

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

TESIS DE MAESTRÍA

K-Marcos en espacios p -ádicos

Autor:

**Miguel Alfonso Vergara
Ramírez**

Director:

Dr. Osmin FERRER VILLAR

Codirector:

Dr. Edilberto ARROYO ORTÍZ



*Tesis enviada al Comité Curricular como requisito
para optar al grado de Magíster en Matemáticas*

**Grupo de Investigación Matemáticas Unicórdoba
Departamento de Matemáticas y Estadística**

12 de diciembre de 2023

K-Marcos en espacios p -ádicos

Tesis de Maestría aprobada por:

Dr. Osmin Ferrer Villar

Director de Tesis

Dr. Edilberto Arroyo Ortíz

Codirector de Tesis

Jurado de Tesis

Jurado de Tesis

Dr. Ricardo Miguel Guzmán Navarro

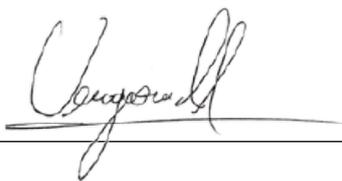
Jefe de departamento de Matemáticas y Estadística

Declaración de Autoría

Yo, **Miguel Alfonso Vergara Ramírez**, declaro que esta tesis titulada, « K-Marcos en espacios p -ádicos» y el trabajo presentado en ella es de mi autoría, por lo tanto confirmo que:

- Este trabajo se realizó principalmente mientras me encontraba en la candidatura para obtener el título de Maestría en Matemáticas en la Universidad de Córdoba. Si alguna parte de esta tesis ha sido presentada previamente para un título o cualquier otra titulación en esta Universidad o cualquier otra institución, esto ha sido claramente establecido. Cuando hemos consultado el trabajo publicado de otros, esto siempre se atribuye claramente. Donde hemos citado el trabajo de otros, la fuente siempre se ha dado; con la excepción de tales citas, esta tesis es completamente un trabajo de mi propia autoría. Reconociendo así todas las principales fuentes de ayuda que sustentan el presente trabajo.

Firmado:



Fecha:

11/12/2023

«"Los físicos teóricos aceptan la necesidad de la belleza matemática como un acto de fe... Por ejemplo, la razón principal por la que la teoría de la relatividad es tan universalmente aceptada es su belleza matemática".»

Paul Dirac, físico británico (1902-1984), ganador del premio Nobel de física en 1933.

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Resumen

Facultad de Ciencias Básicas

Departamento de Matemáticas y Estadística

K-Marcos en espacios p -ádicos

Por **Miguel Alfonso Vergara Ramírez**

En el presente trabajo se dará una reseña de la teoría de marcos en espacios de Hilbert, realizando una descripción de los aspectos fundamentales vía a la teoría de operadores, haciendo uso de [15] como guía principal. De igual forma se llevará a cabo un estudio de los K-marcos asociados a un operador acotado en espacios de Hilbert. Adicionalmente, se utilizará como herramienta elementos del análisis p -ádicos permitiendo la construcción de los marcos y K-marcos en espacios de Hilbert separables denotados por $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, por otro lado se dará un ejemplo concreto de un marco en $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, el cual no es una base para dicho espacio.

Finalmente se realizará la construcción de un operador pseudodiferencial

$\mathcal{A}_l : \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, con el objetivo de garantizar la existencia de los K-marcos asociados al operador \mathcal{A}_l en los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$.

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Abstract

Facultad de Ciencias Básicas

Departamento de Matemáticas y Estadística

Magíster en Matemáticas

K-Marcos en espacios p -ádicos

By Miguel Alfonso Vergara Ramírez

In this paper, We will give an overview of the theory of frames in Hilbert's spaces, describing its various fundamental aspects of Hilbert's spaces, carrying out a description of the fundamental aspects from the operators theory, using [15] as a main guide.

In the same way a study of the K-frames associated to an operator in Hilbert spaces will be developed. In addition to this we will use as a resource the elements of the p -adic analysis in the construction of the p -adic the frames and K-frames in separable Hilbert spaces denoted by $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$. On the other hand, we will give an example of a frame in $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, which is not a basis for the space previously mentioned.

In conclusion, a pseudo-differential operator will be built. $\mathcal{A}_l : \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, with the purpose of guarantee the existence of the K-frames associated to an operator on the spaces $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero darle gracias a Dios, por darme la fuerza necesaria para la realización de este trabajo.

Así mismo a mis padres, Luis Manuel Vergara Vargas, Carmen Elena Ramírez Carrasco, por todo su amor y motivación por seguir adelante.

A mi esposa e hijos por ser mi fortaleza, brindandome todo su amor y apoyo en todo momento.

A todos los docentes que contribuyeron a mi formación académica y en especial a los Doctores Osmin Ferrer Villar, mi director de trabajo de grado, Edilberto Arroyo Ortiz, mi codirector, por su orientación y paciencia en el desarrollo de este proyecto.

Por último, pero no menos importante, quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que no aparecen explícitamente en las anteriores líneas y que han colaborado para que este trabajo se hiciera realidad.

Índice general

Declaración de Autoría	III
Resumen	v
Agradecimientos	IX
1. PRELIMINARES	5
1.1. Espacios de Hilbert	5
1.2. Conjuntos Ortonormales	11
1.3. Operadores lineales	15
2. MARCOS EN ESPACIOS DE HILBERT	22
2.1. Marcos y sus propiedades	22
2.2. K-marcos en espacios de Hilbert	30
3. ELEMENTOS BÁSICOS DEL ANÁLISIS p-ÁDICO	33
3.1. Elementos básicos del análisis p-ádico	33
3.1.1. Números p -ádicos	33
Topología en \mathbb{Q}_p	41
3.1.2. Integración en \mathbb{Q}_p	43
3.2. Funciones localmente constantes	46
3.2.1. Espacio de Bruhat-Schwartz	46
3.2.2. Carácteres aditivos en \mathbb{Q}_p	47
3.2.3. Transformada de Fourier en \mathbb{Q}_p^n	48
3.2.4. Operadores pseudodiferenciales en \mathbb{Q}_p^n	48
3.3. Una base de Wavelet para los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$	49
3.3.1. Los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$	49

3.3.2. Bases de Wavelet para los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$	49
3.4. Marcos p -ádicos	55
4. CONCLUSIONES	59
4.1. Conclusiones	59
4.2. Trabajos futuros	59
Bibliografía	60

Índice de figuras

3.1. Completaciones respecto a las distintas normas en \mathbb{Q} [11]	38
3.2. Árbol 3-ádico[13]	40
3.3. Árbol 3-ádico finito[13]	40
3.4. Todos los triángulos en \mathbb{Q}_p son isósceles[11]	43

Lista de Símbolos

Símbolo	Nombre o significado
$(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	Espacio de Hilbert
$\ T\ $	Norma de un operador
$\ell^2(\mathbb{N})$	Conjunto de sucesiones cuadrado sumables
T^*	Operador adjunto
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$	Marco para un espacio de Hilbert
S	Operador marco
$ x _p$	Valor absoluto p -ádico
$\{x\}_p$	Parte fraccionaria de un número p -ádico
\mathbb{Z}_p	Anillo de enteros p -ádico
\mathbb{Q}_p	Campo de los números p -ádico
$(\mathbb{Q}_p, +)$	Grupo topológico localmente compacto
$\mathbb{D}(\mathbb{Q}_p)$	Espacio de Bruhat-Schwartz
$\widehat{\varphi}(\xi)$	Transformada de Fourier en \mathbb{Q}_p
$\ \xi\ $	Operador pseudodiferencial
$\langle \varphi, \theta \rangle_l$	Producto escalar en $\mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}}$
$\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$	Espacio de Hilbert p -ádico

Dedico este proyecto a Dios quien ha sido mi guía y fortaleza, por su fidelidad y amor que han estado conmigo hasta este momento tan importante de mi formación profesional.

A mis hijos Luisa Fernanda, Jose Miguel y Emiliano, ellos han sido mi inspiración en los momentos más angustiosos de este camino.

Mi esposa Yenni Milet Urrea por entender que, durante el desarrollo de esta tesis, fue necesario sacrificar situaciones y momentos a su lado para así poder completar exitosamente mi trabajo académico.

Mis padres Luis Vergara y Carmen Ramírez por ser el ejemplo en el sendero de cada acto que realizo y que me incentiva a superarme cada día.

INTRODUCCIÓN

Los marcos en espacios de Hilbert son una herramienta fundamental en el análisis de señales y en la teoría de la representación. Introducidos originalmente por Duffin y Schaeffer [9] en la década de 1950, los marcos son una generalización de las bases ortogonales, permitiendo una mayor flexibilidad en la representación de señales.

Un marco en un espacio de Hilbert es una sucesión de vectores $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} que cumple ciertas propiedades. En particular, se requiere que existan constantes A y B, llamadas cotas del marco, tales que para todo vector $x \in \mathcal{H}$ se cumpla la desigualdad

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \text{ para todo } x \in \mathcal{H}. \quad (1)$$

Esta desigualdad establece que los coeficientes de la expansión de x en términos de los elementos del marco están acotados en términos de la norma de x . Esto implica que los vectores del marco generan un sistema sobredeterminado (un sistema sobredeterminado significa que hay más vectores en el marco de los necesarios, lo que puede llevar a la falta de unicidad en la solución o a la existencia de múltiples soluciones).

Los marcos tienen diversas aplicaciones en el procesamiento de señales ver [7] y [6]. Por ejemplo, en la compresión de imágenes, los marcos pueden utilizarse para representar una imagen original con un número reducido de coeficientes, permitiendo una compresión eficiente. Además, los marcos pueden usarse en el diseño de filtros y en la detección de señales en el análisis de señales.

Por otro lado, los números p -ádicos son una extensión de los números racionales que se introdujeron en la década de 1930 por el matemático alemán Kurt Hensel. Los números p -ádicos se basan en una idea central: la posibilidad de representar

números no solo en base 10, como estamos acostumbrados, sino en otras bases.

En particular, los números p -ádicos se definen en base p , donde p es un número primo. Por lo tanto, en los números p -ádicos, los dígitos van desde 0 hasta $p - 1$, en lugar de solo 0 – 9 como en los números decimales. También es importante destacar que los números p -ádicos pueden tener una cantidad infinita de dígitos a la derecha del punto decimal.

La teoría de los números p -ádicos es muy diferente de la teoría de los números reales. Por ejemplo, en los números p -ádicos, la noción de cercanía es diferente. Dos números p -ádicos se consideran cercanos si tienen una gran cantidad de dígitos comunes en la parte fraccional. Esta idea puede parecer extraña al principio, pero proporciona resultados interesantes y poderosos en la teoría de números.

La valuación p -ádica es una forma de medir el tamaño de un número de acuerdo con su divisibilidad por un número primo específico, denotado como p . En lugar de utilizar la métrica usual (o "valor absoluto") para medir el tamaño de un número, los números p -ádicos utilizan una métrica llamada métrica ultramétrica; esta métrica asigna un valor a cada número de acuerdo con cuánto se puede dividir por p : mientras más veces se puede dividir un número por p , más pequeño es su valor p -ádico.

Por ejemplo, consideremos el número $p = 2$ con la métrica p -ádica, el número 8 tendría un valor p -ádico más pequeño que el número como 16, porque 8 se puede dividir más veces por 2 que 16. Esto puede ser algo contrario a nuestra intuición con la métrica usual, donde 16 es mayor que 8.

Los números p -ádicos también tienen propiedades interesantes en el ámbito del análisis [13]. Por ejemplo, los números p -ádicos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir de manera similar a los números reales. Sin embargo, algunas operaciones pueden tener resultados diferentes en los números p -ádicos en comparación con los números reales. Por ejemplo, en los números p -ádicos, la suma de una serie infinita de números puede ser finita.

En resumen, los números p -ádicos son una fascinante extensión de los números racionales que se definen en una base p . Estos números tienen propiedades interesantes y se aplican en diferentes áreas de la matemática, como la teoría de números y el análisis. Su estudio ha llevado a importantes resultados y ha abierto nuevas líneas de investigación en matemáticas.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo se exponen algunas características de los espacios de Hilbert, los conjuntos ortonormales y los operadores lineales entre otros, los cuales nos serán de ayuda al momento de desarrollar la temática presentada en el Capítulo 2, donde se darán algunas descripciones de los marcos en los espacios de Hilbert separables.

1.1. Espacios de Hilbert

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial, generalmente de dimensión infinita, que está equipado con un producto interno que permite definir una noción de longitud entre vectores. Estos espacios son nombrados así en honor a David Hilbert, un matemático alemán que hizo importantes contribuciones a la teoría de números, la geometría y el análisis. En un espacio de Hilbert, los vectores pueden ser sumados entre sí y multiplicados por escalares, de manera similar a un espacio vectorial convencional. Sin embargo, la diferencia radica en la existencia de un producto interno, que es una función que asigna a cada par de vectores un número complejo y satisface ciertas propiedades algebraicas.

Definición 1.1. Sea \mathcal{H} un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos, una función $\|\cdot\| : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$ es una norma si verifica las siguientes condiciones:

- (i) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = \mathbf{0}$.
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, para todo $x \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

La condición (iii) en la Definición(1,1), se conoce como **desigualdad triangular**. Denotaremos la norma sobre \mathcal{H} por $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Si \mathcal{H} está dotado de una norma, decimos que \mathcal{H} es un **espacio vectorial normado**.

Definición 1.2. Sean $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ un espacio vectorial normado y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos \mathcal{H} .

