^C \otimes \sigma_n^D, \quad i, j, m, n = 0, 1, 2, 3,$$

donde R^{AB} y R^{CD} representan matrices 4×4 dadas por

$$R^{AB} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{b}^T \\ \vec{a} & T \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R^{CD} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{p}^T \\ \vec{q} & S \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, utilizando el operador de medida

$$\sqrt{E_{\rho_{BC}}} = \mathbb{1}^A \otimes \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{BC} + \vec{e} \cdot \sigma^B \otimes \mathbb{1}^C + \mathbb{1}^B \otimes \vec{f} \cdot \sigma^C + \sum_{kl} N_{kl} \sigma_k^B \otimes \sigma_l^C \right) \otimes \mathbb{1}^D, \quad (4.8)$$

o, equivalentemente

$$\sqrt{E_{\rho_{BC}}} = \mathbb{1}^A \otimes \frac{1}{4} \sum_{kl} R_{kl}^{BC} \sigma_k^B \otimes \sigma_l^C \otimes \mathbb{1}^D \quad k, l = 0, 1, 2, 3, \quad (4.9)$$

con

$$R^{BC} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{f}^T \\ \vec{e} & N \end{pmatrix}.$$

El estado resultante después del swapping sin normalizar estará dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{AD} &= \text{Tr}_{BC} \left[\left(\frac{1}{4} \sum_{ij} R_{ij}^{AB} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \otimes \frac{1}{4} \sum_{mn} R_{mn}^{CD} \sigma_m^C \otimes \sigma_n^D \right) \left(\mathbb{1}^A \otimes \frac{1}{4} \sum_{kl} R_{kl}^{BC} \sigma_k^B \otimes \sigma_l^C \otimes \mathbb{1}^D \right) \right], \\ \tilde{\rho}_{AD} &= \text{Tr}_{BC} \left[\frac{1}{64} \sum_{ij} \sum_{mn} \sum_{kl} R_{ij}^{AB} R_{mn}^{CD} R_{kl}^{BC} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \sigma_k^B \otimes \sigma_m^C \sigma_l^C \otimes \sigma_n^D \right]. \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad

$$\text{Tr} [\sigma_i \sigma_j] = 2\delta_{ij} \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad \sigma_0 = \mathbb{1}_2,$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{AD} &= \frac{1}{16} \sum_{ij} \sum_{mn} \sum_{kl} \delta_{jk} \delta_{ml} R_{ij}^{AB} R_{mn}^{CD} R_{kl}^{BC} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D, \\ \tilde{\rho}_{AD} &= \frac{1}{16} \sum_{ij} \sum_{mn} R_{ij}^{AB} R_{mn}^{CD} R_{jm}^{BC} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D, \\ \tilde{\rho}_{AD} &= \frac{1}{16} \sum_{in} \sum_{jm} R_{ij}^{AB} R_{mn}^{CD} R_{jm}^{BC} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D, \end{aligned}$$

donde es posible verificar por expansión de las sumatorias que

$$\sum_{in} \sum_{jm} R_{ij}^{AB} R_{mn}^{CD} R_{jm}^{BC} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D = \sum_{in} (R^{AB} R^{BC} R^{CD})_{in} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D.$$

Por lo tanto

$$\tilde{\rho}_{AD} = \frac{1}{16} \sum_{in} (R^{AB} R^{BC} R^{CD})_{in} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D = \frac{1}{4} \sum_{in} \frac{1}{4} (R^{AB} R^{BC} R^{CD})_{in} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D.$$

Con lo cual, podemos definir la nueva matriz no normalizada como

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{AD} &= \frac{1}{4} R^{AB} R^{BC} R^{CD}. \\ \tilde{R}^{AD} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \vec{b}^T \\ \vec{a} & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{f}^T \\ \vec{e} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{p}^T \\ \vec{q} & S \end{pmatrix}. \\ \tilde{R}^{AD} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \vec{b}^T \vec{e} + \vec{f}^T \vec{q} + \vec{b}^T N \vec{q} & \vec{p}^T + \vec{b}^T \vec{e} \vec{p}^T + \vec{f}^T S + \vec{b}^T N S \\ \vec{a} + T \vec{e} + \vec{a} \vec{f}^T \vec{q} + T N \vec{q} & \vec{a} \vec{p}^T + T \vec{e} \vec{p}^T + \vec{a} \vec{f}^T S + T N S \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado, el estado no normalizado en términos de la matriz \tilde{R}^{AD} está dado por

$$\tilde{\rho}_{AD} = \frac{1}{4} \sum_{in} \tilde{R}_{in}^{AD} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D.$$

Finalmente, el estado normalizado y final después del protocolo swapping estará dado por

$$\rho_{AD} = \frac{1}{4 \tilde{R}_{00}^{AD}} \sum_{in} \tilde{R}_{in}^{AD} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D. \quad (4.10)$$

Tenemos entonces que

$$\tilde{R}_{00}^{AD} = \frac{1}{4} (1 + \vec{b}^T \vec{e} + \vec{f}^T \vec{q} + \vec{b}^T N \vec{q}) = \frac{1}{4} (1 + \vec{b} \cdot \vec{e} + \vec{q} \cdot \vec{f} + \vec{b} \cdot (N \vec{q})).$$

Equivalentemente, podemos expresar el estado ρ_{AD} de la siguiente forma

$$\rho_{AD} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AD} + \vec{u} \cdot \sigma^A \otimes \mathbb{1}^D + \mathbb{1}^A \otimes \vec{v} \cdot \sigma^D + \sum_{in} H_{in} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D \right), \quad (4.11)$$

con vectores locales de Bloch (\vec{u}, \vec{v}) y matriz de correlación H como se muestra en el **Resultado 3**.

Es claro que los resultados de las secciones anteriores 4.1 y 4.2 se deducen sencillamente de la Ec. (4.10) haciendo cero los vectores de Bloch del elemento proyector ($\vec{e} = \vec{f} = 0$) y eligiendo correctamente la matriz de correlación N para cada estado de Bell. De igual forma, la Ec. (4.10)

podría ser mas realista con los resultados experimentales, dado que al efectuar un experimento de entanglement swapping, el resultado esperado se podría ver afectado por influencia de ruido, lo cual puede ser modelado con la Ec. (4.10) utilizando medidas proyectivas diferentes a las de Bell cuyo entrelazamiento no sea máximo.

Con el fin de ilustrar el efecto sobre las correlaciones de un conjunto de medidas no necesariamente entrelazadas, examinamos la influencia de escoger un conjunto de proyectores parcialmente entrelazados de la forma $|\psi(\alpha)\rangle = \cos\alpha|00\rangle + \sin\alpha|11\rangle$ y los demás elementos respectivamente ortonormales. Considerando la pareja de estados dada por la Ec. (4.5) para $p = 0,96$, y llevando a cabo el protocolo swapping con el proyector parcialmente entrelazado $|\psi(\alpha)\rangle$ donde $\alpha = \pi/6$, del resultado Ec. (4.10), se obtiene el comportamiento mostrado en la Fig. 4.11.

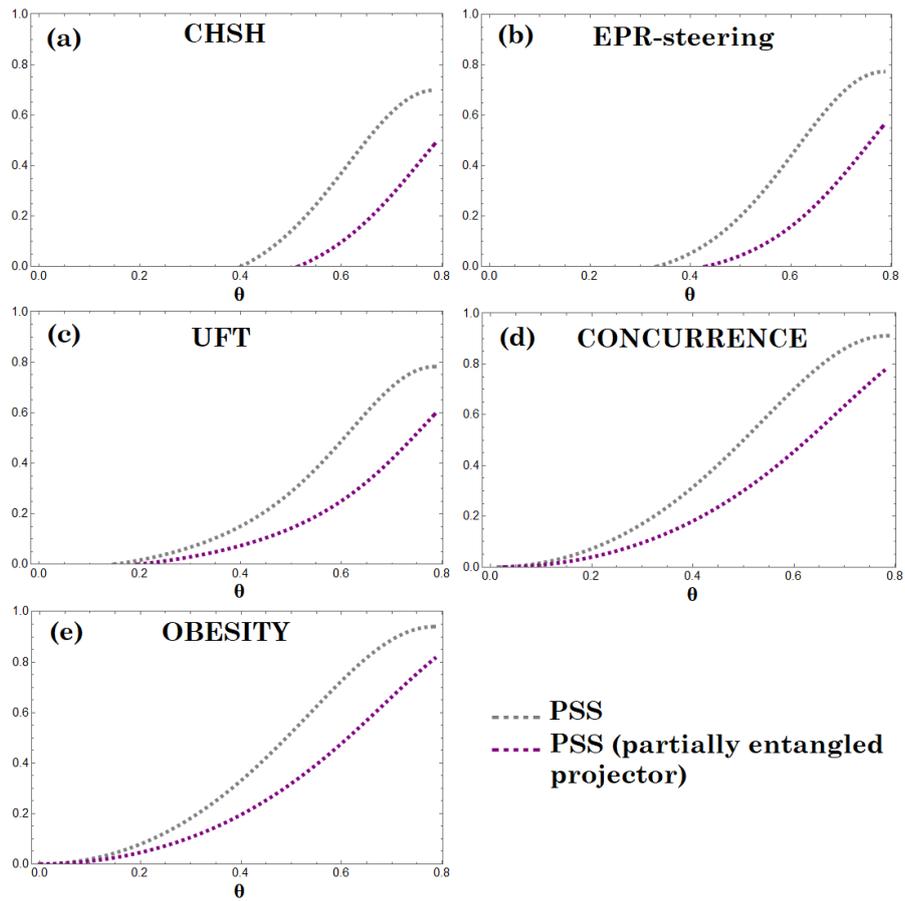


Figura 4.11: La línea punteada gris representa $\alpha = \pi/4$ (proyector de Bell) y la línea punteada morada representa $\alpha = \pi/6$ (proyector parcialmente entrelazado)

La curva morada de la Fig. 4.11 muestra que utilizar un proyector diferente al conjunto tipo Bell, provoca efectos degradantes en las correlaciones cuánticas. Esto implica que las correlaciones cuánticas de los estados resultantes de los procesos swapping + KLM-SLOCC y KLM-SLOCC + swapping también resultarán degradadas por el cambio de proyector. De ahí que, el conjunto de proyectores $\{|\psi^\pm\rangle, |\Phi^\pm\rangle\}$ sean por el momento los más óptimos para llevar a cabo el protocolo swapping.

