DISEÑO Y ELABORACION DE UNA MONOGRAFIA DIGITAL DE LA ASIGNATURA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARA EL PROGRAMA DE INGENIERIA DE SISTEMAS

Trabajo presentado al Departamento de Ingeniería de Sistemas, en cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el Título de Ingeniero de Sistemas

Autor:

ELVI JOSE MENDOZA VILLADIEGO

Director:

MILTON HERNANDEZ ZAKZUK

Codirector:

ROBERT GALEANO

UNIVERSIDAD DE CORDOBA

FACULTAD DE INGENIERIAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE SISTEMAS

LORICA - CORDOBA

JUNIO DE 2015

DISEÑO Y ELABORACION DE UNA MONOGRAFIA DIGITAL DE LA ASIGNATURA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARA EL PROGRAMA DE INGENIERIA DE SISTEMAS

Trabajo presentado al Departamento de Ingeniería de Sistemas, en cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el Título de Ingeniero de Sistemas

Autor:

ELVI JOSE MENDOZA VILLADIEGO

Director:

MILTON HERNANDEZ ZAKZUK

Codirector:

ROBERT GALEANO

UNIVERSIDAD DE CORDOBA

FACULTAD DE INGENIERIAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE SISTEMAS

LORICA - CORDOBA

JUNIO DE 2015

HOJA DE ACEPTACIÓN

____

____

____

____

____

____

____

Firma del presidente del jurado

____

Firma del jurado

____

Firma del jurado

Montería, ______de ____________de ________

Agradecimientos.

En momentos como este, en el que me encuentro en una situación en la que finalizo una etapa de mi vida, para empezar una completamente nueva, siento la necesidad de agradecer a las personas que han estado conmigo durante estos años.

Este trabajo no hubiera sido posible sin el inmenso apoyo y colaboración de muchas personas, pero en primer lugar al profesor Robert Galeano, su apoyo incondicional fue crucial para culminar esta etapa, al Ingeniero Milton Hernández por todo sus aportes y por último, pero quizás más importante, agradezco a mi madre María Villadiego y a mi novia Sandra Suarez, que aunque no me ayudaron en actividades relacionadas con este proyecto, si fue de gran ayuda su apoyo moral y a lo largo de todo este tiempo.

Tabla de contenido

Resumen. 8
Abstract. 9
Introducción 10
Objetivos. 11
Semana 1 12
UNIDAD 1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. 16
1.1 Clasificación de las ecuaciones diferenciales. 17
Semana 2 26
1.2 Ecuaciones lineales 30
1.3 Otras consideraciones acerca de las ecuaciones lineales 38
Semana 3 44
1.4 Ecuaciones separables 48
1.5 Diferencias entre ecuaciones lineales y no lineales 55
Ejercicios propuestos para el primer quiz. 61
Semana 4 62
1.6 Aplicaciones de las ecuaciones lineales de primer orden 65
1.7 Dinámica de poblaciones y algunos problemas relacionados 78
Ejercicios propuestos para el primer taller 91
Semana 5 92
Ejercicios propuestos para el primer parcial acumulativo 94
Semana 6 95
1.8 Algunos problemas de mecánica 99
1.9 Ecuaciones exactas y factores integrantes 106
1.10 Ecuaciones homogéneas 114
1.11 Problemas diversos y aplicaciones 119

Semana 7 124

UNIDAD 2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN 127

2.1. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes 128

2.2. Soluciones fundamentales de las ecuaciones lineales homogéneas 138

Semana 8 149

2.3. Independencia lineal y el Wronskiano 152

Ejercicios propuestos para el segundo quiz. 159

Semana 9 160

2.4. Raíces complejas de la ecuación característica 164

2.5. Raíces repetidas; reducción de orden 170

Ejercicios propuestos para el segundo taller. 175

Semana 10 176

Ejercicios propuestos para el segundo parcial. 178

Semana 11 179

2.6. Ecuaciones no homogéneas; métodos de los coeficientes indeterminados 182

2.7. Variación de parámetros 188

UNIDAD 3. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR. 193

3.1 Teoría general de las ecuaciones lineales de n-ésimo orden 194

Semana 12 198

3.2 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes 202

3.3 Método de los coeficientes indeterminados 206

3.4 Método de variación de parámetros 210

Semana 13 215

UNIDAD 4, SOLUCIONES EN SERIE DE LAS ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. 218

4.1 Soluciones en serie cerca de un punto ordinario parte I 219

4.2 Soluciones en serie cerca de un punto ordinario parte II 228

Ejercicios propuestos para el tercer quiz. 233

Semana 14 234

UNIDAD 5. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE. 237

5.1 Definición de la transformada de Laplace 238

5.2 Solución de problemas con valor inicial 243

Ejercicios propuestos para el tercer taller. 252

Semana 15 253

Ejercicios propuestos para el tercer parcial. 255

Conclusiones. 256

Bibliografía. 257

Tabla de figuras

Figura 1.1.1 Péndulo simple 22
Figura 1.1.2 Campo direccional de $y' = (3 - y)/2$. 23
Figura 1.1.3 Campo direccional de $f(x, y) = e^x - 2y$..24
Figura 1.2.1 Soluciones de $y' + (1/2)y = 3/2$ 31
Figura 1.2.2 Curvas integrales de $y' + 2y = e^{-x}$...35
Figura 1.2.3 Campo direccional de $y' - 2xy = x$ 36
Figura 1.2.4 Curvas integrales de $y' - 2xy = x$ 37
Figura 1.3.1 Curvas integrables de $xy' + 2y = 4x^2$ 41
Figura 1.3.2 Curvas integrales de $y' - 2xy - 1$..42
Figura 1.4.1 Campo direccional y curvas integrales de $y' = x^2/(1 - y^2)$. 49
Figura 1.4.2 Curvas integrales de $y' = (3x^2 + 4x + 2)/2(y - 1)$...51
Figura 1.4.3 Curvas integrales de $y' = (y \cos x)/(1 + 2y^2)$. 53
Figura 1.5.1 Varias soluciones del problema con valor inicial $y' = y^{1/3}, \quad y0 = 0$.......................57
Figura 1.6.1 Tanque de agua del ejemplo 3. 72
Figura 1.7.1 Crecimiento exponencial: N contra t para $dN/dt = rN$. 79
Figura 1.7.2 dN/dt contra N para $dN/dt = r(1 - N/K)N$. 80
Figura 1.7.3 Crecimiento logístico: N contra t para $dN/dt = r(1 - N/K)N$................................82
Figura 1.7.4 N/K contra t para el modelo de población de hipoglosos en el Océano Pacífico........84
Figura 1.7.5 dN/dt contra N para $dN/dt = -r(1 - N/T)N$. 85
Figura 1.7.6 contra t para $dN/dt = -r(1 - N/T)N$ 86
Figura 1.7.8 N contra t para $dN/dt = -r(1 - N/T)(1 - N/K)N$...88
Figura 1.7.9 En los dos casos la solución de equilibrio $\phi(t) = k$ es semiestable. 89
Figura 1.8.1 Un cuerpo en el campo gravitacional de la Tierra. 102
Figura 2.1.1 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes..135
Figura 2.1.2 Solución de $4y" - 8y' + 3y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0.5$.. 136
Figura 4.1.1 Aproximaciones polinomiales para $\cos x$. 224
Figura 4.1.2 Aproximaciones polinomiales para $sen\ x$.. 224
Figura 4.1.3 Aproximaciones polinomiales para la solución y_1 (x) de la ecuación de Airy.. 228
Figura 4.1.4 Aproximaciones polinomiales para la solución y_1 (x) de la ecuación de Airy.. 228

Resumen.

El proyecto del módulo de ecuaciones diferenciales, está basado en el desarrollo e innovación de la enseñanza y el aprendizaje, que tiene como objetivo apoyar el proceso de formación de las ecuaciones diferenciales de los estudiantes de la facultad de Ingenierías de la Universidad de Córdoba especialmente los estudiantes de cuarto semestre que están empezando su proceso en esta área. Este módulo está compuesto por cinco (5) unidades básicas del aprendizaje de las ecuaciones diferenciales como son: Ecuaciones diferenciales de primer orden, ecuaciones diferenciales de segundo orden, ecuaciones diferenciales de orden superior, soluciones en serie de las ecuaciones lineales de segundo orden y la transformada de Laplace; y estas unidades a su vez están subdivididas en capítulos. Los estudiantes pueden además, de desarrollar su conocimiento, pueden afianzar su comprensión realizando los ejercicios propuestos para medir su capacidad de aprendizaje. Con la herramienta de aprendizaje se espera que los estudiantes desarrollen las estrategias que los conduzcan al aprendizaje autónomo y al mejoramiento de su nivel de competencias en el área de ecuaciones diferenciales.

Palabras Claves: Modulo, Ecuaciones, Diferenciales, Aprendizaje.

Abstract.

The project module differential equations, is based on the development and innovation of teaching and learning, which it aims to support the formation of differential equations of the students of the Faculty of Engineering of the University of Cordoba especially fourth semester students who are starting the process in this area. This module is composed of five (5) basic units of learning differential equations such as: First order differential equations, second order differential equations, higher order differential equations, series solutions of linear equations of second order and Laplace transform; and these units are in turn subdivided into chapters. The students can also develop their knowledge, can strengthen their understanding by performing the exercises to measure their ability to learn. With the expected learning tool for students to develop strategies that lead to autonomous learning and improving their level of competence in the field of differential equations.

Keywords: Module, equations, differential, Learning.

Introducción

El desarrollo de este proyecto surge de la búsqueda de un soporte de aprendizaje y a la vez para estar en vanguardia con la tecnología, ya que la digitalización de los módulos ha inducido una cadena de transformaciones y ha obligado a la industria editorial a una nueva forma de producción de libros, transportando el medio tradicional de impresión en papel a un medio que tiene lugar en un ordenador; disminuyendo así significativamente los costos de elaboración y distribución de los libros como también aumentando la población de lectores; convirtiendo a este en un navegante de la información de un libro blando, poliédrico y navegable.

En cuanto a su estructura, esta monografía está dividida en cinco (5) unidades de aprendizaje, organizadas de tal forma que no se escape ningún detalle ya que hay temas que dependen de otros, y por esta razón es necesario llevar dicho orden. Cada una de estas unidades, se subdividen en capítulos, en los cuales se expone la respectiva teoría y se resuelven ejercicios y al final del capítulo se plantean ejercicios, para que el estudiante ponga a prueba los conocimientos adquiridos. También cuenta con material extra (videos, pdf, etc.) con los cuales se busca una mejor comprensión del tema a tratar y demostrar así que este tipo de aprendizaje resultados significativos en la formación del profesional.

Objetivos.

Objetivo General

- Diseñar y elaborar una monografía digital de la asignatura de ecuaciones diferenciales para el programa de ingeniería de sistemas, para la enseñanza de estas a los alumnos en el curso de ecuaciones diferenciales.

Objetivos Específicos

- Determinar los temas más importantes a tratar en la monografía para fortalecer la teoría y la práctica de las ecuaciones diferenciales.
- Investigar y desarrollar la temática seleccionada para el área de ecuaciones diferencias.
- Formular problemas sobre la temática escogida para el área de ecuaciones diferenciales.
- Estimular y desarrollar la capacidad de análisis y de razonamiento lógico-deductivo del estudiante.