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, con $x \in \mathcal{H}$ si y sólo si

$$\|x - x_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

(ii) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una **Sucesión de Cauchy**, si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_n\|_{\mathcal{H}} < \epsilon, \text{ siempre que } n, m \geq N.$$

Observación 1.1. Una sucesión convergente es automáticamente una sucesión de Cauchy, pero lo contrario en general no es cierto. Sin embargo, los espacios vectoriales normados en los que una sucesión es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy se denominan **espacios de Banach**.

Definición 1.3. Sea \mathcal{H} un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos, un producto interno en \mathcal{H} es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que para cada $x, y, z \in \mathcal{H}$ y cada $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\langle \lambda x + \beta y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle,$

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. (Aquí, $\overline{\langle y, x \rangle}$ denota el conjugado del número complejo $\langle y, x \rangle$),

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Más aún, $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = \mathbf{0}$. (En este caso se suele decir que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una función definida positiva).

El par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se denomina espacio con producto interno.

Ejemplo 1.1. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$, sean $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, la siguiente fórmula

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

determina un producto interno en \mathbb{R}^n sobre el campo de los números reales \mathbb{R} .

Ejemplo 1.2. Consideremos el espacio vectorial \mathbb{C}^n , en él definimos el siguiente producto interno en \mathbb{C}^n

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i.$$

donde $z, w \in \mathbb{C}^n, z = (z_1, \dots, z_n), w = (w_1, \dots, w_n)$.

Ejemplo 1.3. [5] Consideremos el conjunto de sucesiones cuadrado sumables, el cual denotaremos por $\ell^2(\mathbb{N})$, definido por:

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ x = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} : \alpha_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \right\}.$$

El producto interno usual dado en $\ell^2(\mathbb{N})$ le da estructura de espacio de Hilbert, este producto interno está definido por

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2} : \quad \ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}) &\rightarrow \langle \alpha_n, \beta_n \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \bar{\beta}_n, \end{aligned}$$

para todo $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Teorema 1.4. [14](Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Sean $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno, entonces para todo $x, y \in \mathcal{H}$ se cumple la desigualdad

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Demostración. Sea $x, y \in \mathcal{H}$.

Caso 1. Supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $x = \lambda y$, entonces

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &= |\langle \lambda y, y \rangle| = |\lambda \langle y, y \rangle| = |\lambda| |\langle y, y \rangle| \\ &= |\lambda| \|y\|^2 = |\lambda| \|y\| \|y\| = \|\lambda y\| \|y\| \\ &= \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Caso 2. Supongamos que para todo λ , $x - \lambda y \neq 0$, entonces

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \tag{1.1}$$

$$= \langle x, x \rangle - \langle x, \lambda y \rangle - \langle \lambda y, x \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle \tag{1.2}$$

$$= \langle x, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle. \tag{1.3}$$

Sea $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ (podemos suponer que $y \neq 0$) Sustituyendo λ en (1.3) tenemos lo siguiente,

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle + \frac{\overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, y \rangle,$$

multiplicando en ambos lados por $\langle y, y \rangle$, tenemos

$$0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}$$

$$\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

□

Teorema 1.5. [14] Si $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno, definimos una norma sobre \mathcal{H} de la siguiente forma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Esta es la norma inducida por el producto interno.

Demostración. Notemos que $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ y que $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$. Por otro lado, si $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$|\alpha|^2 \|x\|^2 = \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \|\alpha x\|^2,$$

Así $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$. Finalmente, para la desigualdad triangular, utilizamos la desigualdad (1.4) tenemos,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

La conocida ley del paralelogramo, nos permite verificar, cuándo la norma de un espacio normado proviene de un producto interior para dicho espacio.

Teorema 1.6. Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y $x, y \in \mathcal{H}$, se cumple lo siguiente

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demostración. Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno.

Si $x, y \in \mathcal{H}$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= [\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle] + [\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle] \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

□

Definición 1.4. Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio Pre-Hilbert. Se dice que $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert si es completo con respecto a la norma inducida por el producto interno, es decir, si toda sucesión de Cauchy en \mathcal{H} converge a un elemento $x \in \mathcal{H}$ (la convergencia se tiene con respecto a la norma asociada al producto interior).

Definición 1.5. [14] Un espacio de un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se dice separable si admite una base ortonormal numerable.

Ejemplo 1.7. [14] Los espacios más destacados de espacios de Banach son los espacios $L^p([a, b]; \mathbb{C})$, con $1 < p < \infty$. Dichos espacios se definen del siguiente modo. Sean $[a, b] \in \mathbb{R}$ un intervalo y $1 < p < \infty$. Entonces

$$L^p([a, b]; \mathbb{C}) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Se puede demostrar que los espacios $L^p([a, b]; \mathbb{C})$, $1 < p < \infty$, equipados con la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 < p < \infty,$$

es un espacio de Banach.

En el caso $p = 2$. $\|\cdot\|_2$ es la norma asociada al producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{para todo } f, g \in L^2,$$

con lo cual $L^2([a, b]; \mathbb{C})$ es un espacio de Hilbert.

1.2. Conjuntos Ortonormales

En el contexto de los espacios de Hilbert, los conjuntos ortonormales desempeñan un papel fundamental. Un conjunto de vectores se dice que es ortonormal si todos los vectores son ortogonales entre sí (su producto interno es cero si los vectores son diferentes) y tienen una norma igual a 1. Estos conjuntos son especialmente importantes en los espacios de Hilbert ya que permiten expresar cualquier vector del espacio como una combinación lineal de vectores del conjunto ortonormal. Este resultado es conocido como la expansión en términos de una base ortonormal.

Definición 1.6. Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno. Dos elementos $x, y \in \mathcal{H}$ son ortogonales, y escribimos $x \perp y$, cuando $\langle x, y \rangle = 0$. También, dos conjuntos $A, B \subset \mathcal{H}$ son ortogonales si $x \perp y$, para todo $x \in A, y \in B$. Dado un subconjunto $A \subset \mathcal{H}$, el complemento ortogonal de A es el conjunto

$$A^\perp = \{x \in \mathcal{H} : x \perp A\}.$$

El siguiente resultado muestra la continuidad del producto interno.

Lema 1. Sean $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$ dos sucesiones en \mathcal{H} convergentes con límites x e y respectivamente, entonces $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.

Demostración. Sean $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$ sucesiones en $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que convergen a x e y , respectivamente con x e $y \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ya que $y_n \rightarrow y$ y $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$. \square

A continuación resaltamos algunos resultados importantes en la teoría de espacios de Hilber, sus pruebas pueden ser consultadas en (Ver [5]).

Lema 2. Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. Entonces, se cumple lo siguiente:

1. Para cualquier $x \in \mathcal{H}$

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|. \quad (1.4)$$

2. Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert complejo, entonces para cualquier $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2); \quad (1.5)$$

en caso que \mathcal{H} sea un espacio de Hilbert real,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

3. Supongamos que $x, y \in \mathcal{H}$ satisfacen que

$$\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle, \text{ para todo } z \in \mathcal{H}. \quad (1.6)$$

Entonces, $x = y$.

4. Para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} , las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es completa en \mathcal{H} ,

(ii) si $\langle x, x_n \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$.

Definición 1.7. Sea \mathcal{H} un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y S un subconjunto de \mathcal{H} . Se dice que S es un conjunto ortogonal de vectores de \mathcal{H} , si cada par de vectores distintos son ortogonales.

En particular, si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, S sera ortogonal si y sólo si

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} \|v_i\|^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Si además cada vector del conjunto ortogonal $S \in \mathcal{H}$ tiene norma 1. El conjunto S se le llama conjunto ortonormal.

En forma general, un conjunto indexado o familia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es llamada ortogonal si $x_\alpha \perp x_\beta$ para todo $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \neq \beta$. La familia se llama ortonormal, si todos los x_α tiene norma 1, de modo que para todo $\alpha, \beta \in I$ tenemos

$$\langle x_\alpha, y_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

Donde $\delta_{\alpha, \beta}$ es conocida como la Delta de Kronecker.

Definición 1.8. Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert con producto interno, una sucesión $\{e_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{H}$ es un **sistema ortogonal** si

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta}$$

Una **base ortonormal** es un sistema ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, tal que $\overline{\text{span}}\{e_n\}_{n=1}^\infty = \mathcal{H}$.

Teorema 1.8. Para un sistema ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ es una base ortonormal,
- (ii) $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$, para todo $x \in \mathcal{H}$,
- (iii) $x = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle e_n$, para todo $x \in \mathcal{H}$,
- (iv) $\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle f, e_n \rangle \langle e_n, g \rangle$, para todo $f, g \in \mathcal{H}$,
- (v) $\overline{\text{span}}\{e_n\}_{n=1}^\infty = \mathcal{H}$,
- (vi) si $\langle x, e_n \rangle = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$.

La igualdad presente en (ii) se conoce como **La identidad de Parseval**.

Definición 1.9. Un espacio de un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se dice separable si admite una base ortonormal numerable.

Teorema 1.9. [14] (*Desigualdad de Bessel*) Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de producto interno y $\{x_i\}_{i=1}^n$ una familia ortonormal de vectores en \mathcal{H} , entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Para cada vector $x \in \mathcal{H}$.

Demostración. Sean $x \in \mathcal{H}$ fijo y $\{x_i\}_{i=1}^n$ un conjunto ortonormal finito. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i, x - \sum_{j=1}^n \langle x, x_j \rangle x_j \right\rangle \\ &= \left\langle x, x - \sum_{j=1}^n \langle x, x_j \rangle x_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i, x - \sum_{j=1}^n \langle x, x_j \rangle x_j \right\rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \left\langle x, \sum_{j=1}^n \langle x, x_j \rangle x_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i, x \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i, \sum_{j=1}^n \langle x, x_j \rangle x_j \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n \langle x, \langle x, x_j \rangle x_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \langle x, x_i \rangle x_i, x \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \langle x, x_i \rangle x_i, \langle x, x_j \rangle x_j \rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n \overline{\langle x, x_j \rangle} \langle x, x_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x, x_i \rangle \overline{\langle x, x_j \rangle} \langle x_i, x_j \rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n \overline{\langle x, x_j \rangle} \langle x, x_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle \overline{\langle x, x_i \rangle} + \sum_{j=1}^n \langle x, x_j \rangle \overline{\langle x, x_j \rangle} \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n |\langle x, x_j \rangle|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle x, x_j \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Ahora si $\{x_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto ortonormal arbitrario la conclusión anterior implica fácilmente que $\sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. \square

1.3. Operadores lineales

Los operadores lineales son una herramienta fundamental en el estudio de los espacios normados, estos operadores son funciones que transforman elementos de un espacio vectorial en elementos de otro espacio vectorial de la misma dimensión. En el contexto de los espacios normados, los operadores lineales también preservan la estructura de la norma.

Es decir, si tenemos dos espacios normados $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_1), (\mathcal{H}_2, \|\cdot\|_2)$, un operador lineal $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ es lineal si cumple las siguientes propiedades:

Definición 1.10. Sean $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_1), (\mathcal{H}_2, \|\cdot\|_2)$ espacios normados sobre \mathbb{C} , una aplicación $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ es un **operador lineal**, si para todo par de vectores $x, y \in \mathcal{H}_1$ y para todo escalar $\alpha \in \mathbb{C}$, se cumple lo siguiente

$$i) T(x + y) = T(x) + T(y),$$

$$ii) T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Definición 1.11. Sean $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_1), (\mathcal{H}_2, \|\cdot\|_2)$ espacios normados sobre \mathbb{C} . Se dice que $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ un **operador lineal acotado**, si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_2 \leq M\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1.$$

De ahora en adelante en lugar de escribir $T(x)$ escribiremos Tx para denotar la imagen de x bajo el operador T . El **conjunto de los operadores lineales y acotados** de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H}_2 se denota por $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. En caso que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ lo denotamos sólo como $B(\mathcal{H})$.

Definición 1.12. Dado un operador $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ lineal y acotado, la norma del operador T se define de la siguiente manera

$$\|T\| = \inf\{k \in \mathbb{R} : \|Tx\|_2 \leq k\|x\|_1, \text{ para todo } x \in \mathcal{H}_1\}.$$

Teorema 1.10. [14] *La norma de un operador se puede expresar mediante las siguientes equivalencias:*

$$(i) \|T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|};$$

$$(ii) \|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|,$$

$$(iii) \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Ejemplo 1.11. *Si $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es el operador identidad, entonces $\|I\| = 1$ y si $0 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ es el operador nulo, entonces $\|0\| = 0$.*

Teorema 1.12. [14] *Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $T \in B(\mathcal{H})$, entonces*

(i) *Existe un único $T^* \in B(\mathcal{H})$, llamado operador adjunto de T , tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ para todo par x, y de elementos \mathcal{H} . Además*

$$\|T\| = \|T^*\| \quad , \quad T^{**} = T,$$

y para todo operador T, S en $B(\mathcal{H})$, se tiene que

$$(T + S)^* = T^* + S^*, \quad (\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*, \text{ para todo } \lambda \in \mathbf{C}, \text{ y}$$

$$(TS)^* = S^*T^*, \text{ donde } TS \text{ es el operador en } \mathcal{H} \text{ definido por } TSx = T(Sx), \text{ para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Definición 1.13. *Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $T \in B(\mathcal{H})$. Diremos que es **positivo**, (se escribe $T \geq 0$), si $T \in B(\mathcal{H})$ y $\langle Tx, y \rangle \geq 0$, para todo $x, y \in \mathcal{H}$.*

Definición 1.14. *Un funcional es un operador cuyo rango está en el conjunto \mathbb{R} o \mathbb{C} . Un funcional lineal es un operador lineal $f : \mathcal{H} \rightarrow E$, donde \mathcal{H} es un espacio vectorial y E su cuerpo de escalares. Un funcional lineal y acotado es un operador lineal acotado cuyo rango está en E , cuerpo de escalares del espacio normado \mathcal{H} , es decir si existe $k > 0 : |f(x)| \leq k\|x\|$, para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Ejemplo 1.13. *La aplicación $f : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ donde $a_i \in \ell^2(\mathbb{N})$ fijo, es un funcional lineal y acotado pues, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene $|f(x)| \leq \|x\|_2 \|a\|_2$.*

Definición 1.15. Sea \mathcal{H} un espacio normado; el espacio dual de \mathcal{H} es $\mathcal{H}^* := \{f : \mathcal{H} \rightarrow E : f \text{ lineal y acotado}\}$. Si $\dim \mathcal{H} < \infty$, este concepto coincide con el dual algebraico.