Capítulo V

Análisis de obesidad cuántica bajo la influencia de los protocolos swapping y filtros locales

En esta Sección, se calcula la forma explícita de la obesidad cuántica para el estado bipartito resultante luego del protocolo swapping al utilizar medidas proyectivas generales y además se realizan simulaciones para respaldar y apoyar los resultados analíticos que permiten concluir que el proceso KLM-SLOCC + swapping es mejor que el proceso swapping + KLM-SLOCC para la familia de estados tipo X.

5.1. Resultado analítico para obesidad cuántica

Resultado 4: Sea ρ_{AD} el estado después del swapping dado por la Ec. (4.10) y $\frac{1}{4}R^{AB}R^{BC}R^{CD}$ su matriz en la representación R . Entonces su obesidad cuántica estará dada por

$$\Omega^{AD} = \frac{1}{|4\widetilde{R}_{00}^{AD}|} \Omega^{AB} \Omega^{BC} \Omega^{CD}. \quad (5.1)$$

Varios autores como Kirby *et.al* [35] han estudiado el efecto que tiene el protocolo swapping sobre la concurrencia de estados bipartitos y demostraron parcialmente que si consideramos dos estados iniciales Bell diagonal diferentes ρ_{AB} y ρ_{CD} . Entonces la concurrencia del estado ρ_{AD} después del protocolo swapping estará limitada por el producto de las concurrencias de los estados iniciales antes del protocolo.

$$C_{AB}C_{CD} \geq C_{AD}. \quad (5.2)$$

La desigualdad anterior es importante dado que nos permite saber de que manera está relacionada la concurrencia del estado final después del protocolo swapping con la concurrencia de los estados iniciales. Aunque, dicha desigualdad no proporciona un valor exacto para la concurrencia del estado ρ_{AD} sino una cota superior.

Debido a lo anterior e inspirados en el hecho de que la obesidad cuántica cumple las propiedades mencionadas en la sub-sección 2.5, hemos obtenido una expresión cerrada para la obesidad cuántica del estado ρ_{AD} después del protocolo swapping presentado en la Ec. (4.10), en términos de las obesidades de los estados iniciales generales ρ_{AB} y ρ_{CD} y de la obesidad cuántica intrínseca de la parte BC de la medida utilizada para llevar a cabo el protocolo swapping, la cual no debe ser necesariamente un proyector perteneciente a la base de Bell, es decir, pueden ser proyectores con entrelazamiento menor que uno. En base a lo anterior, utilizamos el resultado de la sección 4.3 para llevar a cabo la siguiente demostración.

Sea la pareja de estados iniciales generales

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \sum_{ij} R_{ij}^{AB} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \quad \rho_{CD} = \frac{1}{4} \sum_{mn} R_{mn}^{CD} \sigma_m^C \otimes \sigma_n^D \quad i, j, m, n = 0, 1, 2, 3,$$

donde

$$R^{AB} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{b}^T \\ \vec{a} & T \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R^{CD} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{p}^T \\ \vec{q} & S \end{pmatrix}.$$

Para llevar a cabo el protocolo swapping, utilizamos un operador general de la forma

$$\sqrt{E_{\rho_{BC}}} = \mathbb{1}^A \otimes \frac{1}{4} \sum_{kl} R_{kl}^{BC} \sigma_k^B \otimes \sigma_l^C \otimes \mathbb{1}^D \quad k, l = 0, 1, 2, 3,$$

con

$$R^{BC} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{f}^T \\ \vec{e} & N \end{pmatrix}.$$

Obtenemos que el estado luego del protocolo swapping entre ρ_{AB} y ρ_{CD} estará dado por la Ec. (4.10)

$$\rho_{AD} = \frac{1}{4 \tilde{R}_{00}^{AD}} \sum_{in} \tilde{R}_{in}^{AD} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D,$$

donde

$$\tilde{R}^{AD} = \frac{1}{4} (R^{AB} R^{BC} R^{CD}) \quad \text{y} \quad \tilde{R}_{00}^{AD} = \frac{1}{4} (1 + \vec{b} \cdot \vec{e} + \vec{q} \cdot \vec{f} + \vec{b} \cdot (N\vec{q})).$$

Por lo tanto, la obesidad cuántica del estado ρ_{AD} tendrá la forma

$$\Omega^{AD} = \left| \det \left\{ \begin{array}{c} \tilde{R}^{AD} \\ \tilde{R}_{00}^{AD} \end{array} \right\} \right|^{1/4} = \frac{1}{|4\tilde{R}_{00}^{AD}|} |\det \{R^{AB} R^{BC} R^{CD}\}|^{1/4},$$

$$\Omega^{AD} = \frac{1}{|4\tilde{R}_{00}^{AD}|} |\det \{R^{AB}\}|^{1/4} |\det \{R^{BC}\}|^{1/4} |\det \{R^{CD}\}|^{1/4}.$$

Con lo cual obtenemos finalmente que la obesidad cuántica de ρ_{AD} estará dada por (**Resultado 4.**)

$$\Omega^{AD} = \frac{1}{|4\tilde{R}_{00}^{AD}|} \Omega^{AB} \Omega^{BC} \Omega^{CD}. \quad (5.3)$$

Este es un resultado general y exacto para la obesidad cuántica. Nótese que la Ec. (5.3) permite calcular de forma exacta el valor de la obesidad que es transmitida mediante el protocolo swapping.

En el escenario original de swapping, es decir, considerando una base tipo Bell para el proceso de medida, se cumple que $\Omega^{BC} = 1$ y los vectores de Bloch \vec{e} y \vec{f} son iguales a cero. Por lo tanto, obtenemos que la obesidad cuántica del estado ρ_{AD} es de la forma

$$\Omega^{AD} = \frac{1}{|1 + \vec{b} \cdot (N\vec{q})|} \Omega^{AB} \Omega^{CD}, \quad (5.4)$$

donde N es la matriz de correlación de cualquiera de los estados de Bell. De aquí es claro que, de acuerdo al factor en la Ec. (5.4), si $\vec{b} = 0$ o $\vec{q} = 0$ se cumple que

$$\Omega^{AD} = \Omega^{AB} \Omega^{CD} \quad (5.5)$$

Similarmente, la obesidad cuántica está acotada inferiormente como sigue:

$$\frac{1}{2} \Omega^{AB} \Omega^{CD} \leq \Omega^{AD} \quad (5.6)$$

Esto se debe a que el máximo valor que puede tomar el producto $\vec{b} \cdot (N\vec{q})$ es uno.

Cabe resaltar que nuestro resultado para obesidad cuántica es válido para estados iniciales arbitrarios, caso contrario al resultado para concurrencia de la Ec. (5.2), que está restringido a estados Bell diagonal y solo proporciona una cota superior para la concurrencia del estado ρ_{AD} . De esta forma, y teniendo en cuenta que concurrencia \subseteq obesidad, nuestro **Resultado 4.** sugiere una generalización de la cota superior para la concurrencia de la forma

$$C_{AB} C_{BC} C_{CD} \geq C_{AD}, \quad (5.7)$$

es decir, que la cota superior para la concurrencia transmitida en swapping está también determinada por la cantidad de entrelazamiento contenido en los elementos del conjunto de medidas utilizados en la parte BC .

De igual forma, con el resultado de la Ec. (5.3) es posible obtener de forma analítica la obesidad cuántica para estados tipo X (Anexo B) luego de los procesos KLM-SLOCC + swapping y swapping + KLM-SLOCC tal y como se presenta en la sección siguiente.

5.2. Obesidad para estados tipo X luego de $F+S$ y $S+F$

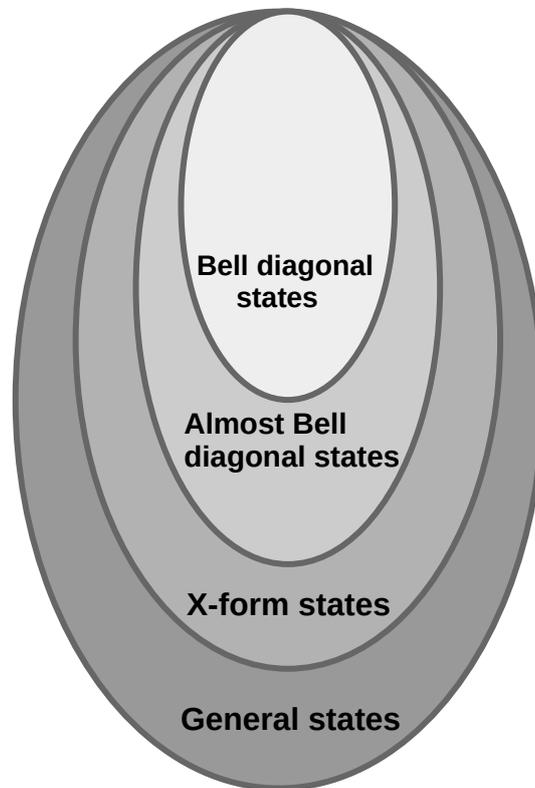


Figura 5.1: Jerarquía de grupos de estados cuánticos

La Fig.5.1 muestra que el grupo de estados tipo X, son un caso especial de los estados generales bipartitos. Similarmente, el grupo de estados “casi Bell diagonal” son un caso especial de los estados tipo X y finalmente los estados Bell diagonal son el grupo de estados más reducidos en esta clasificación. Algunos de estos grupos de estados serán utilizados en los siguientes desarrollos.

Para llevar a cabo los cálculos de esta sección, utilizamos los resultados de las Secciones 4.3, 5.1, la teoría del Anexo C y la teoría de operaciones locales en la representación R de la Sección 3.2.1.