Semana 1

Temas

- Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Objetivos

- Conocer la clasificación de las ecuaciones diferenciales
- Hallar soluciones generales a las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Actividades

- Socializar y retroalimentar los conceptos básicos sobre la clasificación de las ecuaciones diferenciales.
- Solución de ejercicios sobre la clasificación de las ecuaciones diferenciales.

Recursos

- **Videos**

1. **Título:** Que es una ecuación diferencial parte 1

   Descripción: Explicación del concepto de ecuación diferencial y como se pueden clasificar de acuerdo al tipo (ordinaria o parcial), al orden (primer orden, segundo orden y demás) y si la ecuación diferencial es lineal o no.

   Link: https://www.youtube.com/watch?t=82&v=94YQF2BWis0

2. **Título:** Que es una ecuación diferencial parte 2

   Descripción: Se explica el concepto de ecuación diferencial lineal con ejemplos.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=wAhAzJ219KQ

3. Título: 1. Clasificación de Ecuaciones Diferenciales

Descripción: Temática clasificación de las ecuaciones diferenciales de primer orden, ejemplos, etc.

Link: https://www.youtube.com/watch?v=Og4DnRUrXQE

- **PDF**

1. **Título:** capitulo-1.pdf

Descripción: Definición de los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales de primer orden, como la clasificación, tipo, linealidad, solución, etc. Pág. 2 – 11.

Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-1.pdf

- **Páginas Web**

1. **Título:** Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Descripción: Definición de conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales.

Link:http://es.scribd.com/doc/9112757/Ecuaciones-Diferenciales-de-Primer-Orden

2. **Título:** Lección 6: Ecuaciones con variables separables

Descripción: Conceptos básicos y ejemplos sobre las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Link:http://datateca.unad.edu.co/contenidos/100412/modulo_exe/leccin_4_clasificacin_de_las_ecuaciones_diferenciales.html

- **Libros**

1. **Título:** Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición.

   Autor: William E. Boyce; Richard C. DiPrima,

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre la Clasificación de las ecuaciones diferenciales. Páginas 17 – 26.

2. **Título:** Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre la Clasificación de las ecuaciones diferenciales. Páginas 2- 36.

   Autor: Dennis G. Zill,

Unidad 1

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

Introducción

En esta unidad se estudian ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Sin embargo, para una función arbitraria f, no existe un método general para resolver esta ecuación en términos de funciones elementales. En lugar de ello, se describen varios métodos, cada uno de los cuales es aplicable a cierta subclase de ecuaciones. En otras secciones de este capítulo se abordan algunas de las aplicaciones importantes de las ecuaciones diferenciales de primer orden y algunas cuestiones teóricas relacionadas con la existencia y la unicidad de las soluciones.

También daremos a conocer técnicas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Como lo es la solución de ecuaciones por el método de separación de variables, solución de ecuaciones diferenciales homogéneas, solución de ecuaciones exactas y utilización del factor integrante. Entonces se da a conocer los procedimientos respectivos y a su vez ejemplos que afianzaran el aprendizaje (1).

1.1 Clasificación de las ecuaciones diferenciales.

Cuando se plantean en términos matemáticos muchos problemas importantes y significativos de la ingeniería, las ciencias físicas y las ciencias sociales, se requiere determinar una función que satisfaga una ecuación que contiene una o más derivadas de la función desconocida. Estas ecuaciones se denominan ecuaciones diferenciales. Quizá el ejemplo más conocido es la ley de Newton

$$m = \frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right] \tag{1}$$

Para la posición $u(t)$ de una partícula sobre la cual actúa una fuerza F, que puede ser una función del tiempo t, de la posición $u(t)$ y de la velocidad $du(t)/dt$. Para determinar el movimiento de una partícula sobre la que actúa una fuerza F es necesario hallar una función u que satisfaga la ecuación anterior.

El objetivo primordial es analizar algunas propiedades de las soluciones de las ecuaciones diferenciales y describir algunos de los métodos que han probado su eficacia para hallar las soluciones o, en algunos casos, dar aproximaciones de las mismas. A fin de contar con un marco de referencia para la presentación, en principio se mencionarán varias maneras útiles de clasificar las ecuaciones diferenciales. (1)

Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Una de las clasificaciones más evidentes se basa en el hecho de si la función desconocida depende de una sola variable independiente o de varias variables independientes. En el primer caso en la ecuación diferencial sólo aparecen derivadas ordinarias, por lo que se dice que es una **ecuación ordinaria**; En el segundo las derivadas son derivadas parciales, por lo que la ecuación se denomina **ecuación diferencial parcial.**

Además de la ecuación (1), dos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t) \tag{2}$$

Para la carga $Q(t)$ en un condensador en un circuito con capacitancia C, resistencia R, inductancia L y voltaje aplicado $E(t)$, y la ecuación que rige el decaimiento con el tiempo de una cantidad $R(t)$ de una sustancia radiactiva, como el radio,

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t) \tag{3}$$

En donde K es una constante conocida. Ejemplos típicos de ecuaciones diferenciales parciales son la ecuación del potencial

La ecuación del potencial

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

La Ecuación de la difusión o conducción de calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{5}$$

Y la ecuación de onda

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{6}$$

En donde α^2 y a^2 son ciertas constantes. La ecuación del potencial, de difusión y de onda surgen de diversos problemas en los campos de la electricidad y del magnetismo, elasticidad y mecánica de fluidos. Cada una de ellas es típica de fenómenos físicos distintos (observe los nombres) y cada una es representativa de una gran clase de ecuaciones diferenciales parciales. (1)

Sistemas de ecuaciones diferenciales. Otra clasificación de las ecuaciones diferenciales depende del número de funciones desconocidas que intervienen. Si hay que determinar una sola función, entonces basta una ecuación. Sin embargo, si existen dos o más funciones desconocidas, entonces se requiere un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, las ecuaciones de Lotka-Volterra, o del depredador-presa, son importantes en la creación de modelos ecológicos; estas ecuaciones tienen la forma

$$\begin{aligned} {dH}/{dt} &= aH - \propto HP \\ {dP}/{dt} &= -cP + \gamma HP \end{aligned} \tag{7}$$

En donde $H(t)$ y $P(t)$ son las poblaciones respectivas de las especies presa y depredadora. Las constantes a, α, c y y se basan en observaciones empíricas y dependen de las especies en estudio.

Orden. El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en ella, así, las ecuaciones (1) y (2) son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y la (3) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. (4), (5) y (6) son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden. De manera más general, la ecuación

$$F[x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)] = 0 \tag{8}$$

Es una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden y representa una relación entre la variable independiente x y los valores de la función u y sus n primeras derivadas $u', u'', \ldots, u^{(n)}$. En las ecuaciones diferenciales es conveniente y se acostumbra escribir y en vez de $u(x)$, así como $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, en vez de $u'(x)$, $u''(x), \ldots, u^{(n)}(x)$; por tanto, la ecuación (1) se escribe como

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{9}$$

Por ejemplo,

$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4 \tag{10}$$

Es una ecuación diferencial de tercer orden para $y = u(x)$. En ocasiones se usan otras letras en lugar de y; el resultado resulta evidente a partir del contexto.

Se supone que siempre es posible despejar la derivada de orden más alto en una ecuación diferencial ordinaria dada y obtener

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)} \tag{11}$$

Lo anterior se hace principalmente para evitar la ambigüedad que pudiera surgir debido a que una sola ecuación de la forma (2) puede corresponder a varias ecuaciones de la forma (4). Por ejemplo, la ecuación

$$y'^2 + xy' + 4y = 0$$

Da las dos ecuaciones

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 - 16y}}{2} \quad o \quad y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 - 16y}}{2}$$

Solución. Una solución de la ecuación diferencial ordinaria (11) sobre el intervalo $\propto < x < \beta$ es una función ϕ tal que existen $\phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n)}$ y se satisface

$$\phi^{(n)}(x) = f[x, \phi(\mathrm{x}), \phi'(\mathrm{x}), \ldots, \phi^{(n-1)}(x)] \tag{12}$$

Para toda x en $\propto < x < \beta$. A menos de que se diga otra cosa, se supone que la función f la ecuación (11) es una función de valores reales, y se tiene interés en obtener las soluciones $y = \phi(x)$ de valores reales.

Es fácil comprobar por sustitución directa que la ecuación de primer orden (3)

$$dR/dt = -kR$$

Tiene la solución

$$R = \phi(t) = ce^{-kt}, \ -\infty < t < \infty, \tag{13}$$

En donde c es una constante arbitraria. De manera semejante, las funciones $y_1(x) = cos\ x$ y $y_2(x) = sen\ x$ son soluciones de

$$y'' + y = 0 \tag{14}$$

Para toda x. Como un ejemplo un poco más complicado, se comprueba que $\phi_1(x) = x^2\ ln\ x$ es una solución de

$$x\ 2y" — 3xy' + 4y = O, x > 0. \tag{15}$$

Se tiene

$$\phi_1(x) = x^2\ ln\ x,$$

$$\phi'_1(x) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\ ln\ x = x + 2x \ln x,$$

$$\phi''_1(x) = 1 + 2x(1/x) + 2\ ln\ x = 3 + 2\ ln\ x$$

Al sustituir en la ecuación diferencial (15) se obtiene

$$x^2(3 + 2\ ln\ x) — 3x(x + 2x\ ln\ x) + 4(x^2\ ln\ x)$$

$$= 3x^2 — 3x^2 + (2 — 6 + 4)x^2\ ln\ x = O,$$

Con lo cual se comprueba que $\phi_1(x) = x^2 \ln x$ es una solución de la (15). También es posible demostrar que $\phi_2(x) = x^2$ es una solución de la ecuación (15); se deja esto último como ejercicio.

Aunque para las ecuaciones (3), (14) y (15) es posible verificar que ciertas funciones sencillas son soluciones, en general no se tienen con facilidad esas soluciones. Por tanto, una pregunta fundamental es: dada una ecuación de la forma (11), ¿cómo es posible decir si tiene una solución? Esta es la cuestión de existencia de una solución. El hecho de que se haya escrito una ecuación de la forma (11) no necesariamente significa que exista una función $y = \phi(x)$ que la satisfaga. De hecho, no todas las ecuaciones diferenciales tienen soluciones, ni su existencia es un asunto puramente matemático. Si un problema físico que tenga sentido, se plantea matemáticamente de manera correcta como una ecuación diferencial, entonces el problema matemático debe tener una solución. En este sentido, un ingeniero o un científico cuenta con un medio para comprobar la validez del planteamiento matemático.

En segundo lugar, suponiendo que una ecuación dada tiene una solución, ¿tendrá otras soluciones? En caso afirmativo, ¿qué tipo de condiciones adicionales es necesario especificar para singularizar una solución específica? Esta es la cuestión de unicidad. Obsérvese que para la ecuación de primer orden (3) existen una infinidad de soluciones, que corresponden a la infinidad de posibilidades de elección de la constante c de la ecuación (13). Si se especifica R en algún instante t, esta condición determinará un valor de c; sin embargo, aun así no se sabe todavía si la ecuación (3) no tiene otras soluciones que también tengan el valor prescrito de R en el instante predeterminado t. Las cuestiones de existencia y unicidad son difíciles de responder; a medida que se avance se analizarán estas dudas y otras relacionadas.