El espacio \mathcal{H}^* siempre es completo por serlo el cuerpo de escalares de \mathcal{H} . A menudo es conveniente estudiar el espacio dual de un espacio normado, para obtener propiedades del mismo espacio.

Ejemplo 1.14. [14] El dual de \mathbb{R}^n con la norma euclídea es \mathbb{R}^n , en realidad es un espacio isométrico a \mathbb{R}^n :

Como $\dim \mathbb{R}^n = n$, todo f lineal es acotado.

Si $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i)$. Por la desigualdad de Chauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i f(e_i)| \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |f(e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\| \left(\sum_{i=1}^n |f(e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde $\|f\| \leq \left(\sum_{i=1}^n |f(e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Tomando en particular $x = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$, se obtiene la igualdad. Así $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^n |f(e_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ coincide con la norma euclídea y la función $f \rightarrow \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ es un isomorfismo isométrico del $(\mathbb{R}^n)^*$ en \mathbb{R}^n .

Teorema 1.15. [14](Teorema de Representación de Riesz) Un funcional $f : \mathcal{H} \rightarrow E$ de un espacio de Hilbert es lineal y acotado si y sólo si existe un único $y \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Además $\|f\| = \|y\|$.

Demostración. \Rightarrow) Si f es el funcional lineal cero el Teorema es válido haciendo $y = 0$. Supongamos entonces que f no es el funcional lineal cero y sea

$$M := \ker f = \{x \in \mathcal{H} : f(x) = 0\}.$$

M es un subespacio propio y cerrado de \mathcal{H} pues f es continuo y $M = f^{-1}(0)$.

Entonces $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$. Como f no es el funcional cero, $M^\perp \neq 0$.

Sea $z \in M^\perp$, $z \neq 0$ tal que $f(z) = 1(z = \frac{w}{f(w)}$ con $w \neq 0$). Para todo $x \in \mathcal{H}$ se tiene

$$x = (x - f(x)z) + f(x)z \quad (1.7)$$

donde $x - f(x)z \in M$ y $f(x)z \in M^\perp$ pues $z \in M^\perp$. Multiplicamos ambos lados de la igualdad (1.7) por z y usando el hecho que $z \perp M$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle &= \langle (x - f(x)z) + f(x)z, z \rangle \\ &= \langle (x - f(x)z), z \rangle + \langle f(x)z, z \rangle = \langle f(z), z \rangle \\ &= f(x)\|z\|^2. \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Sea $y = \frac{z}{\|z\|^2}$, entonces

$$\langle x, y \rangle = \frac{\langle x, z \rangle}{\|z\|^2} = f(x), \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Supongamos que existen $y, y' \in \mathcal{H}$ tales que $\langle x, y \rangle = f(x) = \langle x, y' \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces

$$0 = \langle x, y \rangle - \langle x, y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, -y' \rangle = \langle x, y - y' \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

$y - y' = 0$, por lo tanto $y = y'$. Esto termina de probar la primera afirmación del Teorema.

\Leftarrow) Si $\|x\| \leq 1$, entonces por la desigualdad de *Cauchy – Schwarz*

$$|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\| = \|y\|$$

por lo tanto $\|f\| \leq \|y\|$. Por otro lado $x = \frac{y}{\|y\|}$ es un vector unitario, entonces

$$\|f\| \geq |f(x)| = \frac{|\langle y, y \rangle|}{\|y\|} = \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|.$$

Así $\|f\| = \|y\|$. □

Definición 1.16. *Dados dos espacios vectoriales $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, una forma sesquilineal es una función $h : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow E$ tal que h es lineal en la primera variable y antilineal en la segunda.*

Si \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 son espacios vectoriales normados, h esta acotada, si existe $c \geq 0$ tal que $|h(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|$ y se define $\|h\| = \sup_{x, y \neq 0} \frac{|h(x, y)|}{\|x\| \|y\|}$ como la norma de h .

Teorema 1.16. [5] *Sean $U_n : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ una familia de operadores acotados, que converge puntualmente a una función $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$. Entonces U es lineal y acotado. Además, $\|U_n\|$ esta acotada y $\|U_n\| \leq \liminf \|U_n\|$.*

Un operador $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ es invertible si U es sobreyectivo e inyectivo. Para un operador acotado e invertible, el operador inverso es acotado.

Teorema 1.17. [5] *Un operador biyectivo acotado entre espacios de Banach tiene inverso acotado.*

En el caso $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, tiene sentido hablar del operador identidad I en \mathcal{H}_1 . El teorema de Neuman afirma que un operador $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ es invertible si es suficientemente próximo al operador identidad; una demostración se encuentra en la página 48 en [12].

Teorema 1.18. [5] *Sea $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ un operador lineal acotado y $\|I - U\| \leq 1$, entonces U es invertible, y*

$$U^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - U)^k \quad (1.8)$$

mas aún

$$\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - U\|} \quad (1.9)$$

Notemos que $\|U^{-1} - \sum_{k=0}^N (I - U)^k\| \rightarrow 0$ si $N \rightarrow \infty$.

Demostración. Consideremos el operador $T = \sum_{k=0}^{\infty} (I - U)^k$, entonces

$$\|T\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (I - U)^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|(I - U)^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|(I - U)\|^k < \infty$$

Ya que $\sum_{k=0}^{\infty} \|(I - U)\|^k$ es una serie geométrica con $\|(I - U)\| < 1$. Es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leq M$. Así

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\| \leq M \text{ de donde } \|Tx\| \leq M\|x\|,$$

Por tanto T es acotado. Por otro lado

$$\begin{aligned} UT &= U \sum_{k=0}^{\infty} (I - U)^k = \sum_{k=0}^{\infty} U(I - U)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (I - (I - U))(I - U)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(I - U)^k - (I - U)^{k+1}] \end{aligned}$$

Ahora bien consideremos

$$Z_n = \sum_{k=0}^n [(I - U)^k - (I - U)^{k+1}] = I - (I - U)^{n+1},$$

entonces

$$\begin{aligned} \|Z_n - I\| &= \|I - (I - U)^{n+1} - I\| = \|(I - U)^{n+1}\| \\ &= \|(I - U)^n(I - U)\| \leq \|(I - U)^n\| \|I - U\| \leq \|(I - U)^n\| = \|(I - U)\|^n. \end{aligned}$$

Así $\|Z_n - I\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Por tanto, $UT = \sum_{k=0}^{\infty} [(I - U)^k - (I - U)^{k+1}] = I - (I - U)^{n+1} = I$.

De forma similar, $TU = I$. Teniendo de esta forma que U es invertible y $T = U^{-1}$, es decir,

$$U^{-1} = T = \sum_{k=0}^{\infty} (I - U)^k,$$

quedando demostrado (1.8). Luego,

$$\begin{aligned} \|U^{-1}\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (I - U)^k \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|(I - U)^k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|(I - U)\|^k \text{ (serie convergente)} \\ &= \frac{1}{1 - \|(I - U)\|} \text{ ya que } \|(I - U)\| < 1. \end{aligned}$$

queda demostrada (1.9).

□

Definición 1.17. Sean $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espacios de Hilbert y $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ un operador, no necesariamente lineal. Se dice que T es continuo en $h_0 \in \mathcal{H}_1$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Th - Th_0\| < \epsilon \text{ siempre que } \|h - h_0\| < \delta \text{ para } h \in \mathcal{H}_1.$$

T es continuo en \mathcal{H}_1 si T es continuo en todo $h \in \mathcal{H}_1$.

Capítulo 2

MARCOS EN ESPACIOS DE HILBERT

Un marco para un espacio de Hilbert es una generalización de una base ortonormal y es una herramienta que permite escribir cada vector del espacio como una combinación lineal de elementos del marco, sin que se requiera independencia lineal entre los elementos del marco. Dichos marcos juegan un papel importante en el análisis de wavelet, en el procesamiento de señales, en ingeniería, en física, etc.

Los marcos en los espacios de Hilbert son utilizados, por ejemplo, en el procesamiento de señales con funciones que tengan las estructuras de Wevelet, las cuales se usan para realizar aproximaciones de datos con variación o con discontinuidades abruptas, ver [7, 6].

2.1. Marcos y sus propiedades

De ahora en adelante \mathcal{H} denotará un espacio de Hilbert separable con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 2.1. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de \mathcal{H} es llamada sucesión de Bessel si existe $B > 0$ tal que para toda $x \in \mathcal{H}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B \|x\|^2.$$

A la constante B se le conoce como una cota de Bessel para $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

El siguiente resultado muestra una caracterización de las sucesiones de Bessel.

Teorema 2.1. [5] Sean $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert separable, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathcal{H} y $B > 0$. Entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel con cota de Bessel B si y sólo si

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow H$$

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow T(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

es un operador acotado, bien definido y $\|T\| < \sqrt{B}$.

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel con cota de Bessel B . Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$. En primer lugar notemos que $T(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty})$ está bien definido, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ es convergente.

En efecto, consideramos $M, N \in \mathbb{N}$, con $N > M$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^M \alpha_n x_n \right\| &= \left\| \sum_{n=M+1}^N \alpha_n x_n \right\| \\ &= \sup_{\|g\|=1} \left| \sum_{n=M+1}^N \langle \alpha_n x_n, g \rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{n=M+1}^N |\alpha_n \langle x_n, g \rangle| \\ &\leq \left(\sum_{n=M+1}^N |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{n=M+1}^N |\langle x_n, g \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{B} \left(\sum_{n=M+1}^N |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Puesto que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$, sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ es convergente y en consecuencia la sucesión de sumas parciales es de Cauchy en \mathbb{C} .

Los cálculos anteriores muestran que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ es una sucesión de Cauchy en \mathcal{H} y por tanto una sucesión convergente en \mathcal{H} . Así $T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow H$ está bien definido.

Claramente T es lineal; ya que

$$\|T\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\| = \sup_{\|g\|=1} |T\langle \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, g \rangle|,$$

un cálculo como el anterior muestra que T está acotado y que $\|T\| \leq \sqrt{B}$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \|T(\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty)\| &= \left\| \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n \right\| = \sup_{\|x\|=1} \left| \sum_{n=1}^\infty \langle \alpha_n x_n, x \rangle \right| \leq \sup_{\|x\|=1} \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n \langle x_n, x \rangle| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_{n=1}^\infty |\langle x_n, x \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{B} \|\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty\|_{\ell^2}. \end{aligned}$$

Para la otra implicación, suponemos que T está bien definido y que $\|T\| \leq \sqrt{B}$

Ahora bien, dado que:

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \|x\|^2 \leq (\sqrt{B})^2 \|x\|^2 = B \|x\|^2, \text{ para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Entonces, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Bessel con cota de Bessel B . \square

Definición 2.2. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de \mathcal{H} es un marco para \mathcal{H} si existen constantes $0 < A, B < \infty$ tales que

$$A \|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B \|x\|^2, \text{ para todo } x \in \mathcal{H}. \quad (2.1)$$

Los números A, B se denominan **cotas de marco**. No son únicas. La cota de marco superior óptima es la mínima sobre todas las cotas de marcos superiores, y la cota de marco inferior óptima es el supremo sobre todas las cotas de marcos inferiores.

Definición 2.3. Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ un marco para \mathcal{H} con cota superior A y cota inferior B decimos que:

- (i) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es un **marco ajustado** si $A = B$,
- (ii) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es un **marco de Parseval** si $A = B = 1$,
- (iii) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es un **marco exacto** si deja de ser un marco cuando se elimina un elemento arbitrario de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

A continuación, daremos algunos ejemplos de un marcos en espacios de Hilbert \mathcal{H} .

Ejemplo 2.2. Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal para \mathcal{H} y x un elemento arbitrario de \mathcal{H} .

(i) Repitiendo cada elemento en $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos veces obtenemos

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, \dots\},$$

un marco ajustado con cotas de marco $A = B = 2$. Ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = 2\|x\|^2.$$

Si solo se repite e_1 , obtenemos.

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots\},$$

un marco con cotas $A = 1, B = 2$. Ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = |\langle x, e_1 \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = |\langle x, e_1 \rangle|^2 + \|x\|^2.$$

Luego,

$$1\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq 2\|x\|^2.$$

(ii) Sea

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} := \left\{ e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \dots \right\};$$

es decir, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión donde cada vector $\frac{1}{\sqrt{n}}e_n$ se repite n veces. Entonces, para cada $x \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \langle x, \frac{1}{\sqrt{n}}e_n \rangle \right|^2 = \|x\|^2.$$

Así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un marco ajustado para \mathcal{H} con cota de marco $A = 1$, es decir, un marco de Parseval.