5.2.1. Obesidad bajo el efecto conjunto swapping + KLM-SLOCC ($S+F$)

Resultado 5: Sean dos estados iniciales tipo X e iguales $\rho_{AB} = \rho_{CD}$. Entonces la obesidad cuántica del estado luego del proceso $S+F$ estará dada por

$$\Omega_{SF}^{AD} = g(f_A, f_B, \rho_{AD})\Omega^2, \quad (5.8)$$

donde $g(f_A, f_B, \rho_{AD})$ puede tomar dos formas diferentes, es decir, si proyectamos en los estados de Bell $|\psi^+\rangle$ ó $|\psi^-\rangle$ toma la forma

$$\begin{aligned} g(f_A, f_B, \rho_{AD}) := & \\ & \frac{\rho_{11}^2 + \rho_{11}(\rho_{22} + \rho_{33}) + \rho_{44}(\rho_{33} + \rho_{44}) + \rho_{22}(2\rho_{33} + \rho_{44})}{2(\rho_{22}\rho_{33} - \rho_{11}\rho_{44})^2((\rho_{22} - \rho_{33})^2 - (\rho_{11} - \rho_{44})^2 - 1)} \times \\ & \times ((\rho_{11} + \rho_{44})\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \sqrt{(\rho_{11}^2 + \rho_{22}\rho_{33})(\rho_{44}^2 + \rho_{22}\rho_{33})}). \end{aligned}$$

Mientras que la proyección sobre los estados $|\Phi^+\rangle$ ó $|\Phi^-\rangle$ reduce el factor a

$$\begin{aligned} g(f_A, f_B, \rho_{AD}) := & \\ & \frac{(\rho_{22}^2 + \rho_{22}\rho_{44} + \rho_{33}(\rho_{33} + \rho_{44}) + \rho_{11}(\rho_{22} + \rho_{33} + 2\rho_{44}))/2}{(1 + (\rho_{22} - \rho_{33})^2 - (\rho_{11} - \rho_{44})^2)(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}(\rho_{22} + \rho_{33}) + \sqrt{(\rho_{22}^2 + \rho_{11}\rho_{44})(\rho_{33}^2 + \rho_{11}\rho_{44})})}. \end{aligned}$$

Tal y como se demostró anteriormente, la matriz R^{AD} después del swapping entre dos estados diferentes representados por las matrices R^{AB} y R^{CD} utilizando como medida la Ec. (4.9) esta dada por

$$R_S^{AD} = \frac{\tilde{R}_S^{AD}}{\tilde{R}_{S(00)}^{AD}}$$

con

$$\tilde{R}_S^{AD} = \frac{1}{4}(R^{AB}R^{BC}R^{CD}) \quad \tilde{R}_{S(00)}^{AD} = \frac{1}{4}(1 + \vec{b} \cdot \vec{e} + \vec{q} \cdot \vec{f} + \vec{b} \cdot (N\vec{q}))$$

donde $\tilde{R}_{S(00)}^{AD}$ es la componente (0,0) de la matriz \tilde{R}_S^{AD} . Por otro lado, la matriz R_S^{AD} después

de aplicar el KLM-SLOCC estará dada por

$$R_{SF}^{AD} = \frac{\Lambda_A R_S^{AD} \Lambda_B^T \det\{f_A\} \det\{f_B\}}{\text{Tr} \left[(f_A^\dagger f_A \otimes f_B^\dagger f_B) \rho_{AD} \right]}. \quad (5.9)$$

Utilizaremos por notación $\tilde{R}_{S(00)}^{AD} \rightarrow \tilde{R}_{SF(00)}^{AD}$ (aunque tienen el mismo valor). Aquí f_A, f_B son los filtros óptimos de ρ_{AD} que cumplen $f_i f_i \leq \mathbb{1}$ y los operadores $\Lambda_i = \Upsilon(f_i \otimes f_i^*) \Upsilon^\dagger / |\det\{f_i\}|$ son las transformaciones ortocronas de Lorentz que satisfacen $\det\{\Lambda_i\} = 1$ y $\Lambda_i^{00} \geq 0$. Similarmente, Υ está dado por

$$\Upsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La obesidad cuántica para el estado luego del proceso swapping + KLM-SLOCC esta dada por

$$\Omega_{SF}^{AD} = \left| \det \left\{ \frac{\Lambda_A R_S^{AD} \Lambda_B^T \det\{f_A\} \det\{f_B\}}{\text{Tr} \left[(f_A^\dagger f_A \otimes f_B^\dagger f_B) \rho_{AD} \right]} \right\} \right|^{1/4} = \frac{|\det\{f_A\} \det\{f_B\}|}{\left| \text{Tr} \left[(f_A^\dagger f_A \otimes f_B^\dagger f_B) \rho_{AD} \right] \right|} |\det\{R_S^{AD}\}|^{1/4}$$

$$\Omega_{SF}^{AD} = \frac{|\det\{f_A\} \det\{f_B\}|}{\left| 4\tilde{R}_{SF(00)}^{AD} \text{Tr} \left[(f_A^\dagger f_A \otimes f_B^\dagger f_B) \rho_{AD} \right] \right|} \Omega^{AB} \Omega^{BC} \Omega^{CD}. \quad (5.10)$$

La Ec. (5.10) representa la obesidad del estado ρ_{AD} luego del proceso swapping+KLM-SLOCC entre dos estados generales diferentes ρ_{AB} y ρ_{CD} utilizando como medida la Ec. (4.9). Por otra parte, para nuestro propósito consideraremos estados iniciales tipo X iguales $R^{AB} = R^{CD}$ dado que conocemos la forma explícita del KLM-SLOCC para esta familia de estados (ver Anexo C) y una medida proyectiva perteneciente a la base de Bell, es decir $\Omega^{BC} = 1$; por tanto Ω_{SF}^{AD} toma la forma

$$\Omega_{SF}^{AD} = \frac{|\det\{f_A\} \det\{f_B\}|}{\left| 4\tilde{R}_{SF(00)}^{AD} \text{Tr} \left[(f_A^\dagger f_A \otimes f_B^\dagger f_B) \rho_{AD} \right] \right|} \Omega^2, \quad (5.11)$$

donde $\Omega = \Omega^{AB} = \Omega^{CD}$. También cabe resaltar que en la Ec. (5.11) ρ_{AD} es la matriz densidad resultante del protocolo swapping cuando los estados iniciales ρ_{AB} y ρ_{CD} son iguales y f_A, f_B los filtros óptimos de ρ_{AD} . Similarmente, en Ec. (5.11) $\tilde{R}_{SF(00)}^{AD}$ toma el valor $\tilde{R}_{SF(00)}^{AD} =$

$\frac{1}{4}(1 + \vec{b} \cdot (N\vec{a}))$, dado que $\vec{f} = \vec{e} = 0$ cuando consideramos proyectores de la base de Bell. Siendo entonces nuestro factor

$$g(f_A, f_B, \rho_{AD}) = \frac{|\det\{f_A\} \det\{f_B\}|}{\left|4\tilde{R}_{SF(00)}^{AD} \text{Tr} \left[(f_A^\dagger f_A \otimes f_B^\dagger f_B) \rho_{AD} \right] \right|},$$

tenemos que para estados tipo X y los proyectores de Bell $|\psi_+\rangle$ y $|\psi_-\rangle$, éste se reduce a

$$\begin{aligned} g(f_A, f_B, \rho_{AD}) &:= \\ &\frac{\rho_{11}^2 + \rho_{11}(\rho_{22} + \rho_{33}) + \rho_{44}(\rho_{33} + \rho_{44}) + \rho_{22}(2\rho_{33} + \rho_{44})}{2(\rho_{22}\rho_{33} - \rho_{11}\rho_{44})^2((\rho_{22} - \rho_{33})^2 - (\rho_{11} - \rho_{44})^2 - 1)} \times \\ &\times ((\rho_{11} + \rho_{44})\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \sqrt{(\rho_{11}^2 + \rho_{22}\rho_{33})(\rho_{44}^2 + \rho_{22}\rho_{33})}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Mientras que para los proyectores de Bell $|\Phi_+\rangle$ y $|\Phi_-\rangle$ se reduce a

$$\begin{aligned} g(f_A, f_B, \rho_{AD}) &:= \\ &\frac{\rho_{22}^2 + \rho_{22}\rho_{44} + \rho_{33}(\rho_{33} + \rho_{44}) + \rho_{11}(\rho_{22} + \rho_{33} + 2\rho_{44})}{2(1 + (\rho_{22} - \rho_{33})^2 - (\rho_{11} - \rho_{44})^2)(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}(\rho_{22} + \rho_{33}) + \sqrt{(\rho_{22}^2 + \rho_{11}\rho_{44})(\rho_{33}^2 + \rho_{11}\rho_{44})})}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Lo anterior implica que la obesidad para el estado luego del proceso swapping + KLM-SLOCC depende del proyector de la base de Bell utilizado. ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{33} y ρ_{44} son las componentes de la diagonal de alguno de los estados tipo X inicial, dado que son iguales $\rho_{AB} = \rho_{CD}$ (ver Anexo B), que satisfacen

$$\frac{1}{2} \left(\rho_{11} + \rho_{44} \pm \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + 4\rho_{14}^2} \right) \geq 0, \quad \frac{1}{2} \left(\rho_{22} + \rho_{33} \pm \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4\rho_{23}^2} \right) \geq 0. \quad (5.14)$$

5.2.2. Obesidad bajo el efecto conjunto KLM-SLOCC + swapping ($F+S$)

Resultado 6: Sean dos estados iniciales tipo X e iguales $\rho_{AB} = \rho_{CD}$. Entonces la obesidad cuántica del estado luego del proceso $F+S$ estará dada por

$$\Omega_{FS}^{AD} = g(f'_A, f'_B, \rho_{AB})\Omega^2, \quad (5.15)$$

donde $g(f'_A, f'_B, \rho_{AB})$ toma una única forma, independiente del estado de Bell utilizado como proyector. Esto es, después del proceso $F+S$, el factor en la Ec. (5.15), está dado por

$$g(f'_A, f'_B, \rho_{AB}) = \frac{1}{4(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} + \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}})^2}.$$