Una tercera pregunta, más práctica, es: dada una ecuación diferencial de la ecuación (11), ¿cómo se determina realmente una solución? Observe que si se encuentra una solución de la ecuación dada, al mismo tiempo se responde la pregunta de la existencia de una solución. Por otra parte, sin conocer la teoría de la existencia posible, por ejemplo, usar una computadora para hallar una aproximación numérica a una "solución" que no existe. Aunque fuese posible saber que existe una solución, puede ser que ésta no sea expresable en términos de las funciones elementales usuales: funciones polinomiales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas e hiperbólicas. No obstante, esto es lo que sucede para la mayor parte de las ecuaciones diferenciales. Por tanto, al mismo tiempo que se analizan los métodos elementales que pueden aplicarse para obtener soluciones de ciertos problemas relativamente sencillos, también es importante considerar los métodos de naturaleza más general que puedan aplicarse a problemas más difíciles (1).

Ecuaciones lineales y no lineales. Otra clasificación decisiva de las ecuaciones diferenciales es si éstas son lineales o no lineales. Se dice que la ecuación diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', \ldots, y^n) = 0$$

Es **lineal** si F es una función lineal de las variables $y, y', \ldots, y^n$; se aplica una definición semejante para las ecuaciones diferenciales parciales. Por tanto, la ecuación diferencial ordinaria lineal general de orden n es

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x) \tag{16}$$

Las ecuaciones (2) a (6), (14) y (15) son lineales. Una ecuación que no es de la forma (16) es no lineal. La (10) es no lineal debido al término yy'. Un problema físico sencillo que da origen a una ecuación diferencial no lineal es el péndulo oscilante. El ángulo θ formado por un péndulo oscilante de longitud l, con respecto a la vertical (ver la figura 1.1.1) satisface la ecuación no lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\, \theta = 0 \tag{17}$$

La teoría matemática y las técnicas para resolver ecuaciones lineales están bastante desarrolladas. Por el contrario, para las ecuaciones no lineales la situación no es tan satisfactoria.

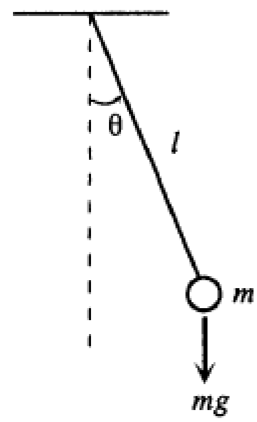


Figura 1.1.1 Péndulo simple
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 17

Faltan en gran parte técnicas generales para resolver las ecuaciones no lineales y la teoría no asociada con ellas también es más complicada que la correspondiente de las ecuaciones lineales. En vista de lo anterior, resulta conveniente que muchos problemas importantes originen ecuaciones diferenciales ordinarias lineales o, por lo menos en una primera aproximación, ecuaciones lineales. Por ejemplo, para el problema del péndulo, si el ángulo θ es pequeño, entonces $sen\,\theta \cong \theta$ y la ecuación (17) puede sustituirse por la ecuación lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{18}$$

Por otra parte, existen fenómenos físicos importantes, en los que no es posible dar una aproximación de las ecuaciones diferenciales no lineales rectoras por medio de lineales: la no linealidad es decisiva.

En un texto elemental es natural hacer hincapié en el análisis de las ecuaciones lineales. Por consiguiente, la mayor parte de este libro está dedicada a las ecuaciones lineales y a diversos métodos para resolverlas. Sin embargo, a lo largo de todo el texto se intenta mostrar por qué las ecuaciones no lineales son, en general, más difíciles y por qué muchas de las técnicas útiles para resolver ecuaciones lineales no pueden aplicarse a las no lineales.

Campos direccionales. A partir del próximo capítulo se analizarán con detalle muchos métodos para resolver varias clases de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, antes de proceder a ese análisis, vale la pena hacer algunos comentarios acerca de la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones. Un punto de vista geométrico es particularmente útil para las ecuaciones de primer orden, es decir, ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{19}$$

Dado que una solución de la ecuación (19) es una función $y = \phi(x)$, la representación geométrica de una solución es la gráfica de una función. Geométricamente, en la ecuación (19) se afirma que, en cualquier punto (x, y) la pendiente dy/dx de la solución en ese punto está dada por $f(x, y)$. Esto pude indicarse si se traza un pequeño segmento rectilíneo que pase por el punto (x, y) con la pendiente $f(x, y)$. La colección de todos esos segmentos rectilíneos se llama **campo direccional** de la ecuación diferencial (19). El campo direccional puede observarse si se trazan pequeños segmentos rectilíneos en algún conjunto representativo de puntos en el plano xy. Aunque hacer esto manualmente es tedioso, resulta una tarea sencilla para una computadora, ya que sólo se requiere la evaluación repetida de $f(x, y)$ para valores diferentes de x y y. Por lo general se elige alguna rejilla rectangular de puntos. Una vez que se obtiene un esquema del campo direccional, a menudo es posible ver de inmediato el comportamiento cualitativo de las soluciones, o quizá observar regiones del plano que tienen algún interés especial. (1)

Por ejemplo, en la figura 1.1.2 se tiene el campo direccional de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - y}{2} \tag{20}$$

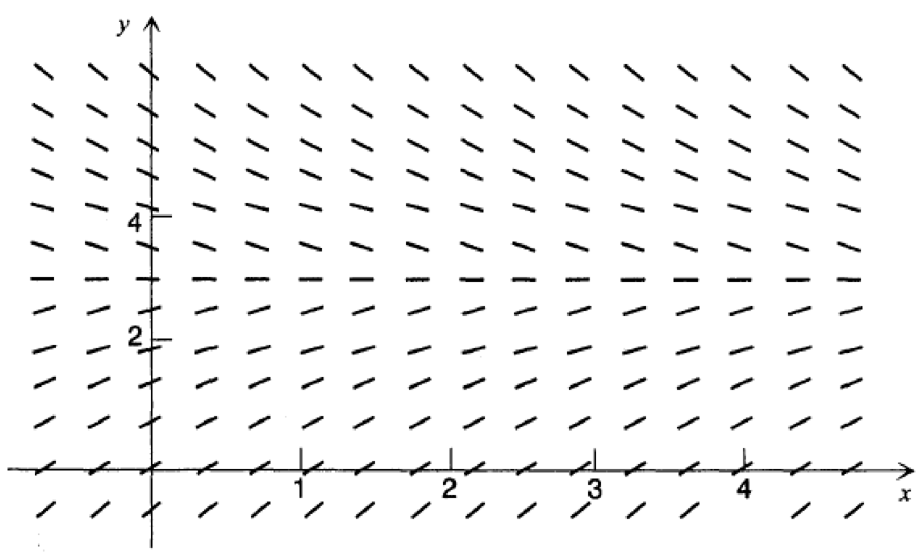


Figura 2.1.2 Campo direccional de $y' = (3 - y)/2$.
Fuente: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 23*

Para esta ecuación, $f(x, y)$ sólo depende de y, de modo que los segmentos rectilíneos tienen la misma pendiente en todos los puntos sobre cualquier recta paralela al eje x. Por ejemplo, sobre la recta $y = 2$ la pendiente de cada segmento rectilíneo es $1/2$. Cualquier solución de la (20) tiene la propiedad de que, en todo punto, su gráfica es tangente al elemento del campo direccional en ese punto. Por tanto, como puede observarse a partir de esta figura, el campo direccional proporciona una información cualitativa acerca de las soluciones. Por ejemplo, con base en la figura 1.1.2 parece evidente que las soluciones son funciones decrecientes cuando $y > 3$, que son crecientes cuando $y < 3$, y que, aparentemente, todas las soluciones tienden al valor 3 cuando $x \to \infty$. En la sección 1.2 se estudia con mayor detalle esta ecuación; allí se encontrarán sus soluciones y se confirmarán estas conclusiones tentativas. Como otro ejemplo, considere la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} - 2y \tag{21}$$

Ahora la función $f(x, y) = e^{-x} - 2y$ depende tanto de x como de y, de modo que es una ecuación más complicada que la (20). En la figura 1.1.3 se muestra el campo direccional de la ecuación (21). Una vez más, el patrón general de las curvas solución resulta evidente con base en esta figura y parece que todas las soluciones tienden a cero cuando $x \to \infty$ (1).

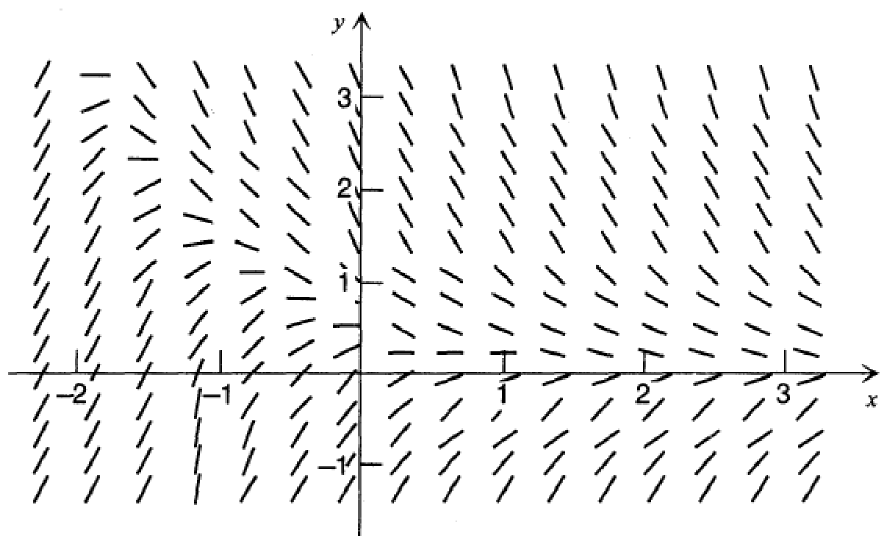


Figura 3.1.3 Campo direccional de $f(x, y) = e^{x} - 2y$

Fuente: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 24.*

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, determine el orden de la ecuación diferencial dada; diga también si la ecuación es lineal o no lineal.

1. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 2y = sen\ x$
2. $(1+y^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = e^x$
3. $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 1$
4. $\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + sen(x+y) = sen\ x$
6. $\frac{d^3y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} + (cos^2 x)y = x^3$

En cada uno de los problemas 7 a 13, verifique que la función o funciones que se dan son una solución de la ecuación diferencial.

7. $y'' - y = 0;\quad y_1(x) = e^x,\ \ y_2(x) = \cosh x$
8. $y'' + 2y' - 3y = 0;\ \ y_1(x) = e^{-3x},\ y_2(x) = e^x$
9. $xy' - y = x^2;\quad y = 3x + x^2$
10. $y'''' + 4y''' + 3y = x;\quad y_1(x) = \frac{x}{3},\ \ y_2(x) = e^{-x} + x/3$
11. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0,\quad x > 0;\quad y_1(x) = x^{-2},\quad y_2(x) = x^{-2}\ln x$
12. $y'' + y = \sec x,\quad 0 < x < \pi/2;\quad y_1 = (\cos x)\ln\cos x + x\ sen\ x$
13. $y' - 2xy = 1;\qquad y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}$

En cada uno de los problemas 14 a 17, determine los valores de r para los que la ecuación diferencial dada tiene soluciones de la forma $y = e^{rx}$.