Definición 2.4. Sean $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un marco para \mathcal{H} . Dado que un marco $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel, el operador

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$$

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow T(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

está bien definido y es acotado, este operador T se denomina **operador síntesis** u **operador pre-marco**.

Observación 2.1. [5] El adjunto del operador pre-marco esta dado por:

$$T^* : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$$

$$x \rightarrow T^* x = \{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$$

este operador es llamado **operador de análisis**.

Demostración. Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$, $x \in \mathcal{H}$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un marco para \mathcal{H} .

$$\begin{aligned} \langle T(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}), x \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, x \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \alpha_n x_n, x \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x_n, x \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}}} \\ &= \langle \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \rangle_{\ell^2} = \langle \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, T^* x \rangle_{\ell^2}. \end{aligned}$$

Así, $\langle T(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}), x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, T^* x \rangle_{\ell^2}$.

Por lo tanto $T^* x = \{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ es el operador adjunto de T . □

Observación 2.2. Realizando la composición de T y T^* , obtenemos el operador marco

$$S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad Sx = TT^* x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k. \quad (2.2)$$

Notemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel, la serie que define a S es convergente para toda $x \in \mathcal{H}$, a continuación enunciamos algunas propiedades importantes de S .

Teorema 2.3. [5] Sean $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un marco para \mathcal{H} , con operador de marco S y cotas de marco A, B . Entonces $\langle Sx, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$, para todo $x \in \mathcal{H}$.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle Sx, x \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, x \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \langle x, x_n \rangle x_n, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \langle x_n, x \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \overline{\langle x, x_n \rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

□

Lema 3. [5] Sean $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un marco para \mathcal{H} , con operador de marco S y cotas de marco A, B . Entonces se cumple lo siguiente:

- (i) S es acotado, invertible, autoadjunto y positivo.
- (ii) $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un marco con cotas B^{-1}, A^{-1} . Si A, B son las cotas óptimos para $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces las cotas B^{-1}, A^{-1} son óptimos para $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$. El operador de marco para $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ viene dado por S^{-1} .

Demostración. (i) Puesto que S es la composición de operadores acotados, podemos afirmar que S está acotado. Luego tenemos que:

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\| \|T^*\| = \|T\| \|T\| = \|T\|^2 \leq B.$$

Como $S^* = (TT^*)^* = (T^*)^* T^* = TT^* = S$, el operador S es autoadjunto.

Usando el Teorema (2.3), $\langle Sx, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$, para todo $x \in \mathcal{H}$, como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un marco para \mathcal{H} , tenemos que:

$$A\|x\|^2 \leq \langle Sx, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \text{ para todo } x \in \mathcal{H},$$

de lo anterior se tiene que S es positivo, además $AI \leq S \leq BI$, de donde se deduce que $0 \leq I - B^{-1}S \leq \frac{B-A}{B}I$.

Luego,

$$\|I - B^{-1}S\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle (I - B^{-1}S)x, x \rangle| \leq \frac{B-A}{B} < 1.$$

Haciendo uso del Teorema (1.18) se tiene que S es invertible.

(ii) Nótese que para $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, S^{-1}x_n \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle S^{-1}x, x_n \rangle|^2 \leq B \|S^{-1}x\|^2 \\ &\leq B \|S^{-1}\|^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Es decir, $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de Bessel, por el Teorema (2.1) se deduce que el operador marco de $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ está bien definido. Por definición, actúa para todo los elementos $x \in \mathcal{H}$, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, S^{-1}x_n \rangle S^{-1}x_n = S^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \langle S^{-1}x, x_n \rangle x_n = S^{-1}SS^{-1}x = S^{-1}x. \quad (2.3)$$

Lo anterior verifica que el **operador marco** para $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es igual a S^{-1} . Usando el hecho que el operador S^{-1} conmuta con los operadores I y S , además el hecho que $AI \leq S \leq BI$ podemos verificar facilmente que

$$B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I,$$

es decir,

$$B^{-1}\|x\|^2 \leq \langle S^{-1}x, x_n \rangle \leq A^{-1}\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

De donde se deduce que:

$$B^{-1}\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, S^{-1}x_n \rangle|^2 \leq A^{-1}\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H};$$

por lo tanto $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un marco con cotas de marco B^{-1}, A^{-1} .

Para probar la optimización de las cotas (en caso de que A, B sean óptimos para $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, sea A el límite inferior óptimo para $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, y supongamos que la óptima cota superior para $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $C < \frac{1}{A}$. Aplicando lo que ya ha demostrado al marco $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ teniendo el operador de marco S^{-1} , obtenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(S^{-1})^{-1}S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene la cota inferior $\frac{1}{C} > A$, pero

esto es una contradicción. Así $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene la cota superior óptima $\frac{1}{A}$. El argumento para la cota inferior óptima es similar.

□

Observación 2.3. *El Teorema de descomposición de marcos, que se indica a continuación, es el resultado crucial en la teoría de marcos. Muestra que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un marco para \mathcal{H} , entonces cada elemento en \mathcal{H} tiene una representación como una superposición de los elementos del marco. Así es natural ver un marco como una especie de generalización de las bases para espacios de Hilbert.*

Teorema 2.4. [5] *Sean $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un marco para \mathcal{H} , con operador de marco S . Entonces*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}, \quad (2.4)$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle S^{-1}x_n, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}. \quad (2.5)$$

Ambas series convergen incondicionalmente para todo $x \in \mathcal{H}$.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{H}$ usando las propiedades del operador marco en el Lema 3, se tiene

$$x = SS^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle S^{-1}x, x_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n.$$

Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel y $\{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$, podemos afirmar que la convergencia es incondicionalmente para todo $x \in \mathcal{H}$, ver [5] Capítulo 3. La expansión (2.5) se prueba de manera similar, usando que $x = S^{-1}Sx$. □

Observación 2.4. *El Teorema (2.4) muestra que toda la información dada sobre el $x \in \mathcal{H}$ esta contenida en la secuencia $\{\langle x, S^{-1}x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$. Los números $\langle x, S^{-1}x_n \rangle$ son llamados *coeficientes de marco*.*

2.2. K-marcos en espacios de Hilbert

En esta sección se estudiarán los marcos asociados a un operador $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ acotado, en espacios de Hilbert y se analizarán las equivalencias que estos tienen con los sistemas atómicos. Esta sección es muy importante para este trabajo ya que permite realizar la construcción de los K -marcos p -ádicos.

Teorema 2.5. [8] Sean $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$, $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$, $(\mathcal{H}_3, \langle \cdot, \cdot \rangle_3)$ tres espacios de Hilbert y sean $W_1 \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$, $W_2 \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ operadores acotados. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $R(W_1) \subset R(W_2)$;

(ii) $W_1 W_1^* \leq \lambda^2 W_2 W_2^*$ para algún $\lambda \geq 0$;

(iii) Existe un operador acotado $K \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, tal que $W_1 = W_2 K$.

Definición 2.5. [10] (**K-marcos en espacios de Hilbert**) Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio Hilbert y $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador acotado. Se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un K -marco para \mathcal{H} si existen constantes $A, B > 0$ tales que:

$$A \|K^* x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle x, x_n \rangle\|^2 \leq B \|x\|^2, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Definición 2.6. Sea $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Decimos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ es un sistema atómico para K , si las siguientes condiciones se satisfacen:

(i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ converge para todo $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$;

(ii) existe $C > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$ existe $a_x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que

$$\|a_x\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \leq C \|x\| \text{ y } Kx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Observación 2.5. La condición (i) en la Definición (2.6) dice en realidad que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel, ver [5] Capítulo 3.

En el siguiente teorema mostrado en [10], se establece que los sistemas atómicos para un operador acotado, son equivalentes a los K -marcos en los espacios de Hilbert.

Teorema 2.6. [10] Sean $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema atómico para K ;

(ii) existe $0 < A, B < \infty$ tal que

$$A\|K^*x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \text{para cada } x \in \mathcal{H};$$

(iii) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel y existe una sucesión de Bessel $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n.$$

Demostración. (i) \rightarrow (ii). Tenemos $\|K^*x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle K^*x, y \rangle| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, Ky \rangle|$.

Tomando y en lugar de x en la condición (ii) de la Definición (2.6) obtenemos que

$$Ky = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|K^*x\| &= \sup_{\|y\|=1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \langle x, x_n \rangle \right| \leq \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{\|y\|=1} \|y\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{c^2} \|K^*x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$$

(ii) \rightarrow (iii) Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel (ver Observación 2.5) se sigue que $x_n = Te_n$, donde $T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$ es un operador lineal acotado.

Luego

$$A\|K^*x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, Te_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T^*x, e_n \rangle|^2 = \|T^*x\|^2.$$

Del Teorema (2.5) sigue que existe un operador lineal acotado $M : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ tal que $K = TM$.

Consideramos que

$$F_n : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F_n x = (Mx)_n = a_n(x)$$

Denotamos $a = Mx = (Mx)_n$. Tenemos

$$|a_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} = \|a\|_{l^2} \leq \|M\| \|x\|.$$

Se sigue que $|a_n(x)| \leq \|M\| \|x\|$. Por el teorema de representación de Riesz se sigue que existe $g_n \in \mathcal{H}$ tal que

$$a_n = a_n(x) = \langle x, g_n \rangle.$$

Por tanto

$$Kx = TMx = T(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, g_n \rangle f_n.$$

Además,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, g_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \|M\|^2 \|x\|^2,$$

por lo tanto, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel.

(iii) \rightarrow (i) $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, g_n \rangle| \leq B \|x\|^2$. Tomamos para $x \in \mathcal{H}$, $a(x) = \{\langle x, g_n \rangle\}$. \square

Capítulo 3

ELEMENTOS BÁSICOS DEL ANÁLISIS p -ÁDICO

3.1. Elementos básicos del análisis p -ádico

En esta sección se hace un breve estudio de los hechos más importantes del análisis p -ádico que sirven como base para el estudio de los marcos en espacios p -ádicos. En el presente trabajo no se presentan pruebas de los resultados expuestos para facilitar la lectura del mismo, sin embargo, esta parte de la teoría se puede encontrar en el libro de Vladimirov que es una referencia básica en el área (Ver [13]).

3.1.1. Números p -ádicos

Volovich en la década de los 80 propuso utilizar números p -ádicos en lugar de números reales en modelos físicos que tratan con situaciones a nivel de la escala de Planck, más exactamente, propuso que a distancias en la escala de Planck, el espacio-tiempo tiene una estructura no Arquimediana. Por otro lado, las mediciones físicas producen siempre números racionales, no irracionales. Así que el punto de partida son los números racionales \mathbb{Q} y la noción de distancia o norma.

Ejemplo 3.1. *Se puede pensar en la forma de representar un entero en base p . Por ejemplo podemos tener la expansión binaria de 77. Para ello, podemos convertir al sistema binario el número decimal 77 haremos una serie de divisiones sucesivas, que arrojarán los siguientes resultados:*

$$77 \text{ mód } 2 = 1,$$

$$38 \text{ mód } 2 = 0,$$

$$19 \text{ mód } 2 = 1,$$

$$9 \text{ mód } 2 = 1,$$

$$4 \text{ mód } 2 = 0,$$

$$2 \text{ mód } 2 = 0,$$

Último cociente 1.

Ahora tomando el último cociente y los residuos en orden inverso, el resultado es: $1001101_{(2)}$ (binario),

$$\begin{aligned} 1001101 &= (1)2^0 + (0)2^1 + (1)2^2 + (1)2^3 + (0)2^4 + (0)2^5 + (1)2^6 \\ &= 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^6 \\ &= 1 + 4 + 8 + 64 = 77. \end{aligned}$$

Tomando el número binario $111,1_{(2)}$, tenemos el número decimal

$$\begin{aligned} 111,1 &= (1)2^{-1} + (1)2^0 + (1)2^1 + (1)2^2 \\ &= \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 \\ &= 7,5 \end{aligned}$$

Definición 3.1. [11] Sean \mathbb{K} un campo y $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Un valor absoluto sobre \mathbb{K} es una función

$$|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

que satisface las siguientes condiciones:

- (i) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
- (ii) $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$,
- (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

Definición 3.2. [11] Un valor absoluto sobre un campo \mathbb{K} es llamado **no arquimediano** si satisface

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\},$$

para todo $x, y \in \mathbb{K}$. En otro caso, se dice que el valor absoluto es **arquimediano**.

Ejemplo 3.2. Se define un valor absoluto sobre \mathbb{Q} como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0. \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Este valor absoluto se conoce como **valor absoluto usual**, usualmente se denota por $|\cdot|_\infty$ y es un valor absoluto arquimediano.

Tomando $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ y p un primo en \mathbb{Z} . Todo número entero $n \in \mathbb{Z}$ se puede escribir de la siguiente forma $n = p^{v_p(n)}n'$ con $p \nmid n'$, esta representación es única, dado que v está en términos de n y p , tiene sentido definir una función v_p , de modo que v_p es la multiplicidad de p como divisor de n .

Definición 3.3. [11] Sea R un anillo conmutativo. Una función $v : R \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ es una **valuación** si cumple las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in R$:

$$(i) \quad v(x) = \infty \quad \text{si y sólo si } x = 0,$$

$$(ii) \quad v(xy) = v(x) + v(y),$$

$$(iii) \quad v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}.$$

Definición 3.4. [11] Para todo $x \in \mathbb{Q}$ no nulo, definimos el valor absoluto p -ádico de x como

$$|x|_p = p^{-v(x)}$$

Extendemos esta definición a todo \mathbb{Q} , definimos $|0|_p = 0$.