Las matrices R^{AB} y R^{CD} después de ser sometidas al KLM-SLOCC estarán dadas por

$$R_F^{AB} = \frac{\Lambda'_A R^{AB} \Lambda_B'^T \det\{f'_A\} \det\{f'_B\}}{\text{Tr} \left[(f_A'^\dagger f'_A \otimes f_B'^\dagger f'_B) \rho_{AB} \right]}, \quad (5.16)$$

$$R_F^{CD} = \frac{\Lambda''_A R^{CD} \Lambda_B''^T \det\{f''_A\} \det\{f''_B\}}{\text{Tr} \left[(f_A''^\dagger f''_A \otimes f_B''^\dagger f''_B) \rho_{CD} \right]}. \quad (5.17)$$

donde f'_A, f'_B y f''_A, f''_B son los filtros óptimos de ρ_{AB} y ρ_{CD} respectivamente. Por lo tanto, luego de hacer swapping entre los estados representados por las matrices R_F^{AB} y R_F^{CD} utilizando como proyector la Ec. (4.9), obtenemos que la matriz R_{FS}^{AD} estará dada por

$$R_{FS}^{AD} = \frac{\tilde{R}_{FS}^{AD}}{\tilde{R}_{FS(00)}^{AD}}.$$

con

$$\tilde{R}_{FS}^{AD} = \frac{1}{4}(R_F^{AB} R^{BC} R_F^{CD}).$$

y $\tilde{R}_{FS(00)}^{AD}$ la componente (0,0) de la matriz \tilde{R}_{FS}^{AD} . Por consiguiente, la obesidad cuántica del estado luego del proceso KLM-SLOCC + swapping estará dada por

$$\Omega_{FS}^{AD} = \left| \det \left\{ \frac{\Lambda'_A R^{AB} \Lambda_B'^T R^{BC} \Lambda''_A R^{CD} \Lambda_B''^T \det\{f'_A\} \det\{f'_B\} \det\{f''_A\} \det\{f''_B\}}{4\tilde{R}_{FS(00)}^{AD} \text{Tr} \left[(f_A'^\dagger f'_A \otimes f_B'^\dagger f'_B) \rho_{AB} \right] \text{Tr} \left[(f_A''^\dagger f''_A \otimes f_B''^\dagger f''_B) \rho_{CD} \right]} \right\} \right|^{1/4},$$

$$\Omega_{FS}^{AD} = \frac{|\det\{f'_A\} \det\{f'_B\} \det\{f''_A\} \det\{f''_B\}|}{\left|4\tilde{R}_{FS(00)}^{AD} \text{Tr} \left[(f'_A f'_A \otimes f'_B f'_B) \rho_{AB} \right] \text{Tr} \left[(f''_A f''_A \otimes f''_B f''_B) \rho_{CD} \right] \right|} |\det\{R^{AB} R^{BC} R^{CD}\}|^{1/4},$$

$$\Omega_{FS}^{AD} = \frac{|\det\{f'_A\} \det\{f'_B\} \det\{f''_A\} \det\{f''_B\}|}{\left|4\tilde{R}_{FS(00)}^{AD} \text{Tr} \left[(f'_A f'_A \otimes f'_B f'_B) \rho_{AB} \right] \text{Tr} \left[(f''_A f''_A \otimes f''_B f''_B) \rho_{CD} \right] \right|} \Omega^{AB} \Omega^{BC} \Omega^{CD}.$$
(5.18)

La Ec. (5.18) representa la obesidad del estado resultante del proceso KLM-SLOCC+swapping entre dos estados generales diferentes ρ_{AB} y ρ_{CD} . Por otro lado, para nuestro propósito consideramos estados tipo X iguales $R^{AB} = R^{CD}$ dado que conocemos la forma explícita del KLM-SLOCC para esta familia de estados (ver Anexo C) y el proyector perteneciente a la base de Bell, es decir, $\Omega^{BC} = 1$. Entonces Ω_{FS}^{AD} toma la forma

$$\Omega_{FS}^{AD} = \frac{|\det\{f'_A\} \det\{f'_B\}|^2}{\left|4\tilde{R}_{FS(00)}^{AD} \left| \text{Tr} \left[(f'_A f'_A \otimes f'_B f'_B) \rho_{AB} \right] \right| \right|^2} \Omega^2,$$
(5.19)

donde $\Omega = \Omega^{AB} = \Omega^{CD}$. f'_A, f'_B son los filtros óptimos de ρ_{AB} ó ρ_{CD} . Nuestro factor toma la forma

$$g(f'_A, f'_B, \rho_{AB}) = \frac{|\det\{f'_A\} \det\{f'_B\}|^2}{\left|4\tilde{R}_{FS(00)}^{AD} \left| \text{Tr} \left[(f'_A f'_A \otimes f'_B f'_B) \rho_{AB} \right] \right| \right|^2}$$

el cual, para estados tipo X y cualquiera de los cuatro proyectores de Bell, se reduce a

$$g(f'_A, f'_B, \rho_{AB}) := \frac{1}{4(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} + \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}})^2}.$$
(5.20)

Esto implica que la obesidad para el estado luego del proceso KLM-SLOCC + swapping no depende del proyector de la base de Bell utilizado.

5.2.3. Comparación de los factores $g(f_A, f_B, \rho_{AD})$ y $g(f'_A, f'_B, \rho_{AB})$ para estados tipo X

Resultado 7: Se presentan simulaciones numéricas que demuestran que el factor $g(f'_A, f'_B, \rho_{AB})$ es siempre mayor que los dos posibles valores que puede tomar el factor $g(f_A, f_B, \rho_{AD})$. Lo cual demuestra que para estados tipo X el proceso $F+S$ genera más obesidad cuántica que el proceso $S+F$.

Con el fin de comparar los resultados anteriores, es decir las Ec. (5.11) y Ec.(5.19) utilizaremos los siguientes factores; El factor de la Ec. (5.11) lo denotaremos como

$$g(f_A, f_B, \rho_{AD}) := \frac{|\det\{f_A\} \det\{f_B\}|}{\left|4\tilde{R}_{00}^{AD} \text{Tr} \left[(f_A^\dagger f_A \otimes f_B^\dagger f_B) \rho_{AD} \right] \right|}. \quad (5.21)$$

y el factor de la Ec. (5.19) lo denotaremos como

$$g(f'_A, f'_B, \rho_{AB}) := \frac{|\det\{f'_A\} \det\{f'_B\}|^2}{\left|4\tilde{R}_{00(2)}^{AD} \left| \text{Tr} \left[(f'_A{}^\dagger f'_A \otimes f'_B{}^\dagger f'_B) \rho_{AB} \right] \right| \right|^2}, \quad (5.22)$$

dado que tanto la Ec. (5.11) y la Ec. (5.19) son proporcionales a Ω^2 y sólo se diferencian en los factores de la Ec. (5.21) y Ec. (5.22) respectivamente.

La primera observación con respecto a estos factores, es que son iguales cuando ρ_{AB} y ρ_{CD} son Bell diagonal e iguales. En este caso se cumple que

$$g(f_A, f_B, \rho_{AD}) = g(f'_A, f'_B, \rho_{AB}) = 1$$

Lo anterior se debe a que los KLM-SLOCC se comportan como la identidad cuando los estados iniciales son Bell diagonal.

Por lo tanto, a la hora de evaluar los factores de la Ec. (5.20), Ec. (5.12) y Ec. (5.13) hay que tener en cuenta indirectamente los valores de las componentes ρ_{14} y ρ_{23} tal que las condiciones de la Ec. (5.14) se satisfagan. Finalmente, a modo de comparación generamos 10^6 estados tipo X aleatorios que cumplan las condiciones de un sistema físico y comparamos el factor de la Ec. (5.20) con el factor de la Ec. (5.12).

La Fig. 5.2 muestra que el factor de la Ec. (5.20) es siempre mayor o igual que el factor de la Ec. (5.12). Esto se evidencia dado que todos los puntos están siempre sobre la línea diagonal roja punteada. Lo cual implica que el estado luego del proceso KLM-SLOCC + swapping tiene mayor obesidad cuántica que el estado luego del proceso swapping + KLM-SLOCC.

De igual forma, hemos comparado los factores de la Ec. (5.20) con el factor de la Ec. (5.13) generando 10^6 estados tipo X aleatorios que tengan sentido físico.

La Fig. 5.3 muestra que el factor de la Ec. (5.20) es también mayor o igual al factor de la Ec. (5.13) por los mismos argumentos mencionados anteriormente, lo cual confirma que para todos

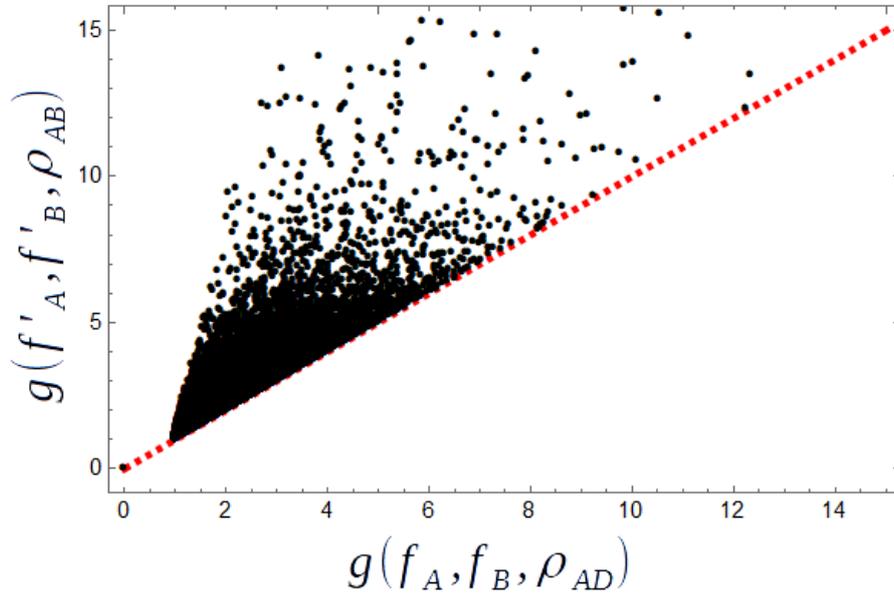


Figura 5.2: Factor Ec. (5.20) en función del factor Ec. (5.12).