14. $y' + 2y = 0$
15. $y'' - y = 0$
16. $y'' + y' - 6y = 0$
17. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

En cada uno de los problemas 18 y 19, determine los valores de r para los que la ecuación diferencial dada tiene soluciones de la forma $y = x^r$, para $x > 0$.

18. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
19. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

Semana 2

Temas

- Ecuaciones lineales
- Otras consideraciones acerca de las ecuaciones lineales

Objetivos

- Conocer y entender los de las ecuaciones lineales y sus consideraciones.

Actividades

- Socialización y retroalimentación los conceptos de las ecuaciones lineales y sus consideraciones.
- Resolver ejercicios sobre ecuaciones lineales.

Recursos

- **Videos**

1. **Título:** Ecuación lineal de primer orden (ejemplo 1)

Descripción: Ejemplo del método de solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden mediante el uso de un factor integrante. En el ejemplo se muestra como encontrar el factor integrante identificando primero a $\mathrm{p}(x)$ llevando la ecuación original a la forma $y' + p(x)y = f(x)$.

Link: https://www.youtube.com/watch?v=7HYcQTTKPdA

2. **Título:** Ecuación lineal de primer orden (ejemplo 2)

Descripción: En el ejemplo se muestra como encontrar el factor integrante identificando primero a $p(x)$ llevando la ecuación original a la forma $y' + p(x)y = f(x)$.

Link: https://www.youtube.com/watch?v=ma9uW0xE4g0

- **PDF**

1. **Título:** capitulo-2.pdf

   Descripción: Conceptos de ecuaciones lineales, métodos de solución, propiedades, etc. Pág. 17 - 28

   Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-2.pdf

2. **Título:** l841-07.pdf

   Descripción: Conceptos y solución de una ecuación lineal.

   Link: http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/ma-841/recursos/l841-07.pdf

- **Páginas Web**

1. **Título:** Ecuación lineal de primer orden

   Descripción: Definiciones básicas, teorema, ejercicios.

   Link: https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/EcuacionesDiferenciales/EDO-Geo/edo-cap2-geo/node9.html

- **Libros**

1. **Título:** Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición.

   Autor: William E. Boyce; Richard C. DiPrima

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre las ecuaciones lineales de primer orden. Páginas 31 – 47.

3. **Título:** Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre las ecuaciones lineales de primer orden. Páginas 53- 64.

   Autor: Dennis G. Zill.

1.2 Ecuaciones lineales

Se empieza con las ecuaciones de la forma

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

En donde f es una función dada de dos variables. Cualquier función diferencial $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación (1) para toda x en algún intervalo se llama solución, y el objetivo es determinar si existen funciones de este tipo y, en caso afirmativo, desarrollar métodos para encontrarlas.

En esta sección y en la siguiente se supondrá que la función $f(x, y)$ depende linealmente de la variable dependiente y. En este caso, la ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{2}$$

Y se denomina **ecuación lineal de primer orden**. Se supondrá que p y g son funciones dadas y que son continuas en algún intervalo $\propto < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{\beta}$. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \tag{3}$$

Es una ecuación lineal particularmente simple en la que las funciones $p(x) = 1/2$ y $g(x) = 3/2$ son constantes. Recuerde que en la figura 1.1.2 del capítulo anterior se dio el campo direccional de la ecuación (3). (1)

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación (3) y determinar el comportamiento de las soluciones para valores grandes de x. También, determinar la solución cuya gráfica contiene el punto $(0, 2)$.

Para resolver la ecuación (3) se observa que si $y \neq 3$, entonces esa ecuación puede escribirse de nuevo como

$$\frac{dy/dx}{y-3} = -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Como el primer miembro de la ecuación (4) es la derivada de $ln\ y - 3$, se tiene

$$\frac{d}{dx}\ln|y-3| = \frac{1}{2}$$

Entonces, se concluye que

$$\ln|y-3| = -\frac{x}{2} + C$$

En donde C es una constante arbitraria de integración. Por consiguiente, al tomar la exponencial de ambos miembros, se obtiene

$$|y-3| = e^{C}e^{-x/2},$$

O bien,

$$y-3 = \pm e^{C}e^{-x/2},$$

Y, por último,

$$y = 3 + ce^{-x/2} \tag{5}$$

En donde $c = \pm e^{c}$ también es una constante arbitraria (diferente de cero). Observe que la solución constante $y = 3$ también está contenida en la expresión (5), si se permite que c tome el valor cero. En la figura 1.2.1 se muestran las gráficas de la ecuación (5) para varios valores de c. Nótese que poseen el carácter inferido con base en el campo direccional de la figura 1.1.2; por ejemplo, a partir de la ecuación (5) resulta evidente que $y \to 3$ cuando $x \to \infty$. Para un valor particular de c la gráfica correspondiente contiene el punto $(0, 2)$. Para hallar este valor de c, en la ecuación (5) se sustituye $x = 0$ y $y = 2$ y se encuentra que $c = -1$. Por tanto,

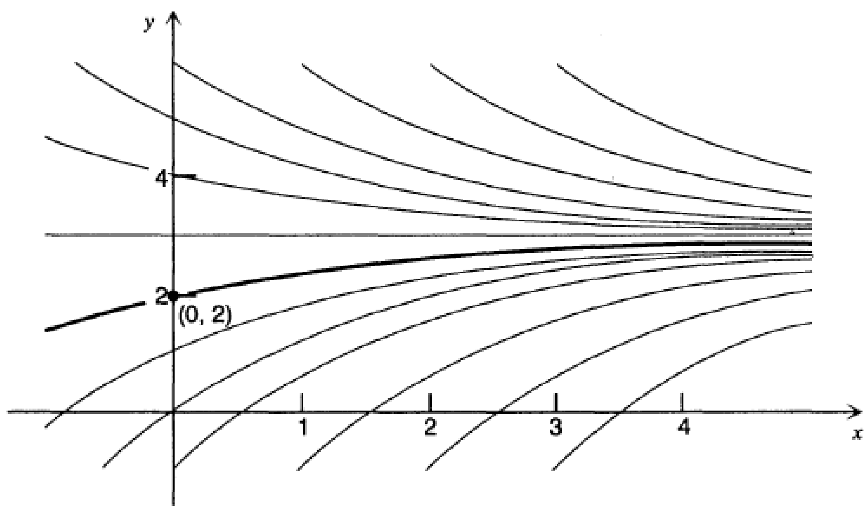


Figura 1.2.1 Soluciones de $y' + (1/2)y = 3/2$

Fuente: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 33*

$$y = 3 - e^{-x/2} \tag{6}$$

Es la solución cuya gráfica contiene al punto dado $(0, 2)$. Esto se ilustra con la curva de trazo grueso en la figura 1.2.1.

Factores integrantes. Al volver a examinar la solución de la ecuación diferencial del ejemplo 1, es posible encontrar un indicio que conduzca a un método para resolver ecuaciones lineales de primer orden más generales. En primer lugar, la ecuación (5) se escribe en la forma

$$ye^{x/2} = 3e^{x/2} + c \tag{7}$$

Y luego, al derivar ambos miembros con respecto a x se obtiene

$$\left(y' + \frac{1}{2}y\right)e^{x/2} = \frac{3}{2}e^{x/2}, \tag{8}$$

Lo que es equivalente a la ecuación original (3). Observe ahora que la ecuación (3) puede resolverse si se invierten los pasos precedentes. Es decir, si se multiplica primero la ecuación (3) por $e^{x/2}$, con lo que se obtiene la ecuación (8). Luego, note que el primer miembro de la ecuación (8) es la derivada de $ye^{x/2}$, de modo que la ecuación queda

$$(ye^{x/2})' = \frac{3}{2}e^{x/2} \tag{9}$$

Por último, al integrar ambos miembros de la ecuación (9) se obtiene la ecuación (7) y, por tanto, la solución de la ecuación (5). En otras palabras, una manera de resolver la ecuación (3) es multiplicarla primero por la función $e^{x/2}$. Como esta multiplicación reduce la ecuación a una forma que es integrable de manera inmediata, la función $e^{x/2}$ se denomina **factor integrante** (o de integración) de la ecuación (3). Por supuesto, para que este método sea eficaz debe ser posible calcular el factor integrante directamente a partir de la ecuación diferencial. A continuación, se aborda esta cuestión en el contexto de la ecuación más general (2).

El análisis anterior sugiere que una manera posible de resolver la ecuación lineal general de primer orden (2),

$$y' + p(x)y = g(x),$$

Es multiplicar por un factor integrante adecuado y llevarla en consecuencia a una forma integrable. Para encontrar ese factor integrante primero se multiplica la ecuación (2) por una función $\mu(x)$, que por el momento no está determinada. Entonces, se tiene

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x). \tag{10}$$

El objetivo es elegir $\mu(x)$ de modo que el primer miembro de la ecuación (10) sea la derivada de alguna función. El término $\mu(x)y'$ sugiere que la función deseada podría ser el producto $\mu(x)y$. A fin de obtener la combinación $[\mu(x)y]' = \mu'(x)y + \mu(x)y'$ es necesario sumar y restar el término $\mu(x)y$ en el primer miembro de la ecuación (10); al hacerlo y agrupar los términos de manera conveniente, se obtiene

$$[\mu'(x)y + \mu(x)y'] - [\mu'(x) + p(x)\mu(x)]y = \mu(x)g(x) \quad (11)$$

Ahora, si el segundo término del primer miembro de la ecuación (11) fuese cero, entonces esta ecuación tendrá la forma

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x) \quad (12)$$

Y el primer miembro (por lo menos) sería fácilmente integrable. A fin de lograr lo anterior, debe elegirse μ de modo que

$$\mu'(x) - p(x)\mu(x) = 0 \quad (13)$$

Si, por el momento, se supone que μ es positiva, entonces la ecuación (13) puede escribirse como

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x),$$

O bien,

$$\frac{dy}{dx}\ln \mu(x) = p(x) \quad (14)$$

Por tanto,

$$\ln \mu(x) = \int p(x)dx + k \quad (15)$$

Al elegir la constante k como cero se obtiene la función más simple posible para μ, a saber

$$\mu(x) = \exp \int p(x)dx \quad (16)$$

Observe que $\mu(x)$ es positiva para toda x, como se supuso.

Una vez que se ha encontrado la función p, se regresa a la ecuación (2) y se multiplica por $p(x)$, obteniéndose así la ecuación (12). Al integrar ambos miembros de la ecuación (12) se obtiene

$$\mu(x)y = \int \mu(x)g(x)dx + c,$$

O bien,

$$y = \frac{\mu(x)g(x)dx + c}{\mu(x)} \quad (17)$$

La interpretación geométrica de la ecuación (17) es una familia infinita de curvas, una para cada valor de c, de la misma manera en que las gráficas de la figura 1.2.1 representan las soluciones (5) de la ecuación (3). A menudo, a estas curvas se les da el nombre de **curvas integrales**. Algunas veces es importante elegir un elemento específico de la familia de curvas integrales. Lo anterior se lleva a cabo al identificar un punto particular (x_0, y_0) por el que se requiera que pase la gráfica de la solución. Este requisito suele expresarse como

$$y(x_0) = y_0 \tag{18}$$

Y se denomina **condición inicial**. Una ecuación diferencial de primer orden, como la (1) o (2), junto con una condición inicial, como la (18), constituyen un **problema con valor inicial**. (1)

Ejemplo 2.