Observación 3.1. Esta definición de $|x|_p$ tiene el efecto de que las altas potencias de p "se vuelven pequeñas", en particular $|2^n|_2 = 1/2^n$

Proposición 3.3. [11] La función $|\cdot|_p$ es un valor absoluto no arquimediano.

Demostración. Para realizar la demostración, basta comprobar que se cumple la definición (3.1).

- (i) Por definición sabemos que $|x|_p = p^{-v(x)} > 0$,
- (ii) $|x|_p = p^{-v(x)} = \frac{1}{p^{v(x)}} = 0$, si y sólo si $v_p(x) = \infty$, si y sólo si $x = 0$,
- (iii) $|x| \cdot |y| = p^{-v(x)} p^{-v(y)} = p^{-(v(x)+v(y))} = |xy|_p$,
- (iv) Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$|x|_p \geq |y|_p$$

$$p^{-v(x)} \geq p^{-v(y)} \implies v_p(x) \geq v_p(y) \implies \min\{v_p(x), v_p(y)\} = v_p(x).$$

De lo anterior y la definición de valuación (3.3), tenemos que

$$v_p(x+y) \geq v_p(x)$$

$$-v_p(x+y) \leq v_p(x)$$

$$p^{-v(x)} p^{-v(y)} \leq p^{-v(x)}$$

$$|x+y|_p \leq |x|_p = \max\{|y|_p, |x|_p\}.$$

□

Con la anterior prueba, la función $|\cdot|_p$ es un valor absoluto, puesto que cumplen las propiedades clásicas de un valor absoluto y además es no arquimediano.

Ejemplo 3.4. $63/550 = 2^{-1} \cdot 3^2 \cdot 5^{-2} \cdot 7 \cdot 11^{-1}$

$$\left| \frac{63}{550} \right|_p = \begin{cases} 2 & \text{si } p = 2, \\ 1/9 & \text{si } p = 3, \\ 25 & \text{si } p = 5, \\ 1/7 & \text{si } p = 7, \\ 11 & \text{si } p = 11, \\ 1 & \text{si } p > 13. \end{cases}$$

Ejemplo 3.5. $|135 - 10|_5 = |125|_5 = |5^3|_5 = 5^{-3}$

$$|35 - 10|_5 = |25|_5 = |5^2|_5 = 5^{-2},$$

notemos que, para $p = 5$ la distancia entre 135 y 10 es más pequeña que la distancia entre 35 y 10.

A continuación, introducimos una métrica para el espacio \mathbb{Q}_p

Definición 3.5. [11] Sea \mathbb{K} un campo y $|\cdot|$ un valor absoluto sobre \mathbb{K} , se define la **distancia** $d(x, y)$ entre dos elementos $x, y \in \mathbb{K}$ como

$$d(x, y) = |x - y|.$$

La función $d(x, y)$ es llamada la **métrica inducida por el valor absoluto**.

Definición 3.6. [11] Un espacio métrico (X, d) en el que se cumple la siguiente propiedad para todo $x, y, z \in X$ es un espacio ultramétrico

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \quad (\text{Desigualdad ultramétrica}) \quad (3.1)$$

Con la métrica inducida por el valor absoluto usual el campo \mathbb{Q} no es un espacio métrico completo, la completación de \mathbb{Q} con respecto a este métrica da como resultado el campo de los números reales, \mathbb{R} ; por otro lado, \mathbb{Q} con la métrica inducida por un valor absoluto p -ádico, $|\cdot|_p$, no un espacio métrico completo, su completación da como resultado el campo de los números p -ádicos, \mathbb{Q}_p . De hecho, estas son las únicas completaciones no triviales de \mathbb{Q} vía un valor absoluto, como lo establece el siguiente teorema:

Teorema 3.6. [13](Ostrowski) Cada valor absoluto no trivial sobre \mathbb{Q} es equivalente a uno de los valores absolutos $|\cdot|_p$, donde p es un número primo o $p = \infty$, recordando que $|\cdot|_\infty$ es el valor absoluto usual.

Teorema 3.7. [11](Caracterización de sucesiones de Cauchy).

Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{Q} es de Cauchy, si, sólo si:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\|_p = 0. \quad (3.2)$$

Demostración. (\implies) Definición de sucesión de Cauchy.

(\impliedby) Supongamos (3.2), entonces para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $n > N$ implica:

$$\|x_{n+1} - x_n\|_p < \epsilon.$$

Ahora, sea $m > n > N$, entonces:

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|_p &= \|x_m - x_{m+1} + x_{m+1} - x_{m+2} + \dots - x_n\|_p \\ &\leq \max\{\|x_m - x_{m+1}\|_p, \dots, \|x_{n+1} - x_n\|_p\} < \epsilon. \end{aligned}$$

□

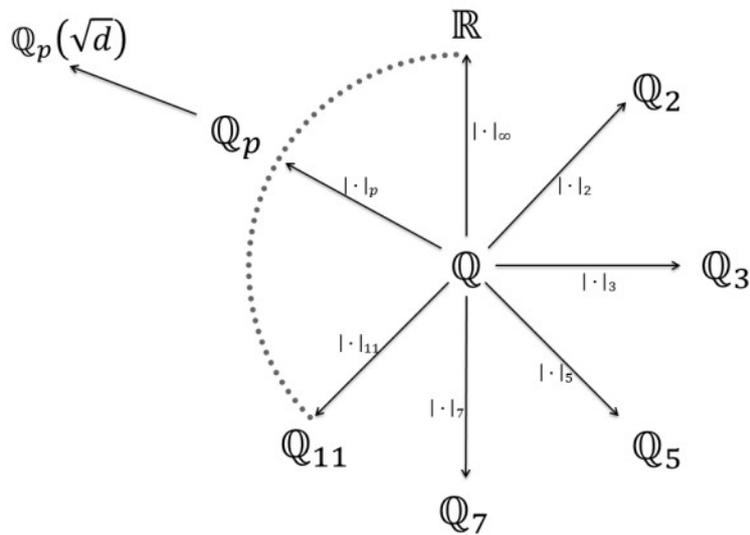


FIGURA 3.1: Completaciones respecto a las distintas normas en \mathbb{Q} [11]

Observación 3.2. [13]Entonces para cada número primo p , se construye el campo de los números p -ádicos, \mathbb{Q}_p , a manera de resumen se presentan los siguientes hechos:

1. Hay un valor absoluto no arquimediano, $|\cdot|_p$, sobre \mathbb{Q}_p y \mathbb{Q}_p es completo respecto a este valor absoluto.
2. Existe una inclusión $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ cuya imagen es densa en \mathbb{Q}_p y la restricción del valor absoluto $|\cdot|_p$ a la imagen de \mathbb{Q} coincide con el valor absoluto p -ádico definido en \mathbb{Q} .
3. El conjunto de valores de \mathbb{Q} y \mathbb{Q}_p bajo $|\cdot|_p$ es el mismo, específicamente,

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^+ : x = |\lambda|_p, \lambda \in \mathbb{Q}\} &= \{x \in \mathbb{R}^+ : x = |\lambda|_p, \lambda \in \mathbb{Q}_p\} \\ &= \{p^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

4. Como consecuencia del inciso anterior se tiene que para cada $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, existe un entero $v_p(x)$ tal que $|x|_p = p^{-v_p(x)}$.
5. Cada $x \in \mathbb{Q}_p$ puede ser escrito en la forma

$$x = b_{-n_0}p^{-n_0} + b_{-n_0+1}p^{-n_0+1} + \cdots + b_0 + b_1p + \cdots + b_np^n + \cdots = \sum_{n \geq -n_0} b_np^n$$

con $0 \leq b_n \leq p-1$ y $b_{-n_0} \neq 0$. Esta representación es única y además $v_p(x) = -n_0$.

Definición 3.7. [13] La *parte fraccionaria* de un número $x \in \mathbb{Q}_p$, denotada como $\{x\}_p$, es el siguiente número racional:

$$\{x\}_p = \begin{cases} p^v \sum_{i=0}^{|v|-1} b_ip^i & \text{si } v(x) < 0, \\ 0 & \text{si } v(x) \geq 0. \end{cases}$$

Así, para todo $x \in \mathbb{Q}_p$

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=v}^{-1} b_ip^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_ip^i \\ x &=: \{x\}_p + [x]_p \end{aligned}$$

Definición 3.8. [13] El anillo de enteros p -ádicos es el conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}.$$

Observación 3.3. El anillo de enteros p -ádicos \mathbb{Z}_p es compacto.

Un espacio p -ádico se puede representar naturalmente como un árbol que se ramifica en el siguiente nivel de modo que es más pequeño que el anterior por un factor $1/p$.

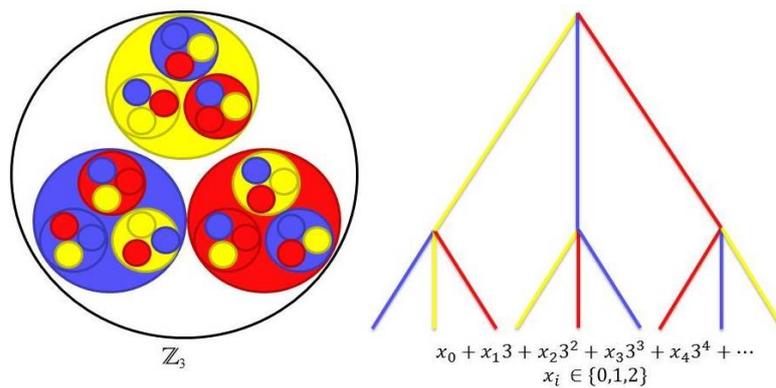


FIGURA 3.2: Árbol 3-ádico[13]

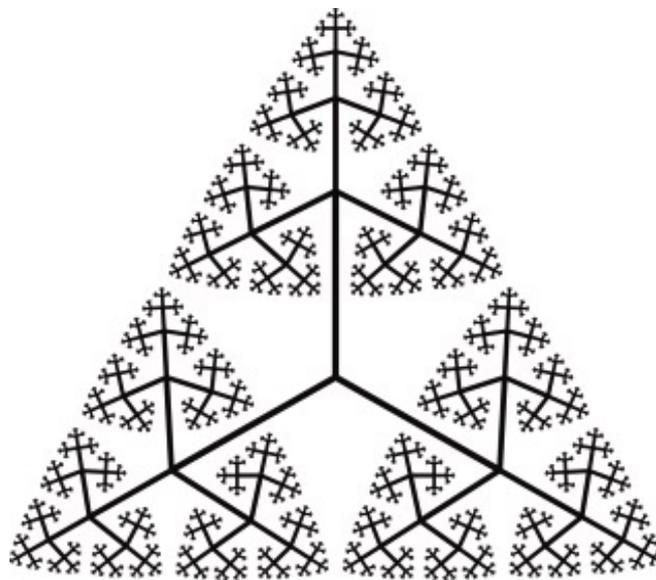


FIGURA 3.3: Árbol 3-ádico finito[13]

Topología en \mathbb{Q}_p .

Para hablar de la topología que envuelve el campo de los números p -ádicos, definimos la distancia entre dos números cuales quiera a través de la noción de valor absoluto p -ádico. Teniendo una métrica, podemos definir conjuntos abiertos, cerrados y con esto la topología en \mathbb{Q}_p .

Definición 3.9. Se define la *bola con centro en a y radio p^r* al conjunto

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^r\}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Observación 3.4. Debido a las propiedades de la ultramétrica es irrelevante hacer distinción entre la bola abierta y la bola cerrada, en este caso tenemos

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < p^r\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^{r-1}\} = \overline{B}_{r-1}(a).$$

Definición 3.10. La *esfera con centro en a y radio p^r* es el conjunto

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p = p^r\}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Observación 3.5. [13] La bola $B_r(0)$ se denotará por B_r y la esfera $S_r(0)$ se denotará por S_r .

Las principales propiedades topológicas del campo \mathbb{Q}_p se resumen en la siguiente lista:

1. El campo \mathbb{Q}_p es un espacio de Hausdorff, totalmente desconexo y localmente compacto.
2. $B_r(a)$ es un conjunto abierto y cerrado.
3. Si $b \in B_r(a)$ entonces $B_r(a) = B_r(b)$.
4. Si $a, b \in \mathbb{Q}_p$ entonces $B_r(a) \cap B_s(b) \neq \emptyset$ si y sólo si $B_r(a) \subset B_s(b)$ ó $B_s(b) \subset B_r(a)$.
5. Las esferas son conjuntos abiertos y cerrados.