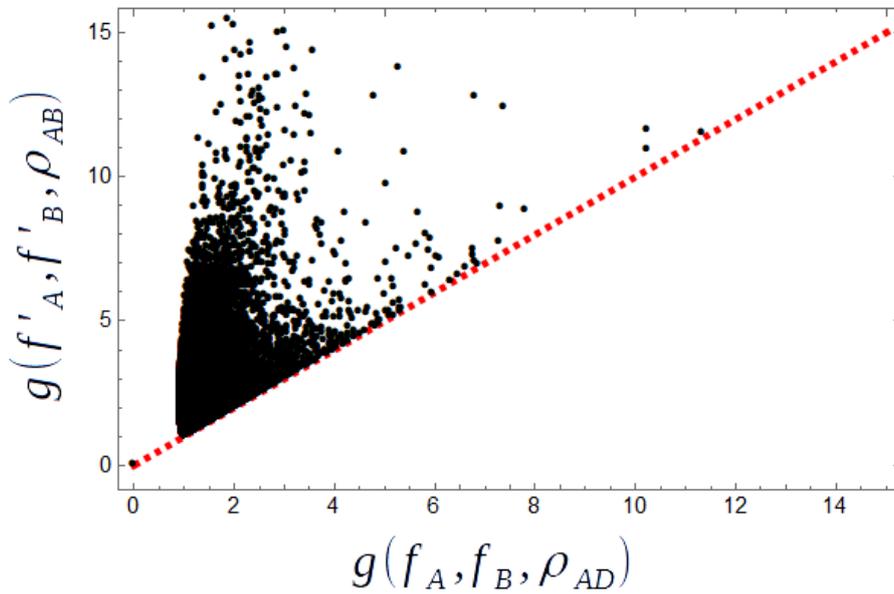


Figura 5.3: Factor Ec. (5.20) en función del factor Ec. (5.13)

los proyectores de la base de Bell, el proceso KLM-SLOCC + swapping suministra más obesidad cuántica al estado final que el proceso swapping + KLM-SLOCC.

Por otra parte, con el fin de tener una prueba certera de que el factor de la Ec. (5.20) es siempre mayor o igual a los factores de la Ec. (5.12) y Ec. (5.13) hemos reducido dichos factores al grupo de estados “casi Bell diagonal” (ver Fig. 5.1). De ahí que, los factores se reducen a solo dos parámetros para esta familia de estados teniendo en cuenta las siguientes dos consideraciones. La primera consideración radica en considerar $\rho_{11} = \rho_{44}$ y teniendo en cuenta la condición de traza $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} = 1$, obtenemos que $\rho_{11} = \frac{1-(\rho_{22}+\rho_{33})}{2}$, $\rho_{22} = \rho_{22}$, $\rho_{33} = \rho_{33}$ y $\rho_{44} = \frac{1-(\rho_{22}+\rho_{33})}{2}$, lo cual simplifica todos los factores a la dependencia de sólo los parámetros ρ_{22} y ρ_{33} . De igual forma, en esta primera consideración se cumple que los factores de la Ec. (5.20) y Ec. (5.12) reducidos a dos parámetros son iguales. Por otro lado, los factores de la Ec. (5.20) y Ec. (5.13) reducidos a dos parámetros son distintos y como se muestra en la Fig. 5.4, el proceso $F+S$ para esta familia de estados siempre es mejor que $S+F$. La superficie gris siempre está por encima de la superficie azul.

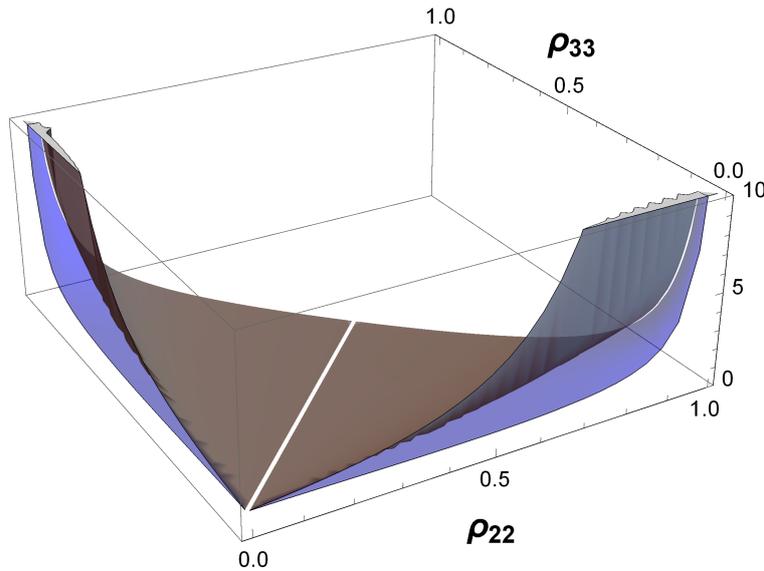


Figura 5.4: Factor de la Ec. (5.20) (superficie gris) y factor de la Ec. (5.13) (superficie azul), ambos reducidos a dos parámetros.

La segunda consideración radica en tomar $\rho_{22} = \rho_{33}$ y teniendo en cuenta la condición de traza $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} = 1$, obtenemos que $\rho_{11} = \rho_{11}$, $\rho_{22} = \frac{1-(\rho_{11}+\rho_{44})}{2}$, $\rho_{33} = \frac{1-(\rho_{11}+\rho_{44})}{2}$ y $\rho_{44} = \rho_{44}$, lo cual simplifica los factores a la dependencia única de los parámetros ρ_{11} y ρ_{44} . Aquí, se cumple que los factores Ec. (5.20) y Ec. (5.13) son iguales al reducirlos a dos parámetros. Por otro lado, los factores Ec. (5.20) y Ec. (5.12) son distintos y al igual que para el caso anterior, la Fig. 5.5 muestra que la superficie gris siempre está por encima de la superficie verde, esto implica nuevamente que para esta familia de estados siempre es mejor el proceso $F+S$ que $S+F$ dado que suministra mayor obesidad cuántica.

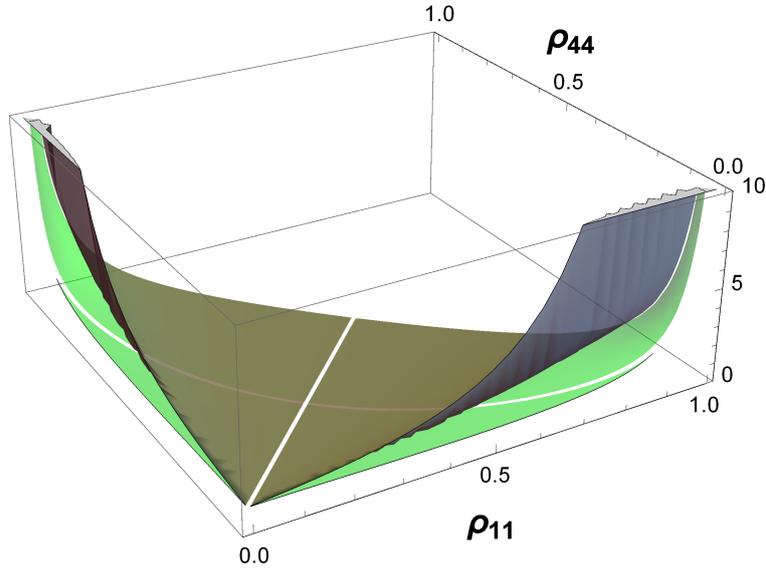


Figura 5.5: Factor de la Ec. (5.20) (superficie gris) y factor de la Ec. (5.12) (superficie verde), ambos reducidos a dos parámetros.

5.3. Cálculo explícito de los estados después de $F+S$ y $S+F$ para estados iniciales tipo X

Resultado 8: Se presenta la forma explícita de los estados luego de los procesos $S+F$ y $F+S$ utilizando estados tipo X, para todos los proyectores tipo Bell. De igual forma, se presentan simulaciones numéricas para las correlaciones cuánticas, las cuales demuestran que para estados tipo X el proceso $F+S$ es mejor que el proceso $S+F$.