Determinar la solución del problema con valor inicial

$$y' + 2y = e^{-x} \tag{19}$$

$$y(0) = 0.75. \tag{20}$$

En la figura 1.1.3 se muestra el campo direccional de la ecuación (19), de donde es posible deducir el perfil general de las curvas integrales. Para resolver la ecuación (19), observe que ésta es de la forma de la ecuación (2), con $p(x) = 2yg(x) = e^{-x}$. Por tanto, el factor integrante es

$$\mu(x) = \exp \int 2dx = e^{2x}$$

Y al multiplicar la ecuación (19) por esta cantidad, se obtiene

$$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{x} \tag{21}$$

El primer miembro de la ecuación (21) es la derivada de $e^{2x}y$, de modo que esta ecuación puede escribirse como

$$(e^{2x}y)' = e^{x}$$

Y por integración se concluye que

$$e^{2x}y = e^{x} + c,$$

En donde c es una constante arbitraria. Por lo tanto,

$$y = e^{-x} + ce^{-2x} \tag{22}$$

Es la solución general de la ecuación (19). En la figura 1.2.2 se muestran algunas curvas integrales de la ecuación (19); observe que siguen el patrón que resulta evidente basándose en el campo direccional de la figura 1.1.3. Con más precisión, para x grande el segundo término del segundo miembro de la ecuación (22) es despreciable en comparación con el primer término; por tanto, las gráficas de todas las soluciones tienden a la gráfica de $y = exp(-x)$ cuando $x \to \infty$.

Para satisfacer la condición inicial (20), se sustituyen $x = 0$ y $y = 0.75$ en la ecuación (22); esto da $c = -0.25$, de modo que la solución del problema con valor inicial dado es

$$y = e^{-x} - 0.25e^{-2x}. \tag{23}$$

En la figura 1.2.2 se muestra la gráfica de esta solución, por medio de la curva de trazo grueso.

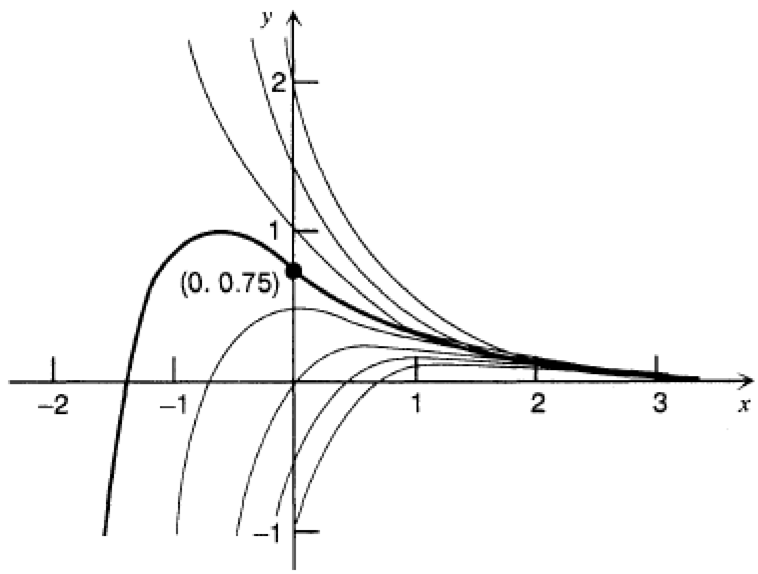


Figura 2.2.2 Curvas integrales de $y' + 2y = e^{-x}$.

Fuente: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 36*

Ejemplo 3.

Determinar la solución del problema con valor inicial

$$y' - 2xy = x, \quad y(0) = 0. \tag{24}$$

En la figura 1.2.3 se observa el campo direccional de esta ecuación diferencial. Para resolver la ecuación en primer lugar se encuentra el factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left(-\int 2x dx\right) = e^{-x^2}$$

Luego, al multiplicar por $\mu(x)$ se obtiene

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2},$$

O bien,

$$\left(ye^{-x2}\right)' = xe^{-x2}.$$

Por consiguiente,

$$ye^{-x2} = \int xe^{-x2}dx + c = \frac{1}{2}e^{-x2} + c,$$

Y se concluye que

$$y = \tfrac{1}{2} + ce^{x2} \tag{25}$$

Es la solución general de la ecuación diferencial dada. Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 0$ es necesario elegir $c = 1/2$. De donde,

$$y = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{x2} \tag{26}$$

Es la solución del problema con valor inicial (24). En la figura 1.2.4 se muestran algunas curvas integrales y la solución particular que pasa por el origen. (1)

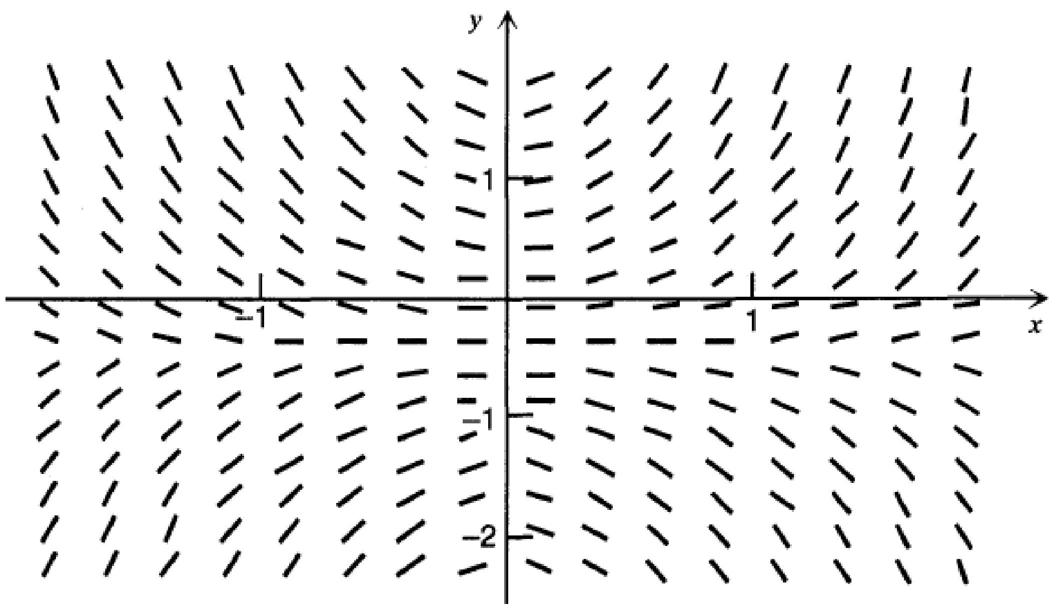


Figura 3.2.3 Campo direccional de $y' - 2xy = x$

Fuente: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 37*

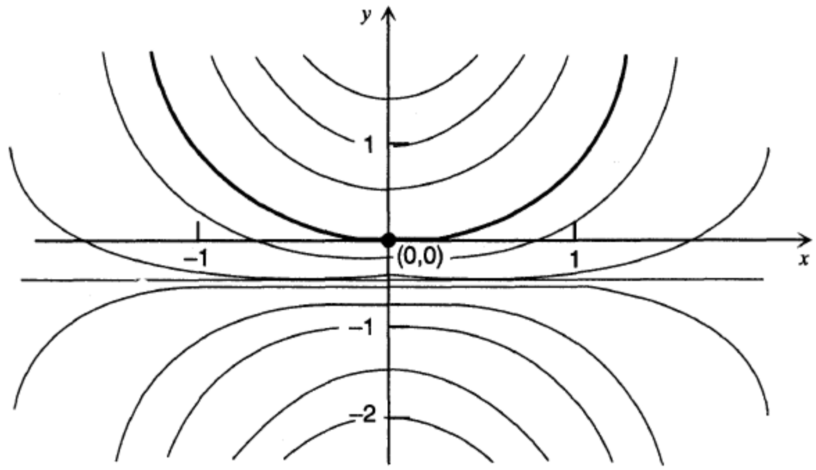


Figura 4.2.4 Curvas integrales de $y' - 2xy = x$
Fuente: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 38*

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 7, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y' + 3y = x + e^{-2x}$
2. $y' - 2y = x^2 e^{2x}$
3. $y' + (1/x)y = 3\, cos\, 2x, \qquad x > 0$
4. $y' - y = 2e^x$
5. $xy' + 2y = sen\, x, \quad x > 0$
6. $y' + +2xy = xe^{-x^2}$
7. $(1 + x^2)y' + 4xy = (1 + x^2)^{-2}$

En cada uno de los problemas 8 a 13, encuentre la solución del problema con valor inicial dado.

8. $y' - y = 2xe^{2x}, \qquad y(0) = 1$
9. $xy' + 2y = x^2 - x + 1, \qquad y(1) = \frac{1}{2}, \qquad x > 0$
10. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}, \qquad y(\pi) = 0, \quad x > 0$
11. $y' - 2y = e^{2x}, \qquad y(0) = 2$
12. $xy' + 2y = sen\, x, \quad y(\pi/2) = 1$
13. $xy' + (x + 1)y = x, \quad y(\ln x) = 1$

1.3 Otras consideraciones acerca de las ecuaciones lineales

En la sección 1.2 se mostró como construir soluciones de problemas con valor inicial para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden mediante el uso de un factor integrante para cambiar la ecuación diferencial por una forma integrable. A continuación se abordaran algunas cuestiones de carácter más general, a saber,

1. ¿Un problema con valor inicial de este tipo siempre tiene una solución?
2. ¿Es posible que tenga más de una solución?
3. ¿Es valida la solución para toda $\boldsymbol{x}$ o solo para algún intervalo restringido alrededor del punto inicial?

El siguiente teorema fundamental da respuesta a las preguntas anteriores.

Teorema 1.3.1

Si las funciones p y g son continuas en un intervalo abierto $I: \alpha < x < \beta$ que contenga el punto $x = x_u$, entonces existe una única función $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{1}$$

para toda x en I, y que también satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

En donde $\boldsymbol{y_0}$ es un valor inicial arbitrario prescrito. (1)

Observe que el teorema anterior establece que el problema con valor inicial dado tiene una solución y también que el problema tiene sólo una solución. En otras palabras, el teorema asegura la existencia y la unicidad de la solución del problema con valor inicial (1), (2).

Además establece que la solución existe en toda la extensión de cualquier intervalo I que contenga al punto inicial x_0 en el que los coeficientes p y g sean continuos. Es decir, la solución puede ser discontinua o no existir sólo en los puntos en los que por lo menos una de p y g sea discontinua. A menudo estos puntos se identifican a primera vista.