6. Las esferas y las bolas son conjuntos compactos.

Definición 3.11. La norma p -ádica sobre \mathbb{Q} para un número primo p es la siguiente

$$\|x\|_p = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ p^{-v_p(x)} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

La normas p -ádicas pueden extenderse al espacio n dimensional \mathbb{Q}_p^n tomando

$$\|x\|_p := \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_p, \quad \text{para } x = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Así, \mathbb{Q}_p^n con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|_p$ es un espacio métrico cuyas distancias pertenecen al conjunto discreto $\{p^\gamma\} \cup \{0\}$, con $\gamma \in \mathbb{Z}$; entonces, los abiertos básicos están definidos por:

$$B_\gamma^n(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p^n : \|x - a\|_p < p^\gamma\}, \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Lema 4. Sean $x, y \in \mathbb{Q}_p$ tales que $\|x\|_p \neq \|y\|_p$. Entonces

$$\|x + y\|_p \leq \max\{\|x\|_p, \|y\|_p\}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sea $\|x\|_p < \|y\|_p$, luego

$$\|x + y\|_p \leq \|y\|_p.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|y\|_p &= \|y + x - y\|_p \\ &\leq \max\{\|x + y\|_p, \|x\|_p\}, \text{ como } \|x\|_p \leq \|y\|_p \\ &\leq \|x + y\|_p. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|x + y\|_p = \|y\|_p.$$

□

Un resultado simple, pero sorprendente, es el siguiente:

Corolario 3.1. [11] *Todos los triángulos en \mathbb{Q}_p son isósceles.*

Demostración. Sean $x, y, z \in \mathbb{Q}_p$ distintos, luego:

$$\begin{aligned}\|x - y\|_p &= \|x - y + z - z\|_p = \|(x - z) + (z - y)\|_p \\ &= \max\{\|x - z\|_p, \|z - y\|_p\}, \text{ por (4)}.\end{aligned}$$

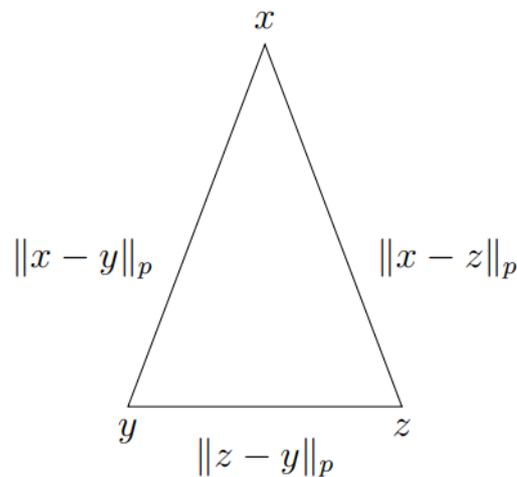


FIGURA 3.4: Todos los triángulos en \mathbb{Q}_p son isósceles[11]

□

3.1.2. Integración en \mathbb{Q}_p

Un grupo localmente compacto es un grupo topológico localmente compacto como espacio topológico.

Sea G un grupo localmente compacto. Denotemos por R y L la acción derecha e izquierda del grupo G sobre sí mismo:

$$R_t(x) = xt^{-1}, \quad L_t(x) = tx \quad t, x \in G$$

Puesto que \mathbb{Q}_p es un grupo conmutativo localmente compacto con respecto a adición, en \mathbb{Q}_p existe la medida aditiva de Haar(3.8), que es una medida positiva positiva dx invariante bajo desplazamientos, $d(x+a) = dx$, $a \in \mathbb{Q}_p$. Si la medida dx se normaliza por la igualdad

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$$

entonces dx es única.

Teorema 3.8. [11] *En todo grupo topológico compacto G , existe una única medida de probabilidad de Borel m , regular, la cual es invariante bajo traslaciones izquierdas (derechas), en el sentido que:*

1. $\int_G f dm = \int_G (L_t f) dm$ $t \in G$, $f \in C(G)$,
2. $\int_G f dm = \int_G (R_t f) dm$ $t \in G$, $f \in C(G)$, y satisface que,
3. $\int_G f(x) dm(x) = \int_G f(x^{-1}) dm(x)$, $f \in C(G)$.

Esta es llamada **la medida de Haar**.

La medida invariante bajo desplazamientos dx en el campo \mathbb{Q}_p se extiende a una medida invariante bajo desplazamientos $d^n x = \{d^1 x, \dots, d^n x\} \in \mathbb{Q}_p^n$ de forma estandar, tenemos

$$d^n(x+a) = d^n x, \quad a \in \mathbb{Q}_p^n, \quad d^n(Ax) = |\det A|_p d^n x,$$

donde $A : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p^n$ es un isomorfismo lineal tal que $\det A \neq 0$.

Definición 3.12. *Sea A un subconjunto medible en \mathbb{Q}_p^n . Denotamos por $L^\rho(A)$ el conjunto de todas las funciones medibles $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{Q}_p^n$, tales que*

$$\int_A |f(x)|^\rho d^n x < \infty \quad (1 \leq \rho).$$

Para $f \in L^\rho(A)$ la norma se define

$$\|f\|_\rho = \left(\int_A |f(x)|^\rho d^n x \right)^{1/\rho}.$$

Definición 3.13. [13] Una función $\varphi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es **localmente integrable**, $\varphi \in L_{loc}^1$ si

$$\int_K \varphi(x) dx$$

existe para cada compacto K .

Definición 3.14. [13](Integral impropia)

Una función $\varphi \in L_{loc}^1$ se dice que es **integrable en \mathbb{Q}_p** si

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{B_N} \varphi(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=-\infty}^N \int_{S_j} \varphi(x) dx$$

Si el límite existe, se denota por $\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x) dx$ y se dice que la **integral impropia** existe.

Observación 3.6. Se tiene que

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x) dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{S_j} \varphi(x) dx.$$

Como las propiedades de ser completo, totalmente desconexo y localmente compacto se conservan en la topología producto se obtiene que \mathbb{Q}_p^n es un espacio métrico completo, totalmente desconexo y localmente compacto. La bola y la esfera se definen de manera similar al caso unidimensional.

Definición 3.15. La esfera con centro en a y radio p^r es el conjunto

$$S_r^n(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p^n : \|x - a\|_p = p^r\}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

La bola y la esfera son conjuntos cerrados y abiertos en \mathbb{Q}_p^n , además, si $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, entonces

$$B_r^n(a) = B_r(a_1) \times B_r(a_2) \times \dots \times B_r(a_n).$$

A continuación, definimos los caracteres aditivos para \mathbb{Q}_p , los cuales nos ayudaran hacer la construcción de los espacios de Bruhat-Schwartz, en los que definiremos un producto interior.

3.2. Funciones localmente constantes

La teoría de las distribuciones p -ádicas (funciones generalizadas) desempeña un papel importante en la resolución de problemas matemáticos del análisis p -ádico y sus aplicaciones. Se pueden encontrar resultados fundamentales en la teoría p -ádica de distribuciones en [13].

Definición 3.16. Una función de valor complejo ψ definida en un conjunto abierto $O \in \mathbb{Q}_p^n$ se denomina localmente constante en O si para cualquier $x \in O$ existe un entero $l(x) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\psi(x + y) = \psi(x), \quad y \in B_{l(x)}^n, \quad x \in O. \quad (3.3)$$

Ejemplos típicos de funciones localmente constantes son los caracteres aditivos (3.5) y también la función característica de la bola $B_{l(x)}^n$.

$$\Delta_l(x - a) = \Omega(p^{-1}|x - a|_p), \quad a \in \mathbb{Q}_p^n, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n. \quad (3.4)$$

donde

$$\Omega(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Es una función característica del intervalo $[0,1]$.

3.2.1. Espacio de Bruhat-Schwartz

El conjunto de todas las funciones localmente constantes con soporte compacto sobre \mathbb{Q}_p^n forma un \mathbb{C} -espacio vectorial denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, este espacio vectorial se conoce como **espacio de Bruhat-Schwartz** de \mathbb{Q}_p y un elemento $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ se conoce como **función de Bruhat-Schwartz** (o simplemente **función de prueba**) sobre \mathbb{Q}_p^n .

Se denota por \mathcal{D}_k^l el espacio vectorial de dimensión finita que consiste de las funciones cuyo parámetro de constancia es mayor o igual a l y cuyo soporte está contenido en B_k .

Para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{Q}_p^n$, sea $\mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ el subespacio de funciones de prueba cuyo soporte está contenido en K . El espacio $\mathcal{D}(K)$ es denso en $C(K)$, el espacio de funciones continuas con valores complejos.

3.2.2. Carácteres aditivos en \mathbb{Q}_p

Definición 3.17. *Un carácter aditivo del campo \mathbb{Q}_p es una función continua $\chi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface*

$$\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y), \quad |\chi(x)| = 1 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{Q}_p. \quad (3.5)$$

De forma similar definimos un carácter aditivo del grupo abeliano B_γ . Todo carácter aditivo del campo \mathbb{Q}_p es un carácter de cualquier grupo B_γ .

Si $\chi(x)$ es un carácter aditivo arbitrario, la fórmula (3.5) implica las siguientes relaciones

$$\chi(0) = 1, \quad (3.6)$$

$$\chi(-x) = \overline{\chi(x)} = \chi^{-1}(x), \quad (3.7)$$

$$\chi(nx) = (\chi(x))^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Notemos que para cada $\xi \in \mathbb{Q}_p$ fija, la función

$$\chi(x) = \chi_p(x\xi) = e^{2\pi i\{\xi\}_p} \quad (3.9)$$

es un carácter aditivo del campo \mathbb{Q}_p y del grupo abeliano B_γ , donde $\{\xi\}_p$ es la parte fraccionaria de $x \in \mathbb{Q}_p$ definida por la fórmula (3.7). Si $\chi(x)$ es un carácter aditivo arbitrario la función $\chi_p(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p)$ define un carácter aditivo canónico de \mathbb{Q}_p que es trivial en \mathbb{Z}_p y no trivial fuera de \mathbb{Z}_p . De hecho, todos los caracteres de \mathbb{Q}_p son de la forma $\chi_p\xi(x) = \chi(\xi x)$ con $\xi \in \mathbb{Q}_p$.

3.2.3. Transformada de Fourier en \mathbb{Q}_p^n

Definición 3.18. La transformada de Fourier de una función de prueba $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ es dada por la fórmula

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(x) \chi_p(\xi \cdot x) dx, \quad (\xi \in \mathbb{Q}_p^n).$$

donde $\chi_p(\xi \cdot x) = \{\chi_p(\xi_1 \cdot x_1), \dots, \chi_p(\xi_n \cdot x_n)\}$, $\xi \cdot x$ es el producto escalar de vectores y la función $\chi_p(\xi \cdot x) = e^{2\pi i \sum_{j=1}^n \xi_j x_j}$ para cada $\xi \in \mathbb{Q}_p^n$ fijo.

La transformada de Fourier es un **isomorfismo lineal y continuo** del espacio $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ sobre sí mismo que, también se satisface la fórmula de inversión:

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \widehat{\varphi}(\xi) \chi_p(-x\xi) d\xi, \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)).$$

Además, se cumple la igualdad de Parseval-Steklov:

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\xi, \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)).$$

3.2.4. Operadores pseudodiferenciales en \mathbb{Q}_p^n

Definición 3.19. Sea $a : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. El operador pseudodiferencial $A : \text{Dom}(A) \subset L^2(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow L^2(\mathbb{Q}_p^n)$ definido por la fórmula

$$A\varphi(x) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} [a(\xi) \mathcal{F}[\varphi]],$$

para cualquier φ en el dominio

$$\text{Dom}(A) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{Q}_p^n) : a(\xi) \widehat{f} \in L^2(\mathbb{Q}_p^n) \right\},$$

se llama un **operador pseudodiferencial con símbolo** $a(\xi)$.

3.3. Una base de Wavelet para los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$

3.3.1. Los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$

Denotamos el conjunto de los enteros no negativos por \mathbb{N} , y sea $[\zeta]_p := \max(1, \|\zeta\|_p)$ para $\zeta \in \mathbb{Q}_p^n$. Definimos para $\varphi, \theta \in \mathbb{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, y $l \in \mathbb{N}$, el siguiente producto escalar:

$$\langle \varphi, \theta \rangle_l = \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\zeta]_p^{2l} \widehat{\varphi}(\zeta) \overline{\widehat{\theta}(\zeta)} d^n \zeta. \quad (3.10)$$

Además, se tiene que $\|\varphi\|_l^2 := \langle \varphi, \varphi \rangle_l$, adicionalmente se cumple que $\|\cdot\|_l \leq \|\cdot\|_m$ para $l \leq m$.

Denotamos por $\mathcal{H}_l(\mathbb{C}) := \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n, \mathbb{C})$ el espacio Hilbert complejo, obtenido al completar $\mathbb{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$.

Observación 3.7. *Los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$, para cualquier $l \in \mathbb{N}$, son espacios Nucleares y en consecuencia son espacios separables. Los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n, \mathbb{C})$ fueron introducidos en [16] y [4].*

3.3.2. Bases de Wavelet para los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$

En esta sección introducimos una base ortonormal para los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$, donde l es un entero no negativo.

Consideremos el siguiente conjunto de funciones

$$\psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}(x) = \frac{p^{-\frac{n\gamma}{2}} \chi(p^{-1}\zeta \cdot (p^\gamma x - \eta)) \Omega(\|p^\gamma x - \eta\|_p)}{[\max(1, p^{1-\gamma})]^l}, \text{ con } x \in \mathbb{Q}_p^n, \gamma \in \mathbb{Z}, \quad (3.11)$$

$$\eta \in \mathbb{Q}_p^n / \mathbb{Z}_p^n, \eta = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(n)}), \eta^{(l)} = \sum_{i=\beta_l}^{-1} \eta_{(i)}^l p^i, \beta_l \in \mathbb{Z}^-,$$

$$\eta_i, \zeta_l \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n),$$

donde al menos uno de los ζ_l no es igual a cero.