Si tomamos dos estados tipo X iniciales iguales $\rho_{AB} = \rho_{CD}$ y utilizamos los resultados analíticos para swapping del Anexo B (proyectando sobre $|\Phi^+\rangle$ y $|\Phi^-\rangle$) y KLM-SLOCC analíticos mostrados en el Anexo C, obtenemos que el estado después del proceso swapping + KLM-SLOCC estará dado por

$$\rho_{SF}^{\Phi^\pm} :=$$

$$\frac{1}{\kappa_1} \begin{pmatrix} \rho_{44}(\rho_{22} + \rho_{33}) & 0 & 0 & \pm 2\rho_{14}\rho_{23} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right)^{1/2} \\ 0 & \left(\frac{\rho_{44}(\rho_{22}^2 + \rho_{11}\rho_{44})(\rho_{33}^2 + \rho_{11}\rho_{44})}{\rho_{11}}\right)^{1/2} & \pm(\rho_{23}^2 + \rho_{14}^2) \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right)^{1/2} & 0 \\ 0 & \pm(\rho_{23}^2 + \rho_{14}^2) \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right)^{1/2} & \left(\frac{\rho_{44}(\rho_{22}^2 + \rho_{11}\rho_{44})(\rho_{33}^2 + \rho_{11}\rho_{44})}{\rho_{11}}\right)^{1/2} & 0 \\ \pm 2\rho_{14}\rho_{23} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right)^{1/2} & 0 & 0 & \rho_{44}(\rho_{22} + \rho_{33}) \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Con $\kappa_1 = 2\rho_{44}(\rho_{22} + \rho_{33}) + 2\left(\frac{\rho_{44}(\rho_{22}^2 + \rho_{11}\rho_{44})(\rho_{33}^2 + \rho_{11}\rho_{44})}{\rho_{11}}\right)^{1/2}$. De igual forma, el estado luego del proceso KLM-SLOCC + swapping estará dado por

$$\rho_{FS}^{\Phi\pm} := \frac{1}{\kappa_2} \begin{pmatrix} 2\rho_{44} \left(\frac{\rho_{44}\rho_{33}\rho_{22}}{\rho_{11}}\right)^{1/2} & 0 & 0 & \pm 2\rho_{14}\rho_{23} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) \\ 0 & \rho_{44}^2 + \left(\frac{\rho_{22}\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) & \pm(\rho_{23}^2 + \rho_{14}^2) \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) & 0 \\ 0 & \pm(\rho_{23}^2 + \rho_{14}^2) \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) & \rho_{44}^2 + \left(\frac{\rho_{22}\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) & 0 \\ \pm 2\rho_{14}\rho_{23} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) & 0 & 0 & 2\rho_{44} \left(\frac{\rho_{44}\rho_{33}\rho_{22}}{\rho_{11}}\right)^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Con $\kappa_2 = 4\rho_{44} \left(\frac{\rho_{44}\rho_{33}\rho_{22}}{\rho_{11}}\right)^{1/2} + 2\left(\rho_{44}^2 + \left(\frac{\rho_{22}\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}}\right)\right)$. De los anteriores resultados para $\rho_{SF}^{\Phi\pm}$ y $\rho_{FS}^{\Phi\pm}$, se puede notar que si los estados iniciales $\rho_{AB} = \rho_{CD}$ son Bell diagonal, entonces $\rho_{SF}^{\Phi\pm} = \rho_{FS}^{\Phi\pm}$. Lo cual implica que las correlaciones cuánticas de $\rho_{SF}^{\Phi\pm}$ y $\rho_{FS}^{\Phi\pm}$ para este caso especial tendr an el mismo comportamiento. Esto permite deducir que para este caso el protocolo de swapping no actúa como un degradante de las correlaciones, dado que la estructura de un estado Bell diagonal no se ve afectada por este protocolo (ver Anexo A).

Por otro lado, cuando proyectamos sobre los estados $|\psi^+\rangle$ y $|\psi^-\rangle$ obtenemos que el estado luego de swapping + KLM-SLOCC estará dado por

$$\rho_{SF}^{\psi\pm} :=$$

$$\frac{1}{\kappa_3} \begin{pmatrix} \rho_{22}\rho_{33} + \rho_{44}^2 & 0 & 0 & \pm(\rho_{14}^2 + \rho_{23}^2)\sqrt{\frac{\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{44}^2}{\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{11}^2}} \\ 0 & (\rho_{11} + \rho_{44})\sqrt{\frac{\rho_{22}\rho_{33}(\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{44}^2)}{\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{11}^2}} & \pm 2\rho_{14}\rho_{23}\sqrt{\frac{\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{44}^2}{\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{11}^2}} & 0 \\ 0 & \pm 2\rho_{14}\rho_{23}\sqrt{\frac{\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{44}^2}{\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{11}^2}} & (\rho_{11} + \rho_{44})\sqrt{\frac{\rho_{22}\rho_{33}(\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{44}^2)}{\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{11}^2}} & 0 \\ \pm(\rho_{14}^2 + \rho_{23}^2)\sqrt{\frac{\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{44}^2}{\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{11}^2}} & 0 & 0 & \rho_{22}\rho_{33} + \rho_{44}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Donde $\kappa_3 = 2(\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{44}^2) + 2(\rho_{11} + \rho_{44})\sqrt{\frac{\rho_{22}\rho_{33}(\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{44}^2)}{\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{11}^2}}$. De igual forma, el estado luego del proceso KLM-SLOCC + swapping estará dado por

$$\rho_{FS}^{\psi\pm} := \frac{1}{\kappa_4} \begin{pmatrix} \frac{(\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{11}\rho_{44})}{2} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) & 0 & 0 & \pm \frac{(\rho_{14}^2 + \rho_{23}^2)}{2} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) \\ 0 & \rho_{44}\sqrt{\frac{\rho_{22}\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}}} & \pm \rho_{14}\rho_{23} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) & 0 \\ 0 & \pm \rho_{14}\rho_{23} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) & \rho_{44}\sqrt{\frac{\rho_{22}\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}}} & 0 \\ \pm \frac{(\rho_{14}^2 + \rho_{23}^2)}{2} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) & 0 & 0 & \frac{(\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{11}\rho_{44})}{2} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Donde $\kappa_4 = (\rho_{22}\rho_{33} + \rho_{11}\rho_{44}) \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}\right) + 2\rho_{44}\sqrt{\frac{\rho_{22}\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}}}$. De los resultados para $\rho_{FS}^{\psi\pm}$ y $\rho_{SF}^{\psi\pm}$ es sencillo notar que si los estados iniciales $\rho_{AB} = \rho_{CD}$ son Bell diagonal, entonces se cumple que $\rho_{FS}^{\psi\pm} = \rho_{SF}^{\psi\pm}$, dando lugar a que el comportamiento de sus correlaciones cuánticas sea igual.

Para corroborar numéricamente nuestros resultados sobre los estados tipo X, utilizamos la forma explícita de los cálculos anteriores, y generamos 10^6 estados tipo X aleatorios iniciales $\rho_{AB} = \rho_{CD}$ para obtener concurrencia y obesidad cuántica en ambos protocolos $\rho_{SF}^{\psi+}$ y $\rho_{FS}^{\psi+}$. Las Figs. 5.6 y 5.7 muestran la concurrencia y obesidad cuántica, respectivamente, de los 10^6 estados $\rho_{FS}^{\psi+}$ en función de la concurrencia y obesidad para los 10^6 estados $\rho_{SF}^{\psi+}$.

Como se observa en la Fig. 5.6 la concurrencia de los estados luego del proceso $F+S$ es siempre mayor o igual a la concurrencia de los estados luego del proceso $S+F$. Esto se evidencia dado que los puntos están siempre por encima de la diagonal roja punteada, este resultado refuerza la

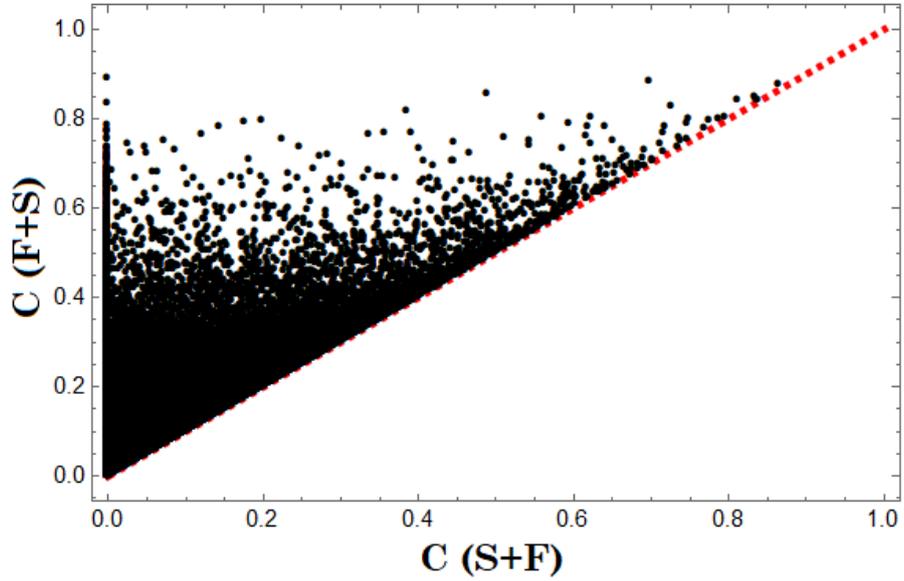


Figura 5.6: Concurrencia para estado $\rho_{FS}^{\psi+}$ en función de la concurrencia para estado $\rho_{SF}^{\psi+}$.

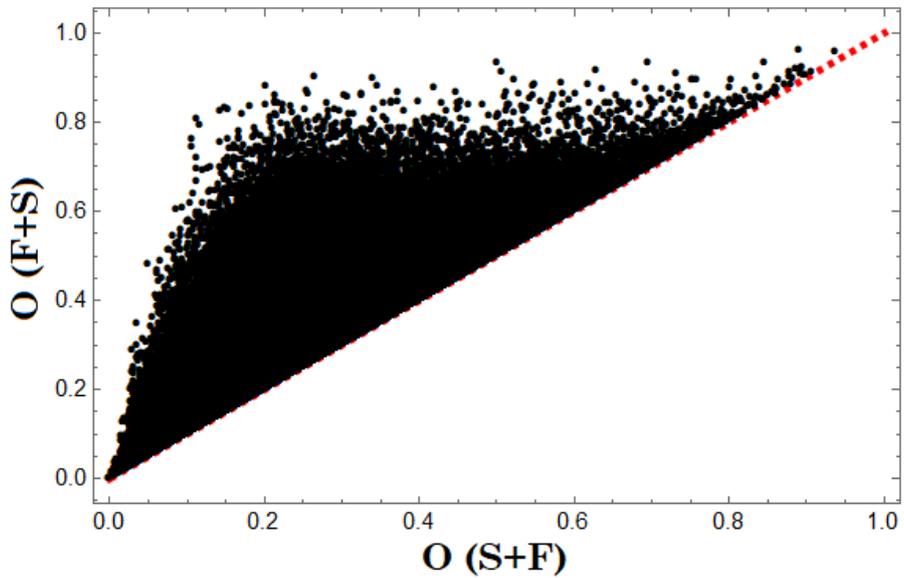


Figura 5.7: Obesidad para estado $\rho_{FS}^{\psi+}$ en función de la obesidad para estado $\rho_{SF}^{\psi+}$.

idea mostrada con los factores para obesidad cuántica de las secciones anteriores. También es importante resaltar que la UFT, EPR-steering y no-localidad CHSH presentan comportamientos similares a los mostrados en esta Sección.