La demostración de este teorema está parcialmente contenida en el análisis de la sección anterior que llevó a la fórmula

$$y = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + c}{\mu(x)} \tag{3}$$

En donde

$$\mu(x) = exp \int p(x)dx \tag{4}$$

Al observar con más cuidado se puede concluir que, en efecto, la ecuación diferencial (1) debe tener una solución. Dado que p es continua para $\propto < x < \beta$, se concluye que está definida en este intervalo y que es una función diferenciable diferente de cero. Al multiplicar la ecuación (1) por $\mu(x)$ se obtiene

$$[\mu(x)y]' \ = \ \mu(x)g\{x). \tag{5}$$

En virtud de que μ y g son continuas, la función μg es integrable, y la ecuación (3) se deduce de la (5). Además, la integral de μg es diferenciable, de modo que y, dada por la ecuación (3), existe y es diferenciable en todo el intervalo $\propto < x < \beta$. Al sustituir la expresión dada para y por la ecuación (3), en (1) o en (5), es fácil verificar que esta expresión satisface la ecuación diferencial en todo el intervalo $\propto < x < \beta$. Por último, la condición inicial (2) determina de manera única la constante c, de modo que existe sólo una solución del problema con valor inicial, con lo que se completa la demostración. Dado que la ecuación (3) contiene todas las soluciones de la ecuación (1), esta expresión se llama solución general de la ecuación (1).

La ecuación (4) determina el factor de integración $\mu(x)$ solo hasta un factor multiplicativo que depende del límite inferior de integración. Si se elige este límite inferior como x_0, entonces

$$\mu(x) = exp \int_{x_0}^{x} p(t)dt, \tag{6}$$

Y se concluye que $\mu(x_0) = 1$. Al utilizar el factor integrante dado por la ecuación (6) y elegir el límite inferior de integración de la ecuación (3) también igual a x_0, se obtiene la solución general de la ecuación (1) en la forma

$$y = \frac{\int_{x_0}^{x} \mu(s)g(s)ds + c}{\mu(x)}$$

Para satisfacer la condición inicial (2) debe elegirse $c = y_0$. Por tanto, la solución del problema con valor inicial (1), (2) es

$$y = \frac{\int_{x_0}^{x} \mu(s)g(s)ds + y_0}{\mu(x)} \tag{7}$$

En donde $\mu(x)$ está dada por la ecuación (6). (1)

Ejemplo 1.

Resolver el problema con valor inicial

$$xy' + 2y = 4x^2 \tag{8}$$

$$y(1) = 2 \tag{9}$$

Y determinar el intervalo en el que la solución es válida.

Solución:

Primero escribimos la ecuación de la siguiente manera:

$$y' + \frac{2}{x}y = 4x \tag{10}$$

Y se busca una solución en un intervalo que contenga a $x = 1$. Dado que los coeficientes en (10) son continuos excepto en $x = 0$, por el teorema 1.3.1 se concluye que el problema con valor inicial dado tiene una solución válida por lo menos en el intervalo $0 < x < \beta$. Para encontrar esta solución en primer lugar se calcula $\mu(x)$:

$$\mu(x) = exp\left(\int \frac{2}{x}dx\right) = e^{2\,ln\,x} = x^2 \tag{11}$$

Al multiplicar la ecuación (10) por $\mu(x) = x^2$, se obtiene

$$x^2y' + 2xy = (x^2y)' = 4x^3$$

Y, por consiguiente,

$$x^2y = x^4 + c$$

En donde c es una constante arbitraria. Se concluye que

$$y = x^2 + \frac{c}{x^2} \tag{12}$$

Es la solución general de la ecuación (8). En la figura 2.2.1 se tiene un esquema de las curvas integrales de (8) para varios valores de C. Para satisfacer la condición inicial (9) es necesario elegir $C = 1$; por tanto,

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2},\ x > 0 \tag{13}$$

Es la solución del problema con valor inicial (8), (9). Esta solución se muestra en la figura 2.2.1 por medio de la curva de trazo grueso. Observe que la función $y = x2 + (1/x^2)$, para $x < 0$, no forma parte de la solución de este problema con valor inicial.

La solución (13) se hace no acotada cuando $x \to 0$. Este hecho no es sorprendente, ya que $x = 0$ es un punto de discontinuidad del coeficiente de y en la ecuación diferencial (10). Sin embargo, si se cambia la condición inicial (9) por

$$y(1) = 1, \tag{14}$$

Entonces por la ecuación (12) se concluye que $c = 0$. De donde, la solución del problema con valor inicial (8), (14) es

$$y = x^2, \tag{15}$$

Que es acotada y continua incluso en la vecindad de $x = 0$. Lo anterior demuestra que el teorema 1.3.1 *no* asegura que la solución de un problema con valor inicial debe volverse siempre que p o g se hagan discontinuas: en lugar de ello, establece que la solución no puede hacerse discontinua en otros puntos.

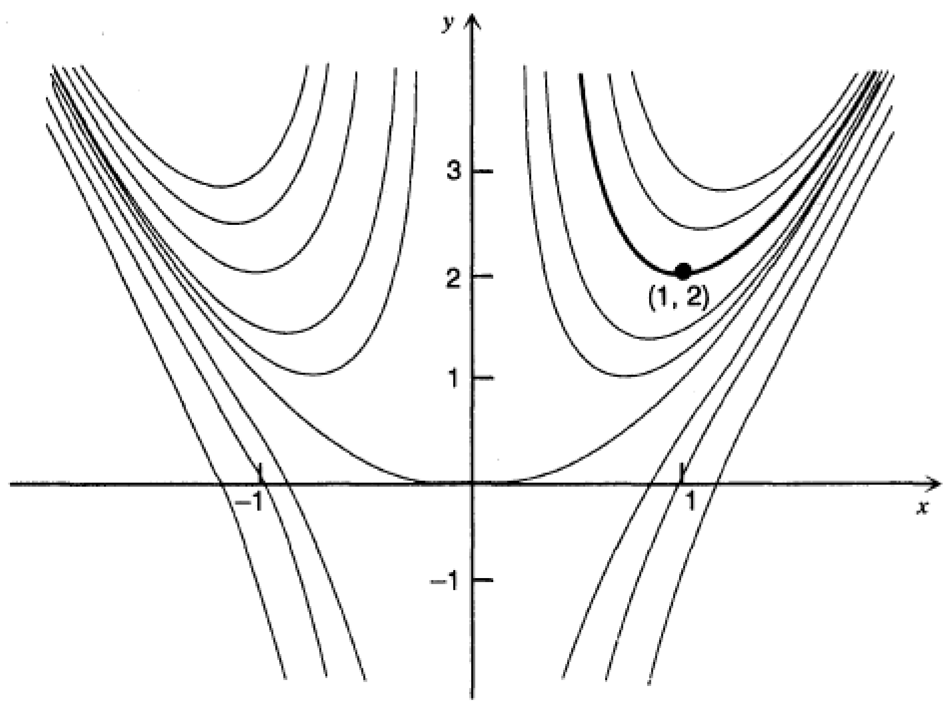


Figura 1.3.1 Curvas integrables de $xy' + 2y = 4x^2$
Fuente: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 43*

El comportamiento posible de las soluciones de problemas con valor inicial de ecuaciones lineales de primer orden en la vecindad de un punto en el que p o g es discontinua es más variado que lo que puede sugerir el análisis anterior.

Ejemplo 2.

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y' - 2\,x\,y \;=\; 1, \qquad y(0) \;=\; -0.5 \tag{16}$$

Para resolver la ecuación diferencial, se observa que $\mu(x) = e^{-x^2}$; por consiguiente,

$$e^{-x^2}(y' - 2xy) = e^{-x^2}$$

Y

$$ye^{-x^2} = \int e^{-x^2}dx + C \tag{17}$$

Para evaluar c es conveniente tomar el límite inferior de integración como el punto inicial $x \;=\; 0.$

Luego, al resolver para y la ecuación (17), se obtiene

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + ce^{x^2}, \tag{18}$$

Que es la solución general de la ecuación diferencial dada. Para satisfacer la condición inicial $y(0) \;=\; -0.5$, debe elegirse $c \;=\; -0.5$; de donde,

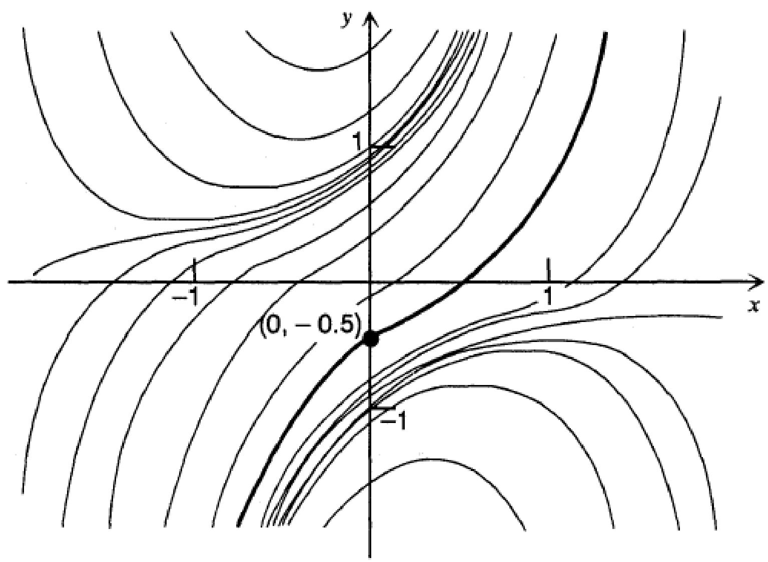


Figura 1.3.2 Curvas integrales de $y' \;-\; 2xy \;-\; 1.$

Fuente: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 44*

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt - 0.5e^{x^2} \tag{19}$$

Es la solución del problema con valor inicial dado. En la figura 1.3.2 se muestran algunas de las curvas integrales y la solución particular que pasa por (0, -0.5). (1)

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4, halle la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = senx, \quad x > 0$
2. $x^2y' + 3xy = \frac{sen\, x}{x}, \quad x < 0$
3. $y' + (tan\, x)y = x\, sen\, 2x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
4. $xy' + 2y = e^x, \quad x > 0$

En cada uno de los problemas del 5 al 12, determine la solución del problema con valor inicial dado. Escriba el intervalo en que la solución es válida.

5. $xy' + 2y = x^2 - x + 1, \quad y(1) = 1/2$
6. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 1$
7. $y' + (cot\, x)y = 2\, csc\, x, \quad y(\pi/2) = 1$
8. $xy' + 2y = senx, \quad y(\pi) = 1/\pi$
9. $y' + (cot\, x)y = 4\, sen\, x, \quad y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
10. $x(2 + x)y' + 2(1 + x)y = 1 + 3x^2, \quad y(-1) = 1$
11. $y' + y = 1/(1 + x^2), \quad y(0) = 0$
12. $(1 - x^2)y' - xy = x(1 - x^2), \quad y(0) = 2$

Cada una de las ecuaciones de los problemas del 13 al 16 tiene por lo menos un coeficiente discontinuo en $x = 0$. Resuelva cada ecuación para $x > 0$ y describa el comportamiento de la solución cuando $x \to 0$, para varios valores de la constante de integración. Trace varios miembros de la familia de curvas integrales.