Observación 3.8. *En el caso que $l = 0$, el conjunto de funciones $\psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(0)}$ coincide con la base n -dimensional de wavelets p -ádica de \mathbb{Q}_p^n , introducida por Albeverio y Kozyrev en [1].*

Proposición 3.9. [3] La transformada de Fourier de $\psi_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)}$ está dada por

$$\widehat{\psi}_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)}(\xi) = \frac{p^{\frac{n\gamma}{2}}}{[\max(1, p^{1-\gamma})]^l} \chi(p^{-\gamma}\xi \cdot \eta) \Omega(\|p^{-\gamma}\xi + p^{-1}\zeta\|_p). \quad (3.12)$$

Demostración. Es suficiente calcular la transformada de Fourier de funciones del tipo $\varphi_\zeta(x) = \chi(p^{-1}\zeta \cdot x) \Omega(\|x\|_p)$. Para el calculo de la fórmula (3.12), aplicamos los resultados presentados en [13],Capitulo VII, Teorema 2.17 aplicados a las funciones anteriores. \square

Observación 3.9. Sean $l, k \in \mathbb{Z}$ con $l \leq k$. Recordamos que el producto de funciones indicadoras es nuevamente una función indicadora o cero, ver por ejemplo [2] o [13]:

$$\Omega(\|p^l x - a\|_p) \Omega(\|p^k x - b\|_p) = \Omega(\|p^l x - a\|_p) \Omega(\|p^{k-l} a - b\|_p), \quad (3.13)$$

con $x, a, b \in \mathbb{Q}_p^n$.

Lema 5. [3]

1. El soporte de las funciones $\widehat{\psi}_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)}$ viene dado por

$$\text{supp} \left(\widehat{\psi}_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)} \right) = -p^{\gamma-1}\zeta + p^\gamma \mathbb{Z}_p^n = B_{-p^{\gamma-1}\zeta}^n.$$

2. El producto $\widehat{\psi}_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)}(\xi) \overline{\widehat{\psi}_{\gamma^+, \eta^+, \zeta^+}^{(l)}(\xi)}$ no es cero si $\gamma = \gamma^+$ y $\zeta = \zeta^+$.

Demostración. (1) Se sigue de la observación:

$$\begin{aligned} \xi \in \text{supp}(\widehat{\psi}_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)}) &\Leftrightarrow \|p^{-\gamma}\xi + p^{-1}\zeta\|_p \leq 1 \Leftrightarrow \text{existe } w \in \mathbb{Z}_p^n, \text{ y} \\ &p^{-\gamma}\xi + p^{-1}\zeta = w \Leftrightarrow \xi \in -p^{\gamma-1}\zeta + p^\gamma \mathbb{Z}_p^n. \end{aligned}$$

(2) Consideremos $\xi \in \text{supp} \left(\widehat{\psi}_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \right) \cap \text{supp} \left(\widehat{\psi}_{\gamma^\dagger, \eta^\dagger, \zeta^\dagger}^{(l)} \right)$, entonces $\xi \in \text{supp} \left(\widehat{\psi}_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \right)$ y $\xi = -p^{\gamma-1}\zeta + p^\gamma w$ para algún $w \in \mathbb{Z}_p^n$. Usando la fórmula (3.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}(\xi) \overline{\widehat{\psi}_{\gamma^\dagger, \eta^\dagger, \zeta^\dagger}^{(l)}(\xi)} &= \\ &= \frac{p^{\frac{N(\gamma+\gamma^\dagger)}{2}}}{[\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^l [\text{máx}(1, p^{1-\gamma^\dagger})]^l} \chi(-p^{-1}\zeta \cdot \eta) \chi(w \cdot \eta) \chi(-p^{\gamma-\gamma^\dagger-1}\zeta \cdot \eta^\dagger) \times \\ &\quad \chi(p^{\gamma-\gamma^\dagger} w \cdot \eta^\dagger) \Omega(\|w\|_p) \Omega(\|p^{\gamma-\gamma^\dagger} w + p^{-1}\zeta^\dagger - p^{\gamma-\gamma^\dagger-1}\zeta\|_p). \end{aligned}$$

Como $\|p^{\gamma-\gamma^\dagger} w\|_p \leq p^{\gamma^\dagger-\gamma}$, $\|p^{-1}\zeta^\dagger\|_p = p$, $\|p^{\gamma-\gamma^\dagger-1}\zeta\|_p = p^{\gamma^\dagger-\gamma+1}$, si consideramos $\gamma \neq \gamma^\dagger$ se tiene que $\Omega(\|p^{\gamma-\gamma^\dagger} w + p^{-1}\zeta^\dagger - p^{\gamma-\gamma^\dagger-1}\zeta\|_p) = 0$.

Si $\gamma = \gamma^\dagger$ y $\zeta \neq \zeta^\dagger$, por lo anterior $\Omega(\|w + p^{-1}\zeta^\dagger - p^{-1}\zeta\|_p) = 0$.

Si ξ pertenece a $\text{supp} \left(\widehat{\psi}_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \right)$, $\gamma = \gamma^\dagger$ y $\zeta = \zeta^\dagger$, el producto $\widehat{\psi}_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}(\xi) \overline{\widehat{\psi}_{\gamma^\dagger, \eta^\dagger, \zeta^\dagger}^{(l)}(\xi)}$ no es cero. Un resultado similar se obtiene cuando consideramos $\xi \in \text{supp} \left(\widehat{\psi}_{\gamma^\dagger, \eta^\dagger, \zeta^\dagger}^{(l)} \right)$. \square

El siguiente resultado muestra que las funciones $\psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}$ son una base para los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$.

Teorema 3.10. [3] *El conjunto de funciones*

$$\psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}(x) = \frac{p^{\frac{-n\gamma}{2}}}{[\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^l} \chi(p^{-1}\zeta \cdot (p^\gamma x - \eta)) \Omega(\|p^\gamma x - \eta\|_p), \quad (3.14)$$

con γ, ζ, η como antes, es una base ortonormal para el espacio $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$.

Demostración. Primero mostramos que el conjunto de funciones (3.14) son ortonormales, con respecto al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$ dado anteriormente:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}, \psi_{\gamma^\dagger, \eta^\dagger, \zeta^\dagger}^{(l)} \rangle_l &= \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\zeta]_p^{2l} \widehat{\psi}_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}(\xi) \overline{\widehat{\psi}_{\gamma^\dagger, \eta^\dagger, \zeta^\dagger}^{(l)}(\xi)} d^n \xi \\ &= \frac{p^{\frac{n(\gamma+\gamma^\dagger)}{2}}}{[\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^l [\text{máx}(1, p^{1-\gamma^\dagger})]^l} \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\zeta]_p^{2l} \chi(p^{-\gamma}\zeta \cdot \eta) \chi(-p^{-\gamma^\dagger}\zeta \cdot \eta^\dagger) \\ &\quad \times \Omega(\|p^{-\gamma}\zeta + p^{-1}\zeta\|_p) \Omega(\|p^{-\gamma^\dagger}\zeta + p^{-1}\zeta^\dagger\|_p) d^n \xi. \end{aligned}$$

Por la parte 2 del (Lema 5), el producto escalar es distinto de cero sólo cuando $\gamma = \gamma^\dagger$ y $\zeta = \zeta^\dagger$.

Por lo tanto la integral anterior se convierte en

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\gamma, \eta, \zeta}, \psi_{\gamma^\dagger, \eta^\dagger, \zeta^\dagger} \rangle_l &= \delta_{\gamma, \gamma^\dagger} \delta_{\zeta, \zeta^\dagger} \frac{p^{n\gamma}}{[\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^{2l}} \\ &\times \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\xi]_p^{2l} \chi(p^{-\gamma} \xi \cdot (\eta - \eta^\dagger)) \Omega(\|p^{-\gamma} \xi + p^{-1} \zeta\|_p) d^n \xi. \end{aligned}$$

Supongamos que $\xi \in \text{supp} \left(\widehat{\psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}} \right)$. Entonces $\xi \in -p^{\gamma-1} \zeta + p^\gamma \mathbb{Z}_p^n$ y $\|\xi\|_p = p^{1-\gamma}$.

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\gamma, \eta, \zeta}, \psi_{\gamma^\dagger, \eta^\dagger, \zeta^\dagger} \rangle_l &= \delta_{\gamma, \gamma^\dagger} \delta_{\zeta, \zeta^\dagger} \frac{p^{n\gamma}}{[\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^{2l}} [\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^{2l} \\ &\times \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi(p^{-\gamma} \xi \cdot (\eta - \eta^\dagger)) \Omega(\|p^{-\gamma} \xi + p^{-1} \zeta\|_p) d^n \xi. \end{aligned}$$

Haciendo el siguiente cambio de variables en la integral anterior $z = p^{-\gamma} \xi + p^{-1} \zeta$, $d^n \xi = p^{-n\gamma} d^n z$, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\langle \psi_{\gamma, \eta, \zeta}, \psi_{\gamma^\dagger, \eta^\dagger, \zeta^\dagger} \rangle_l \\ &= \delta_{\gamma, \gamma^\dagger} \delta_{\zeta, \zeta^\dagger} p^{n\gamma} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi(p^{-\gamma} (\eta - \eta^\dagger) \cdot (z - p^{-1} \zeta) p^\gamma) \Omega(\|z\|_p) p^{-n\gamma} d^n z \\ &= \delta_{\gamma, \gamma^\dagger} \delta_{\zeta, \zeta^\dagger} \chi(-p^{-1} (\eta - \eta^\dagger) \cdot \zeta) \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi[(\eta - \eta^\dagger) \cdot z] \Omega(\|z\|_p) d^n z \\ &= \delta_{\gamma, \gamma^\dagger} \delta_{\zeta, \zeta^\dagger} \chi(-p^{-1} (\eta - \eta^\dagger) \cdot \zeta) \Omega(\|\eta - \eta^\dagger\|_p). \quad (3.15) \end{aligned}$$

Si $\eta \neq \eta^\dagger$, entonces $\|\eta - \eta^\dagger\|_p \geq p > 1$ y la integral anterior es cero. Consecuentemente se tiene que

$$\langle \psi_{\gamma, \eta, \zeta}, \psi_{\gamma^\dagger, \eta^\dagger, \zeta^\dagger} \rangle_l = \delta_{\gamma, \gamma^\dagger} \delta_{\zeta, \zeta^\dagger} \delta_{\eta, \eta^\dagger}.$$

En conclusión, el conjunto de funciones (3.14) son ortonormales.

Para probar la completitud del conjunto de funciones (3.14), usamos el hecho que el espacio $\text{ID}_{\mathbb{C}}(\mathbb{Q}_p^n)$ es denso en $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$ y que el conjunto de funciones $\psi_{\gamma, \zeta, n}^{(l)}$ son invariantes bajo traslaciones y dilataciones, por lo tanto, es suficiente verificar la identidad de Parseval para funciones características $\Omega(\|x\|_p)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \Omega(\|x\|_p), \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_l &= \frac{1}{[\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^l} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\xi]_p^{2l} \widehat{\Omega}(\|\xi\|_p) \overline{\psi}_{\gamma, \eta, \zeta}(\xi) d^n \xi \\ &= \frac{1}{[\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^{2l}} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\xi]_p^{2l} \Omega(\|\xi\|_p) p^{\frac{n\gamma}{2}} \chi(p^{-\gamma} \xi \cdot \eta) \Omega(\|p^{-\gamma} \xi + p^{-1} \zeta\|_p) d\xi. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Iniciamos suponiendo que $0 \leq -\gamma$, luego usando la ecuación (3.13), obtenemos que el producto de las funciones indicadoras es cero:

$$\Omega(\|\xi\|_p) \Omega(\|p^{-\gamma} \xi + p^{-1} \zeta\|_p) = \Omega(\|\xi\|_p) \Omega(\|p^{-1} \zeta\|_p).$$

Ahora bien, tomando $-\gamma < 0$, nuevamente usamos la ecuación (3.13), tenemos que el producto de las funciones indicadoras es distinto de cero:

$$\Omega(\|p^{-\gamma} \xi + p^{-1} \zeta\|_p) \Omega(\|\xi\|_p) = \Omega(\|p^{-\gamma} \xi + p^{-1} \zeta\|_p) \Omega(\| - p^{\gamma-1} \zeta\|_p), \text{ si } \gamma \geq 1.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \Omega(\|x\|_p), \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_l &= \frac{p^{\frac{n\gamma}{2}}}{[\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^{2l}} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\xi]_p^{2l} \chi(p^{-\gamma} \xi \cdot \eta) \Omega(\|\xi\|_p) \\ &\quad \times \Omega(\|p^{-\gamma} \xi + p^{-1} \zeta\|_p) d^n \xi \\ &= \frac{p^{\frac{n\gamma}{2}} [\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^{2l}}{[\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^{2l}} \Omega(\| - p^{\gamma-1} \zeta\|_p) \int_{\mathbb{Q}_p^n} \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\xi]_p^{2l} \chi(p^{-\gamma} \xi \cdot \eta) \\ &\quad \times \Omega(\|p^{-\gamma} \xi + p^{-1} \zeta\|_p) d^n \xi \\ &= p^{\frac{n\gamma}{2}} \Omega(\| - p^{\gamma-1} \zeta\|_p) \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi[p^{-\gamma}(p^\gamma(z - p^{-1} \zeta)) \cdot \eta] \Omega(\|z\|_p) p^{-n\gamma} d^n z \\ &= p^{-\frac{n\gamma}{2}} \Omega(\| - p^{\gamma-1} \zeta\|_p) \chi(-p^{-1} \zeta \cdot \eta) \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi(z \cdot \eta) \Omega(\|z\|_p) d^n z \\ &= p^{-\frac{n\gamma}{2}} \chi(-p^{-1} \zeta \cdot \eta) \Omega(\|\eta\|_p), \text{ para } \gamma \geq 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si $\eta \neq 0$, el producto anterior es cero. Por lo tanto si $\eta = 0$, y $\gamma \geq 1$ tenemos que

$$\langle \Omega(\|x\|_p), \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_l = p^{-\frac{n\gamma}{2}}.$$

Recordamos que el número de vectores ζ es igual a $|\zeta| = p^n - 1$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Q}_p^n / \mathbb{Z}_p^n, |\zeta|=1}^{p^n-1} |\langle \Omega(\|x\|_p), \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_{l, x}|^2 &= \sum_{\gamma=1}^{\infty} \sum_{|\zeta|=1}^{p^n-1} (p^{-\frac{n\gamma}{2}})^2 \\ &= \sum_{\gamma=1}^{\infty} (p^n - 1) p^{-n\gamma} = 1 = \|\Omega(\|x\|_p)\|_l^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

□

Introducimos la definición de operador pseudodiferencial para los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{C})$, como la imagen de una función que va del espacio de Bruhat-Schwartz a $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

Definición 3.20. Sea $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ una función fija. Definimos el operador pseudodiferencial A con símbolo $a(\|\xi\|)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\mathbb{Q}_p^n) &\rightarrow L^2(\mathbb{Q}_p) \\ \varphi &\rightarrow (A\varphi)(x), \end{aligned}$$

donde

$$(A\varphi)(x) = \mathcal{F}\{a(\|\xi\|_p)\mathcal{F}\varphi\} \quad (3.19)$$

Teorema 3.11. [3] El conjunto de funciones

$$\psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}(x) = \frac{p^{-\frac{n\gamma}{2}}}{[\max(1, p^{1-\gamma})]^l} \chi(p^{-1}\zeta \cdot (p^\gamma x - \eta)) \Omega(\|p^\gamma x - \eta\|_p), \quad (3.20)$$

con γ, ζ, η , valores propios del operador pseudodiferencial A_l dado en la definición (3.20). Los correspondientes valores propios son $\lambda = a(p^{1-\gamma})$.