De igual modo, la Fig. 5.7 muestra un cálculo para la obesidad cuántica de 10^6 estados, donde al igual que la concurrencia el proceso $F+S$ es más óptimo. El resultado importante en esta parte, es que al igual que la discordia cuántica, la obesidad es una correlación cuántica más general que el entrelazamiento. Así, nuestros resultados son más generales que aquellos mostrados en la literatura para entrelazamiento y propiedades cuánticas más restrictivas.

Capítulo VI

Conclusiones

De acuerdo al objetivo general, *Determinar escenarios de optimización para las propiedades cuánticas ligadas al entrelazamiento cuántico, mediante la investigación de los efectos conjuntos del protocolo de swapping y los filtros locales*. Los objetivos específicos planteados para el desarrollo de este trabajo se enumeran a continuación

1. *Estudiar el efecto del protocolo de swapping sobre las propiedades cuánticas desde no-localidad hasta obesidad cuántica para estados cuánticos bipartitos.*
2. *Analizar los efectos sobre las mismas propiedades debido a los filtros locales.*
3. *Investigar el comportamiento de las propiedades cuánticas bajo la implementación conjunta del protocolo de swapping y los filtros locales.*

Los objetivos 1, 2 y 3 fueron desarrollados de manera conjunta en las secciones de resultados 4.1 y 4.2. Donde se estudió y representó gráficamente de forma separada el efecto del protocolo swapping y filtros locales para familias de estados específicas y se concluyó que los filtros locales KLM son una operación más óptima que el protocolo swapping, dado que las operaciones locales tipo KLM llevan al estado a su forma Bell diagonal, la cual es su forma máximamente correlacionada y además, el protocolo swapping actúa para algunos escenarios como un degradante de las correlaciones cuánticas. De igual forma, se analizó el efecto conjunto de estos protocolos llegando a la conclusión de que las correlaciones cuánticas de los estados resultantes del proceso KLM-SLOCC + swapping son siempre mejor a las del proceso swapping + KLM-SLOCC, esto se debe en gran medida a que el escenario KLM-SLOCC + swapping involucra dos estados Bell diagonal y el proceso swapping + KLM-SLOCC involucra un solo estado Bell diagonal. Por otra parte, también se demostró que ambos procesos son igual de óptimos únicamente cuando los estados iniciales pertenecen a la familia Bell diagonal, esto se debe a que en este caso los filtros óptimos actúan como la identidad y no tienen ningún efecto. Es más, el hecho

de que ambos procesos sean igual de óptimos también puede entenderse en el sentido de que ambos procesos involucran en su desarrollo dos estados Bell diagonal.

Así mismo, en las secciones 5.2 y 5.3 se utilizó la familia de estados tipo X, dado que para estos estados se conoce de forma explícita sus filtros óptimos KLM y nos permitió reforzar la idea utilizando simulaciones numéricas para 10^6 estados, de que el proceso KLM-SLOCC + swapping es siempre mejor. Similarmente, fue posible deducir para la obesidad cuántica unos factores que permitieron fortalecer de forma gráfica la supremacía del proceso KLM-SLOCC + swapping.

4. *Derivar reglas de transformación en el protocolo swapping considerando estados iniciales y medidas arbitrarias en sistemas de qubits.*

En la sección de resultados 4.3 se dedujo de forma rigurosa y analítica una generalización del protocolo swapping que involucra no solo a proyectores pertenecientes a la base de Bell, sino también a aquellos cuyo entrelazamiento intrínseco no es máximo. De igual forma, la manera en que presentamos el resultado no se encuentra actualmente en la literatura, dado que los trabajos escritos al respecto utilizan únicamente proyectores tipo Bell y nuestro resultado va más allá. Por lo tanto, es posible utilizar proyectores con entrelazamiento degradado para simular escenarios realistas que involucren el protocolo swapping. Así mismo, empleando el resultado de la sección 4.3 se encontró una relación analítica en la sección 5.1 para obesidad cuántica del estado luego del proceso swapping utilizando un grupo de medidas en su forma general. Este resultado para obesidad podría ser útil a niveles experimentales, dado que permite preparar de forma exacta estados cuánticos iniciales ρ_{AB} y ρ_{CD} tal que luego del swapping entre ellos den como resultado una obesidad cuántica deseada en el estado ρ_{AD} .

Productos de esta investigación

- Artículo remitido para publicación

P. Rosario, A. F. Ducuara and C. E. Susa. Quantum steering and quantum discord under noisy channels and entanglement swapping. *Remitido a Physics Letter A*, 2021.

- Artículo en preparación

P. Rosario, A. F. Ducuara and C. E. Susa. Characterising quantum entanglement-based properties and beyond through general entanglement swapping and optimal local filtering. *En preparación*, 2021.

- Ponencia evento internacional

P. Rosario, A. F. Ducuara and **C. E. Susa**. Investigating quantum properties such as correlations in open quantum systems. *ICFO-UNAM-UNIANDES International School on the Frontiers of Light, QUANTUM CHALLENGES 2021*, November 8-11, 2021.

Anexo A

Swapping entre estados Bell diagonal

Sea $\rho_{ABCD} = \rho_{AB} \otimes \rho_{CD}$ el estado inicial antes de llevar a cabo el protocolo swapping, donde ρ_{CD} y ρ_{AB} son estados Bell diagonal diferentes. Se cumple que el estado final ρ_{AD} luego del protocolo swapping, también es un estado Bell diagonal tal y como mostramos a continuación utilizando la representación de Bloch.

Sean ρ_{CD} y ρ_{AB} dos estados Bell diagonal de la forma

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + \sum_{ij} T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \right) \quad \rho_{CD} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{CD} + \sum_{mn} S_{mn} \sigma_m^C \otimes \sigma_n^D \right).$$

El proyector que representa a los cuatro estados de Bell está dado por

$$\Pi = \Pi^\dagger = \mathbb{1}^A \otimes \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{BC} + \sum_{kl} N_{kl} \sigma_k^B \otimes \sigma_l^C \right) \otimes \mathbb{1}^D$$

Donde la matriz de correlación N es única para cada estado de Bell. Entonces, el estado resultante ρ_{AD} después del swapping está dado por

$$\rho_{AD} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AD} + \sum_{in} (TNS)_{in} \sigma_i^A \otimes \sigma_n^D \right).$$

El cual es también un estado Bell diagonal con matriz de correlación dada por el producto TNS . Este escenario es importante, dado que al aplicarle a un estado su filtro KLM-SLOCC este es llevado a su forma Bell diagonal y por tanto, con el resultado que acabamos de mostrar sabemos que el proceso de swapping no cambia la estructura de un estado Bell diagonal.

Anexo B

Swapping entre estados tipo X

Los estados cuya matriz densidad tiene forma de X, han permitido estudiar de forma exacta propiedades cuánticas como el entrelazamiento (ver por ejemplo [40]). Por lo tanto, consideremos dos estados tipo X cuya forma de matriz densidad se muestra a continuación.

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad \delta_{CD} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 & \delta_{14} \\ 0 & \delta_{22} & \delta_{23} & 0 \\ 0 & \delta_{23}^* & \delta_{33} & 0 \\ \delta_{14}^* & 0 & 0 & \delta_{44} \end{pmatrix},$$

donde se debe cumplir que $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{44} = 1$. Es decir, este hecho garantiza la normalización de las poblaciones. Entonces, el estado resultante ρ_{AD} luego del protocolo swapping entre ρ_{AB} y δ_{CD} al proyectar en la base tipo Bell es

$$\rho_{AD}^{\psi_{\pm}} = \frac{1}{M^{\psi_{\pm}}} \begin{pmatrix} \delta_{11}\rho_{11} + \delta_{33}\rho_{22} & 0 & 0 & \pm\delta_{23}^*\rho_{23} \pm \delta_{14}\rho_{14} \\ 0 & \delta_{22}\rho_{11} + \delta_{44}\rho_{22} & \pm\delta_{14}^*\rho_{23} \pm \delta_{23}\rho_{14} & 0 \\ 0 & \pm\delta_{23}^*\rho_{14}^* \pm \delta_{14}\rho_{23}^* & \delta_{11}\rho_{33} + \delta_{33}\rho_{44} & 0 \\ \pm\delta_{23}\rho_{23}^* \pm \delta_{14}^*\rho_{14}^* & 0 & 0 & \delta_{22}\rho_{33} + \delta_{44}\rho_{44} \end{pmatrix}.$$

$\rho_{AD}^{\psi_{\pm}}$ resulta de proyectar sobre los dos posibles estados de Bell $|\psi+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, $|\psi-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ y $M^{\psi_{\pm}} = (\delta_{11} + \delta_{22})(\rho_{11} + \rho_{33}) + (\delta_{33} + \delta_{44})(\rho_{22} + \rho_{44})$ representa el factor de normalización. Igualmente

$$\rho_{AD}^{\Phi_{\pm}} = \frac{1}{M^{\Phi_{\pm}}} \begin{pmatrix} \delta_{11}\rho_{22} + \delta_{33}\rho_{11} & 0 & 0 & \pm\delta_{23}^*\rho_{14} \pm \delta_{14}\rho_{23} \\ 0 & \delta_{22}\rho_{22} + \delta_{44}\rho_{11} & \pm\delta_{14}^*\rho_{14} \pm \delta_{23}\rho_{23} & 0 \\ 0 & \pm\delta_{23}^*\rho_{23}^* \pm \delta_{14}\rho_{14}^* & \delta_{11}\rho_{44} + \delta_{33}\rho_{33} & 0 \\ \pm\delta_{23}\rho_{14}^* \pm \delta_{14}^*\rho_{23}^* & 0 & 0 & \delta_{22}\rho_{44} + \delta_{44}\rho_{33} \end{pmatrix},$$

resulta de proyectar en los dos estados de Bell $|\Phi+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$, $|\Phi-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)$ con factor de normalización $M^{\Phi\pm} = (\delta_{11} + \delta_{22})(\rho_{22} + \rho_{44}) + (\rho_{11} + \rho_{33})(\delta_{33} + \delta_{44})$.