13. $y' + (2/x) = 1/x^2$
14. . $y' - (1/x)y = x$
15. $y' — (1/x)y = x^{1/2}$
16. $y' + (1/x)y = (cos\, x)/x$

Semana 3

Temas

- Ecuaciones separables
- Diferencias entre las ecuaciones lineales y no lineales

Objetivos

- Estudiar y afianzar conocimiento en los conceptos y soluciones de las ecuaciones separables.
- Identificar y comprender las diferencias entre ecuaciones lineales y no lineales.

Actividades

- Socialización de los conceptos básicos sobre las ecuaciones separables.
- Solución de ejercicios sobre las ecuaciones separables.
- Comprensión de las principales diferencias de las ecuaciones lineales y no lineales.
- Solución de ejercicios sobre ecuaciones lineales y no lineales.
- Quiz número 1, sobre los temas de las semanas 1 y 2. El estudiante contara con 1 hora para resolver los ejercicios propuestos por el profesor.

Recursos

- **Videos**

1. **Título:** Solución de una ecuación diferencial por separación de variables

   Descripción: Se explica la solución de una ecuación diferencial de primer orden y primer grado por el método de separación de variables.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=v3CsjgKeB7U

2. **Título:** Ecuaciones Diferenciales Primer Orden - Método Variables Separables - Vídeo 151.

   Descripción: Se explica la solución de una ecuación diferencial de primer orden y primer grado por el método de separación de variables.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=kMjCchF6B68

- **PDF**

1. **Título:** capitulo-2.pdf

   Descripción: Conceptos básico y solución de ejercicios por el método de solución variables separables, propiedades, etc. Pág. 2 – 9.

   Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-2.pdf

1. **Título:** capitulo-3.pdf

   Descripción: Explicación de muchos modelos matemáticos, y solución de algunas de las ecuaciones diferenciales, lineales y no lineales, que surgen con frecuencia en las aplicaciones

   Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-3.pdf

- **Páginas Web**

1. **Título:** Diferencias entre las ecuaciones lineales y no lineales | eHow en Español.

   Descripción: Definición, diferencias y ejemplos de las ecuaciones lineales y no lineales.

   Link: http://www.ehowenespanol.com/diferencias-ecuaciones-lineales-lineales-sobre_345127/

- **Libros**

1. **Título:** Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición.

   Autor: William E. Boyce; Richard C. DiPrima

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre las ecuaciones separables, ecuaciones lineales y no lineales. Páginas 47 - 60.

2. **Título:** Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre las variables separables. Páginas 38 - 45.

   Autor: Dennis G. Zill.

1.4 Ecuaciones separables

En este estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

A continuación se tratan las ecuaciones que pueden ser no lineales, es decir, ecuaciones en las que f depende de una manera no lineal de la variable dependiente y. A menudo es conveniente reescribir la ecuación (1) en la forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

Siempre es posible hacer lo anterior estableciendo que $M(x,y) = -f(x,y)$ y $N(x,y) = 1$, pero pueden existir otras maneras. En caso de que M sea una función solo de x y N sea una función solo de y, entonces (2) queda

$$M(x,y) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Se dice que una ecuación de ese tipo es **separable,** porque si se escribe en la forma diferencial

$$M(x)dx = -N(y)dy \tag{4}$$

Entonces cada miembro de la ecuación depende solamente de una de las variables. (1)

Ejemplo 1.

Demostrar que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} \tag{5}$$

Es separable y, a continuación, encontrar una ecuación para sus curvas integrales.
Si la ecuación (5) se escribe como

$$-x^2 + (1-y^2)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{6}$$

Entonces tiene la forma (3) y, por consiguiente, es separable. En seguida, observe que el primer término de la ecuación (6) es la derivada de $-x^3/3$ y que el segundo término, por medio de la regla de la cadena, es la derivada con respecto a x de $y - y^3/3$. Por tanto, la ecuación (6) puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3}\right) + \frac{d}{dx}\left(y - \frac{y^3}{3}\right) = 0,$$

O bien,

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3}\right) = 0,$$

Por lo tanto,

$$-x^3 + 3y - y^3 = c, \tag{7}$$

En donde c es una constante arbitraria, es una ecuación para las curvas integrales de la ecuación (5). En la figura 1.4.1 se muestran el campo direccional y varias curvas integrales. Es posible hallar una ecuación de la curva integral que pasa por un punto particular (x_0, y_0) al sustituir x y y por x_0 y y_0, respectivamente, en la ecuacion (7) y determinar el valor correspondiente de c. Cualquier función diferenciable $y = \phi(x)$ que satisfaga la ecuación (7) es una solución de la ecuación (5).

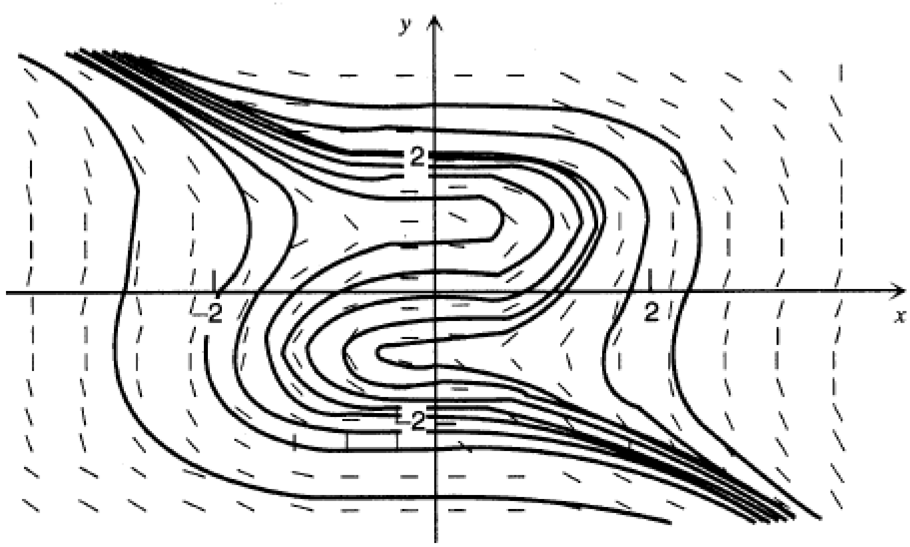


Figura 1.4.1 Campo direccional y curvas integrales de $y' = x^2/(1 - y^2)$.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 49.

Para cualquier ecuación separable es posible seguir en esencia el mismo procedimiento. Si se regresa a la ecuación (3), sea H_1 y H_2 funciones cualesquiera tales que

$$H'_1(x) = M(x), \qquad H'_2 = N(y); \tag{8}$$

Entonces (3) queda

$$H'_1(x) + H'_2(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{9}$$

Según la regla de la cadena,

$$H'_2(y)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}H_2(y) \tag{10}$$

Por consiguiente, (9) se transforma en

$$H'_1(x) + \frac{d}{dx}H_2(y) = 0,$$

O bien,

$$\frac{d}{dx}[H_1(x) + H_2(y)] = 0, \tag{11}$$

Al integrar la ecuación (11) se obtiene

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \tag{12}$$

En donde c es una constante arbitraria.
Si, además de la ecuación diferencial, se prescribe una condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{13}$$

Entonces la solución de (3) que satisface esta condición se obtiene al hacer $x = x_0$ y $y = y_0$ en la (12). Con lo anterior se obtiene

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0). \tag{14}$$

Al sustituir este valor de c en (12) y al observar que

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^{x} M(t)dt, \quad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^{y} N(t)dt,$$

Se obtiene

$$\int_{x_0}^{x} M(t)dt + \int_{y_0}^{y} N(t)dt, \tag{15}$$

La ecuación (15) es una representación implícita de la solución de la ecuación diferencial (3) que también satisface la condición inicial (13). Es necesario tener presente que la determinación de una formula explicita para la solución requiere que en (15) se despeje y como una función de x; esto puede presentar enormes dificultades. (1)

Ejemplo 2.

Resolver el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}, \qquad y(0) = -1. \tag{16}$$

La ecuación diferencial puede escribirse como

$$2(y-1)dy = (3x2 + 4x + 2)\, dx.$$

Al integrar el primer miembro con respecto a y y el segundo con respecto a x da

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 \; + \; 2x \; + \; x, \tag{17}$$

En donde c es una constante arbitraria. Para determinar la solución que satisface la condición inicial prescrita, en la ecuación (17) se sustituyen $x = 0$ y $y = -1$, con lo que se obtiene $c = 3$. Por tanto, la solución del problema con valor inicial está dada implícitamente por

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. \tag{18}$$

A fin de obtener la solución de manera explícita, es necesario despejar y en la ecuación (18), en términos de x. En este caso, es fácil, ya que la ecuación (18) es cuadrática en y, por lo que se obtiene

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \tag{19}$$

La ecuación (19) da dos soluciones de la ecuación diferencia, sin embargo, solo una de ellas satisface la condición inicial dada. Esta es la solución correspondiente al signo negativo en (19), de modo que por último se obtiene

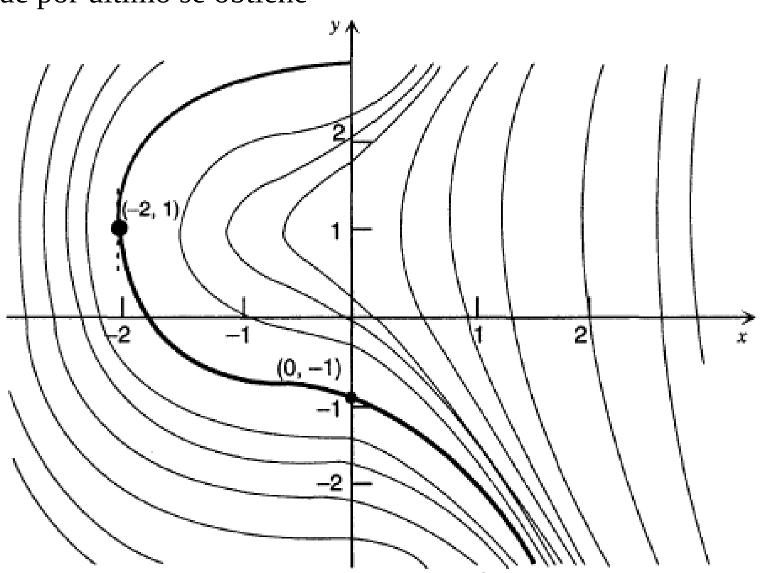


Figura 1.4.2 Curvas integrales de $y' = (3x^2 + 4x + 2)/2(y-1)$.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 51.

$$y = \Phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \qquad (20)$$

Como la solución del problema con valor inicial (16). Observe que si por error se elige el signo positivo en (19), entonces se obtiene la solución de la misma ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(0) = 3$. Finalmente, para determinar el intervalo en que la solución (20) es válida, debe hallarse el intervalo en el que el radicando es positivo. El único cero real de esta expresión es $x = -2$, por lo que el intervalo deseado es $x > -2$. En la figura 1.4.2 se muestran la solución del problema con valor inicial y algunas otras curvas integrales de la ecuación diferencial. Observe que la frontera del intervalo de validez de la solución (20) está determinada por el punto $(-2, 1)$, en el que la recta tangente es vertical. (1)

Ejemplo 3.