Observación 3.10. Recordamos que la función $[\max\{1, \|\xi\|_p\}]^{-\frac{1}{2}}$, $\xi \in \mathbb{Q}_p^n$, se denomina símbolo del operador A_l . Adicionalmente se tiene por la prueba del teorema anterior que A_l es un operador acotado en $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$.

3.4. Marcos p -ádicos

En la sección anterior se demostró que las funciones $\psi_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)}$ forman una base para los espacios de Hilbert separables $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$. A continuación, mostramos un ejemplo de un marco que no es una base, adicionalmente construimos un operador pseudo-diferencial el cual deja invariante los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, permitiendo introducir K -marcos p -ádicos en estos espacios siguiendo [10].

Ejemplo 3.12. Consideremos

$$\left\{ \psi_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)} \right\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}} \cup \left\{ \psi_{1,\eta,\zeta}^{(l)}, \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{2,\eta,\zeta}^{(l)}, \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{2,\eta,\zeta}^{(l)}, \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{3,\eta,\zeta}^{(l)}, \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{3,\eta,\zeta}^{(l)}, \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{3,\eta,\zeta}^{(l)} \cdots \right\},$$

para $\gamma > 0$, consideramos $\{\psi_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)}\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^+}$, es la sucesión donde cada término $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \psi_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)}$ es repetido γ -veces y los parámetros η, ζ como antes. Entonces para cada $f \in \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}} |\langle f, \psi_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)} \rangle|^2 + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^+} \gamma \left| \langle f, \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \psi_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)} \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)} \rangle|^2 = \|f\|_l^2. \end{aligned}$$

$$\text{Así } \left\{ \psi_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)} \right\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}} \cup \left\{ \psi_{1,\eta,\zeta}^{(l)}, \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{2,\eta,\zeta}^{(l)}, \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{2,\eta,\zeta}^{(l)}, \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{3,\eta,\zeta}^{(l)}, \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{3,\eta,\zeta}^{(l)}, \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{3,\eta,\zeta}^{(l)} \cdots \right\}$$

es un marco ajustado para $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$ con cota de marco $A = 1$.

A continuación, definimos el operador pseudodiferencial para los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, demostraremos que ese operador es acotado.

Definición 3.21. Para $f \in \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$ definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_l(f)(z) &= \mathcal{F}_{\xi \rightarrow z}^{-1} \left([\max\{1, \|\xi\|_p\}]^{-\frac{l}{2}} \widehat{f}(\xi) \right) \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(-z \cdot \xi) [\max\{1, \|\xi\|_p\}]^{-\frac{l}{2}} \widehat{f}(\xi) d^n \xi, \text{ para } f \in \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n). \end{aligned}$$

Teorema 3.13. *El operador $\mathcal{A}_l : \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$ es un operador pseudodiferencial bien definido.*

Demostración. En efecto, para $f \in \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_l(f)(z)\|_l^2 &= \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\text{máx}\{1, \|\xi\|_p\}]^{2l} |\mathcal{F}[\mathcal{A}_l(f)(z)(\xi)]|^2 d^n \xi \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\text{máx}\{1, \|\xi\|_p\}]^{2l} \left| \mathcal{F} \left[\mathcal{F}_{\xi \rightarrow z}^{-1} \left([\text{máx}\{1, \|\xi\|_p\}]^{-\frac{l}{2}} \widehat{f}(\xi) \right) \right] \right|^2 d^n \xi \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\text{máx}\{1, \|\xi\|_p\}]^{2l} \left| \left([\text{máx}\{1, \|\xi\|_p\}]^{-\frac{l}{2}} \widehat{f}(\xi) \right) \right|^2 d^n \xi \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\text{máx}\{1, \|\xi\|_p\}]^{2l} [\text{máx}\{1, \|\xi\|_p\}]^{-l} |\widehat{f}(\xi)|^2 d^n \xi \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\text{máx}\{1, \|\xi\|_p\}]^{\left(\frac{3l}{2}\right)} |\widehat{f}(\xi)|^2 d^n \xi \\
\text{como } 1 &\leq [\text{máx}\{1, \|\xi\|_p\}] \text{ para todo } \xi \in \mathbb{Q}_p^n, \text{ se tiene} \\
&\leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} [\text{máx}\{1, \|\xi\|_p\}]^{2l} |\widehat{f}(\xi)|^2 d^n \xi \\
&= \|f\|_l^2 < \infty.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.11. *El anterior teorema muestra que el operador $\mathcal{A}_l : \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, deja invariante los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, adicionalmete muestra que $\|\mathcal{A}_l(f)(z)\|_l \leq \|f\|_l$ para todo $f \in \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, es decir el operador pseudodiferencial es acotado.*

A continuación garantiza la existencia de K -marcos en espacios p -ádicos. Especificamente garantizamos la existencia de K -marcos asociados al operador $\mathcal{A}_l : \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$ para los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$.

Teorema 3.14. *Sea $\mathcal{A}_l : \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$ el operador pseudodiferencial como antes. Entonces \mathcal{A}_l tiene un sistema atómico para $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$.*

Demostración. Recordemos que $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$ es un espacio de Hilbert separable (ver Teorema 3.10), con una base ortonormal $\psi_{\gamma\eta\zeta}^{(l)}(x) = \frac{p^{-\frac{n\gamma}{2}}}{[\text{máx}(1, p^{1-\gamma})]^l} \chi(p^{-1}\zeta \cdot (p^\gamma x - \eta)) \Omega(\|p^\gamma x - \eta\|_p)$ con γ, ζ, η como antes, además el número de vectores ζ es igual a $|\zeta| = p^n - 1$.

Consideremos $f \in \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, entonces

$$f = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Q}_p^n / \mathbb{Z}_p^n, |\zeta|=1}^{p^n-1} \langle f, \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_l \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{A}_l f = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Q}_p^n / \mathbb{Z}_p^n, |\zeta|=1}^{p^n-1} \langle f, \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_l \mathcal{A}_l \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)},$$

Denotamos $f_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} = \mathcal{A}_l \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}$, $a_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} = \langle f, \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_l$, con γ, ζ, η como antes.

Por la anterior notación tenemos que:

$$\mathcal{A}_l f = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Q}_p^n / \mathbb{Z}_p^n} a_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} f_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \quad (3.21)$$

Luego,

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Q}_p^n / \mathbb{Z}_p^n, |\zeta|=1}^{p^n-1} |\langle f, f_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_l|^2 = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Q}_p^n / \mathbb{Z}_p^n, |\zeta|=1}^{p^n-1} |\langle f, \mathcal{A}_l \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_l|^2$$

En el anterior Teorema (3.13), mostramos que el operador pseudodiferencial es acotado y existe su adjunto, por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Q}_p^n / \mathbb{Z}_p^n, |\zeta|=1}^{p^n-1} |\langle f, f_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_l|^2 &= \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Q}_p^n / \mathbb{Z}_p^n, |\zeta|=1}^{p^n-1} |\langle \mathcal{A}_l^* f, \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_l|^2 \\ &= \|\mathcal{A}_l^* f\|_l^2 \leq \|\mathcal{A}_l^*\|^2 \|f\|_l^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Q}_p^n / \mathbb{Z}_p^n, |\zeta|=1}^{p^n-1} |a_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}|^2 = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Q}_p^n / \mathbb{Z}_p^n, |\zeta|=1}^{p^n-1} |\langle f, \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} \rangle_l|^2 = \|f\|_l^2,$$

donde utilizamos la relación de Parseval.

Finalmente, usando usando la Definición (2.6), hemos demostrado que $f_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)} = \mathcal{A}_l \psi_{\gamma, \eta, \zeta}^{(l)}$ es un sistema atómico asociados a el operador pseudodiferencial $\mathcal{A}_l : \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, para $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$. \square

Comentario 3.15. El Teorema anterior (3.14), nos garantiza la existencia de sistemas atómicos $f_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)} = \mathcal{A}_l \psi_{\gamma,\eta,\zeta}^{(l)}$ asociados para el operador pseudodiferencial $\mathcal{A}_l : \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, para $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$. Usando el Teorema de equivalencia (2.6) y las definiciones (2.5) y (2.6), lo que hemos construido es un K -marco asociado al operador $\mathcal{A}_l : \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$, para $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$.

Capítulo 4

CONCLUSIONES

4.1. Conclusiones

En el presente trabajo de grado realizamos un estudio de los marcos asociados a un operador en espacios p -ádicos (K -marcos). Primeramente, se estableció un operador pseudo-diferencial acotado el cual deja invariante a los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}})$, (ver Teorema 3.13) lo cual nos permite garantizar la existencia de los marcos asociados al anterior operador, (ver Teorema 3.14).

Una contribución significativa de este trabajo es mostrar que en los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}})$, podemos encontrar ejemplos de marcos los cuales no son bases, ver Ejemplo (3.12). Adicionalmente se logró construir un operador psuedodiferencial $\mathcal{A}_l : \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}}) \rightarrow \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}})$, siguiendo el trabajo de Garuta, (ver [10]), posteriormente a esto, se estableció la existencia de los K -marcos asociados al operador \mathcal{A}_l en los espacios de Hilbert separables $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}})$.

4.2. Trabajos futuros

Como futuros trabajos, se podría pensar en la construcción de los marcos duales asociados los K -marcos en los espacios $\mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$. Siguiendo los trabajos de **Găvruta** [10], de igual forma analizar si es posible construir un operador $L : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}_l(\mathbb{Q}_p^n)$ el cual permita reconstruir los K -marcos introducidos en el presente trabajo.

Bibliografía

- [1] Sergio Albeverio y Sergei V Kozyrev. «Multidimensional basis of p-adic wavelets and representation theory». En: *P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications* 1 (2009), págs. 181-189.
- [2] Sergio Albeverio y VM Shelkovich. *Theory of p-adic distributions: linear and non-linear models*. 370. Cambridge University Press, 2010.
- [3] Edilberto Arroyo-Ortiz. «A note on the p-adic Kozyrev wavelets basis». En: *Revista Colombiana de Matemáticas* 55.1 (2021), págs. 1-12.
- [4] Edilberto Arroyo-Ortiz y WA Zúñiga-Galindo. «Construction of p-adic covariant quantum fields in the framework of white noise analysis». En: *Reports on Mathematical Physics* 84.1 (2019), págs. 1-34.
- [5] Ole Christensen et al. *An introduction to frames and Riesz bases*. Vol. 7. Springer, 2003.
- [6] Ingrid Daubechies. «The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis». En: *IEEE transactions on information theory* 36.5 (1990), págs. 961-1005.
- [7] Ingrid Daubechies, Alex Grossmann e Yves Meyer. «Painless nonorthogonal expansions». En: *Journal of Mathematical Physics* 27.5 (1986), págs. 1271-1283.
- [8] Ronald G Douglas. «On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 17.2 (1966), págs. 413-415.
- [9] Richard J Duffin y Albert C Schaeffer. «A class of nonharmonic Fourier series». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 72.2 (1952), págs. 341-366.
- [10] Laura Găvruta. «Frames for operators». En: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 32.1 (2012), págs. 139-144.
- [11] Fernando Q Gouvêa y Fernando Q Gouvêa. *p-adic Numbers*. Springer, 1997.

-
- [12] Marc D Hauser. «Sources of acoustic variation in rhesus macaque (*Macaca mulatta*) Vocalizations». En: *Ethology* 89.1 (1991), págs. 29-46.
- [13] IV Volovich, EI Zelenov et al. *p-adic Analysis and Mathematical Physics*. Vol. 1. World Scientific, 1994.
- [14] Rudin W. «Real and Complex Analysis McGraw-Hill Singapore». En: (1986).
- [15] Xiangchun Xiao, Yucan Zhu y Laura Găvruta. «Some properties of K-frames in Hilbert spaces». En: *Results in mathematics* 63.3-4 (2013), págs. 1243-1255.
- [16] WA Zúñiga-Galindo. «Non-Archimedean white noise, pseudodifferential stochastic equations, and massive Euclidean fields». En: *Journal of Fourier Analysis and Applications* 23.2 (2017), págs. 288-323.