Los factores $M^{\phi\pm}$ y $M^{\psi\pm}$ representan también la probabilidad de obtener luego del protocolo swapping a los estados $\rho_{AD}^{\Phi\pm}$ y $\rho_{AD}^{\psi\pm}$, respectivamente. Finalmente, el resultado de este Anexo demuestra que el estado resultante del protocolo swapping entre dos estados tipo X es también un estado tipo X, sin importar en cual de los elementos de la base de Bell proyectemos. También cabe mencionar, que el resultado del Anexo A se puede obtener de este resultado dado que los estados Bell diagonal son un sub-grupo de los estados tipo X.

Anexo C

KLM-SLOCC para estados tipo X

Sea los KLM-SLOCC para estados tipo X dados por [38]

$$f_A = \begin{pmatrix} \eta_A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_B = \begin{pmatrix} \eta_B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $0 \leq \eta_A^2 \leq 1$ y $0 \leq \eta_B^2 \leq 1$. Donde para un estado tipo X general de la forma

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}.$$

Si $\rho_{23} = \rho_{23}^*$, $\rho_{14} = \rho_{14}^*$. Entonces, f_A y f_B actúan de la siguiente manera sobre ρ

$$\rho' = \frac{(f_A \otimes f_B)\rho(f_A^\dagger \otimes f_B^\dagger)}{\text{Tr} \left[(f_A \otimes f_B)\rho(f_A^\dagger \otimes f_B^\dagger) \right]}.$$

Obteniendo como resultado

$$\rho' = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \eta_A^2 \eta_B^2 \rho_{11} & 0 & 0 & \eta_A \eta_B \rho_{14} \\ 0 & \eta_A^2 \rho_{22} & \eta_A \eta_B \rho_{23} & 0 \\ 0 & \eta_A \eta_B \rho_{23} & \eta_B^2 \rho_{33} & 0 \\ \eta_A \eta_B \rho_{14} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix},$$

con $\kappa = \eta_A^2 \eta_B^2 \rho_{11} + \eta_A^2 \rho_{22} + \eta_B^2 \rho_{33} + \rho_{44}$ y se debe cumplir que

$$\eta_A^2 = \left(\frac{\rho_{44} \rho_{33}}{\rho_{22} \rho_{11}} \right)^{1/2}, \quad \eta_B^2 = \left(\frac{\rho_{44} \rho_{22}}{\rho_{33} \rho_{11}} \right)^{1/2}.$$

Sustituyendo los valores para η_A y η_B obtenemos la forma explícita para el estado ρ' después del KLM-SLOCC

$$\rho' = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \rho_{44} & 0 & 0 & \rho_{14} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}} \right)^{1/2} \\ 0 & \left(\frac{\rho_{44}\rho_{22}\rho_{33}}{\rho_{11}} \right)^{1/2} & \rho_{23} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}} \right)^{1/2} & 0 \\ 0 & \rho_{23} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}} \right)^{1/2} & \left(\frac{\rho_{44}\rho_{22}\rho_{33}}{\rho_{11}} \right)^{1/2} & 0 \\ \rho_{14} \left(\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}} \right)^{1/2} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}.$$

Puede notarse que ρ' es un estado Bell diagonal.

Referencias

- [1] M. Allende Lopez. Quantum technologies. digital transformation, social impact and cross-sector disruption. *Interamerican Development Bank*, 2019.
- [2] L.-M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, and P. Zoller. Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics. *Nature*, 414(6862):413–418, Nov 2001.
- [3] Ting Yu and J.H Eberly. Sudden death of entanglement. *Science*, pages 598–601, 2009.
- [4] Rupert Ursin Gregor Weihs Jian-Wei Pan, Sara Gasparoni and Anton Zeilinger. Experimental entanglement purification of arbitrary unknown states. *Nature* 423, page 417–422, 2003.
- [5] Zheng-Da Li, Rui Zhang, Xu-Fei Yin, Li-Zheng Liu, Yi Hu, Yu-Qiang Fang, Yue-Yang Fei, Xiao Jiang, Jun Zhang, Li Li, and et al. Experimental quantum repeater without quantum memory. *Nature Photonics*, 13(9):644–648, Jun 2019.
- [6] Joonwoo Bae and Jeong San Kim. Quantum correlations over long-distances using noisy quantum repeaters, 2008.
- [7] Antoni Wójcik, Joanna Modławska, Andrzej Grudka, and Mikołaj Czechlewski. Violation of clauser–horne–shimony–holt inequality for states resulting from entanglement swapping. *Physics Letters A*, 374(48):4831–4833, Nov 2010.
- [8] Tanumoy Pramanik, Young-Wook Cho, Sang-Wook Han, Sang-Yun Lee, Yong-Su Kim, and Sung Moon. Revealing hidden quantum steerability using local filtering operations. *Physical Review A*, 99(3), Mar 2019.
- [9] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1:195–200, Nov 1964.
- [10] M. A Nielsen and I.L Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information, 10th ed.* Cambridge University, 2010.

- [11] Omar Gamel. Entangled bloch spheres: Bloch matrix and two-qubit state space. *Physical Review A*, 93(6), Jun 2016.
- [12] Gerardo Adesso, Thomas R Bromley, and Marco Cianciaruso. Measures and applications of quantum correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(47):473001, Nov 2016.
- [13] Reinhard F. Werner. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40:4277–4281, Oct 1989.
- [14] Jonathan Barrett. Nonsequential positive-operator-valued measurements on entangled mixed states do not always violate a bell inequality. *Physical Review A*, 65(4), Mar 2002.
- [15] Antonio Acín, Nicolas Gisin, and Benjamin Toner. Grothendieck’s constant and local models for noisy entangled quantum states. *Physical Review A*, 73(6), Jun 2006.
- [16] T. Vértesi. More efficient bell inequalities for werner states. *Physical Review A*, 78(3), Sep 2008.
- [17] Bobo Hua, Ming Li, Tinggui Zhang, Chunqin Zhou, Xianqing Li-Jost, and Shao-Ming Fei. Towards grothendieck constants and lhv models in quantum mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(6):065302, Jan 2015.
- [18] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, Oct 1969.
- [19] Jean Franco. Estimación de la desigualdad chsh para estados cuánticos desconocidos vía optimización estocástica. *MSc. tesis*, 2018.
- [20] Andrés F. Ducuara, Cristian E. Susa, and John H. Reina. Sudden birth of maximal hidden quantum correlations, 2020.
- [21] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
- [22] Sania Jevtic, Matthew Pusey, David Jennings, and Terry Rudolph. Quantum steering ellipsoids. *Physical Review Letters*, 113(2), Jul 2014.
- [23] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895–1899, Mar 1993.
- [24] Sandu Popescu. Bell’s inequalities versus teleportation: What is nonlocality? *Phys. Rev. Lett.*, 72:797–799, Feb 1994.

- [25] Ryszard Horodecki, Michał Horodecki, and Paweł Horodecki. Teleportation, bell's inequalities and inseparability. *Physics Letters A*, 222(1-2):21–25, Oct 1996.
- [26] Daniel Cavalcanti, Antonio Acín, Nicolas Brunner, and Tamás Vértesi. All quantum states useful for teleportation are nonlocal resources. *Phys. Rev. A*, 87:042104, Apr 2013.
- [27] Charles H. Bennett and Stephen J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2881–2884, Nov 1992.
- [28] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Physical Review A*, 54(5):3824–3851, Nov 1996.
- [29] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245–2248, Mar 1998.
- [30] Antony Milne, Sania Jevtic, David Jennings, Howard Wiseman, and Terry Rudolph. Quantum steering ellipsoids, extremal physical states and monogamy. *New Journal of Physics*, 16(8):083017, aug 2014.
- [31] M. Żukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, and A. K. Ekert. “event-ready-detectors” bell experiment via entanglement swapping. *Phys. Rev. Lett.*, 71:4287–4290, Dec 1993.
- [32] F. Basso Basset, M. B. Rota, C. Schimpf, D. Tedeschi, K. D. Zeuner, S. F. Covre da Silva, M. Reindl, V. Zwiller, K. D. Jöns, A. Rastelli, and R. Trotta. Entanglement swapping with photons generated on demand by a quantum dot. *Phys. Rev. Lett.*, 123:160501, Oct 2019.
- [33] M. Abdi, S. Pirandola, P. Tombesi, and D. Vitali. Entanglement swapping with local certification: Application to remote micromechanical resonators. *Physical Review Letters*, 109(14), Oct 2012.
- [34] S. Bose, V. Vedral, and P. L. Knight. Multiparticle generalization of entanglement swapping. *Physical Review A*, 57(2):822–829, Feb 1998.
- [35] Brian T. Kirby, Siddhartha Santra, Vladimir S. Malinovsky, and Michael Brodsky. Entanglement swapping of two arbitrarily degraded entangled states. *Physical Review A*, 94(1), Jul 2016.
- [36] Bartosz Regula, Kun Fang, Xin Wang, and Mile Gu. One-shot entanglement distillation beyond local operations and classical communication. *New Journal of Physics*, 21(10):103017, Oct 2019.
- [37] Adrian Kent, Noah Linden, and Serge Massar. Optimal entanglement enhancement for mixed states. *Physical Review Letters*, 83(13):2656–2659, Sep 1999.

- [38] Akira Matsumura and Yasusada Nambu. Violation of bell-chsh inequalities through optimal local filters in the vacuum. *Quantum Reports*, 2(4):542–559, Nov 2020.
- [39] Frank Verstraete, Jeroen Dehaene, and Bart DeMoor. Local filtering operations on two qubits. *Physical Review A*, 64, Jun 2001.
- [40] Ting Yu and J. H. Eberly. Evolution from entanglement to decoherence of bipartite mixed "x"states. *Quantum Info. Comput.*, 7(5):459–468, July 2007.