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2}, \qquad y(0) = 1 \qquad (21)$$

Primero se escribe la ecuación diferencial en la forma

$$\frac{1 + 2y^2}{y} dy = \cos x \, dx. \qquad (22)$$

Luego, al integrar el primer miembro con respecto a y y el segundo con respecto a x, se obtiene

$$\ln|y| + y^2 = sen\ x + c. \qquad (23)$$

Para satisfacer la condición inicial se sustituyen $x = 0$ y $y = 1$ en la ecuación (23); así se obtiene $c = 1$. De donde, la solucion del problema con valor inicial (21) queda dada implícitamente por

$$\ln|y| + y^2 = sen\ x + 1. \qquad (24)$$

En la figura 1.4.3 se muestran algunas curvas integrales de la ecuación diferencial dada, incluyendo la solución del problema con valor inicial (21). (1)

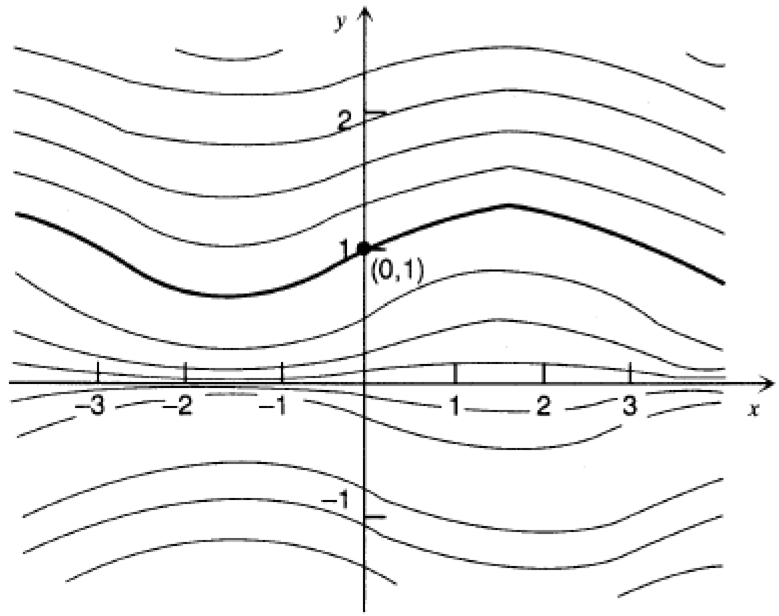


Figura 1.4.3 Curvas integrales de $y' = (y \cos x)/(1 + 2y^2)$.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 52.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, resuelva la ecuación diferencial dada.

1. $y' = x^2/y$
2. $y, = x^2/y(1 - x^3)$
3. $y' + y^2\ sen\ x = 0$
4. $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$
5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
6. $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + y^2}$

Para cada uno de los problemas 9 a 16, encuentre la solución del problema con valor inicial dado en forma explícita y determine (por lo menos aproximadamente) el intervalo en que está definida.

9. $xdx + ye^{-x}dy = 0, \quad y(0) = 1$
10. $dr/d\theta = r^2/\theta, \quad r(1) = 2$
11. $y' = 2x/(y + x^2y), \quad y(0) = -2$
12. $y' = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$
13. $y' = 2x/(1 + 2y), \quad y(2) = 0$
14. $y' = x(x^2 + 1)/4y^3, \quad y(0) = -1/\sqrt{2}$
15. $sen\ 2x\ dx + \cos 3y\ dy = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/3$
16. $y' = 2(1 + x)(1 + y^2), \quad y(0) = 0$

17. Resuelva el problema con valor inicial

$$y' = (1 + 3x^2)/(3y^2 - 6y), \quad y(0) = 1$$

Y determinar el intervalo en que la solución es válida.
Sugerencia: Para encontrar el intervalo de definición, busque los puntos en Los que $dx/dy = 0$

18. Resuelva el problema con valor inicial

$$y' = 3x^2/(3y^2 - 4), \quad y(1) = 0$$

Y determinar el intervalo en que la solución es válida.
Sugerencia: Para encontrar el intervalo de definición, busque los puntos en Los que $dx/dy = 0$

19. Resuelva la ecuación

$$y^2 = (1 - x^2)^{1/2}dy = arcsen\ x\ dx$$

En el intervalo $-1 < x < 1$

20. Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + b}{cx + d}$$

En donde a, b, c y d son constantes.

1.5 Diferencias entre ecuaciones lineales y no lineales

Al estudiar el problema con valor inicial

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$
$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Las cuestiones fundamentales a considerar son si existe una solución, si esta es única, sobre que intervalo está definida y como obtener una formula útil para esa solución. Si la ecuación diferencial (1) es lineal, entonces existe una formula general para la solución y, con base en ella, en las secciones 1.2 y 1.3 se dio respuesta, con relativa facilidad, a las cuestiones antes indicadas.

Existencia y unicidad. El siguiente teorema de existencia y unicidad es análogo al teorema 1.3.1 para las ecuaciones lineales.

Teorema 1.5.1

Sean las funciones f y $\partial f/\partial y$ continuas en algún rectángulo $\alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$ que contiene el punto $(x_0 = y_0)$. Entonces, en algún intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$ contenido en $\alpha < x < \beta$, existe una solución única $y = \phi(x)$ del problema con valor inicial (1), (2)

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Mediante ejemplos es posible hacer ver que para obtener el resultado que se enuncia en el teorema algunas condiciones sobre/son esenciales. De este modo, en el siguiente ejemplo se hace ver que el problema con valor inicial (1), (2) podría tener más de una solución en caso de que se violen las hipótesis del teorema 1.5.1. (1)

Ejemplo 1.

Resolver el problema con valor inicial

$$y' = y^{1/3}, \qquad y(0) = 0 \tag{3}$$

Para $x \geq 0$.

Este problema se resuelve con facilidad ya que la ecuación diferencial es separable. Por tanto, se tiene

$$y^{-1/3}dy = dx,$$

De modo que

$$\frac{3}{2}y^{2/3} = x + c$$

Y

$$y = \left[\frac{2}{3}(x + c)\right]^{3/2}$$

La condición inicial se satisface si $c = 0$, por lo que

$$y = \phi_1(x) = \left(\tfrac{2}{3}x\right)^{3/2}, \quad x \geq 0 \tag{4}$$

Satisface ambas ecuaciones (3). Por otra parte, la función

$$y = \phi_2(x) = -\left(\tfrac{2}{3}x\right)^{3/2}, \quad x \geq 0 \tag{5}$$

También es una solución del problema con valor inicial dado. Es más, la función

$$y = \psi(x) = 0, \quad x \geq 0 \tag{6}$$

Todavía es otra solución. De hecho, no es difícil demostrar que, para un positivo x_0 arbitrario, las funciones

$$y = \chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq x < x_0 \\ \pm\left[\frac{2}{3}(x - x_0)\right]^{3/2}, & \text{if } x \geq x_0 \end{cases} \tag{7}$$

Son continuas, diferenciables (en particular en $x = x0$) y soluciones del problema con valor inicial (3). Por tanto, este problema tiene una familia infinita de soluciones: ver la figura 1.5.1, en donde se muestran unas cuantas de estas soluciones.

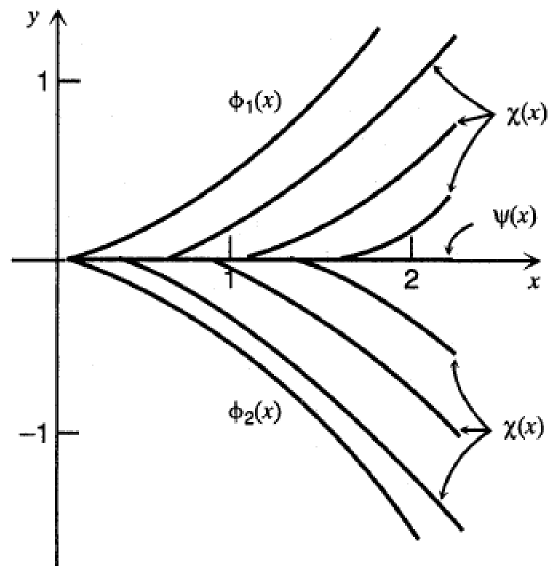


Figura 1.5.1 Varias soluciones del problema con valor inicial $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 56.

La no unicidad de las soluciones del problema (3) no contradice al teorema de existencia y unicidad, ya que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^{1/3}) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

Y esta función no es continua, incluso ni está definida, en cualquier punto en donde $y = 0$. De donde, el teorema no es aplicable en cualquier región que contenga parte del eje x. Sin embargo, si (x_0, y_0) es cualquier punto que no sea del eje x, entonces existe una solución única de la ecuación diferencial $y' = y^{1/3}$ que pasa por (x_0, y_0). (1)

Intervalo de definición. La solución de la ecuación lineal

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{8}$$

Sujeta a la condición inicial (2) existe a lo largo de cualquier intervalo alrededor de $x = x_0$ en el que las funciones p y g sean continuas. Por otra parte, para un problema no lineal con valor inicial puede ser difícil determinar el intervalo en el que existe una solución. Este hecho se ilustra con algunos de los ejemplos de la sección 1.4. En realidad, la solución $y = \phi(x)$ existe siempre que el punto $[x, \phi(x)]$ permanezca dentro de la región en la que se cumplen las hipótesis del teorema 1.5.1; sin embargo, como $\phi(x)$ en general no se conoce, puede ser imposible localizar el punto $[x, \phi(x)]$ con respecto a esta región. En todo caso, el intervalo en el que existe una solución puede no estar relacionado en forma sencilla con la función f de la ecuación (1). Esto se ilustra en el siguiente ejemplo. (1)

Ejemplo 2.

Resolver el problema con valor inicial

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1, \tag{9}$$

Y determinar el intervalo en el que existe la solución.

El teorema 1.5.1 garantiza que este problema tiene una solución única, ya que $f(x, y) = y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas en todo punto. Para encontrar la solución, primero se escribe la ecuación diferencial en la forma

$$y^{-2} dy = dx \tag{10}$$

Luego

$$-y^{-1} = x + c$$

Y

$$y = \frac{1}{x + c}. \tag{11}$$

Para satisfacer la condición inicial debe elegirse $c = -1$, de modo que

$$y = \frac{1}{1 - x}. \tag{12}$$

Es la solución del problema con valor inicial dado. Es evidente que la solución se vuelve no acotada cuando $x \to \infty$; por consiguiente, la solución existe solo en el intervalo $-\infty < x < 1$. Sin embargo, la ecuación diferencial por sí sola no indica que el punto $x = 1$ sea de alguna manera notable. Es más, si se reemplaza la condición inicial por

$$y(0) = y_0 \tag{13}$$

La constante c de la (11) debe elegirse como $c = -1/y_0$, y se concluye que

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0^x}. \tag{14}$$

Es la solución del problema con valor inicial con la condición inicial (13). Obsérvese que la solución (14) se vuelve no acotada cuando $x \to 1/y_0$, de modo que el intervalo de existencia de la solución es $-\infty < x < 1/y_0$ si $y_0 > 0$, y es $1/y_0 < x < \infty$ si $y_0 < 0$. Este ejemplo ilustra una característica que provoca dificultades de los problemas con valor inicial para ecuaciones no lineales; a saber, las singularidades de la solución pueden depender de manera esencial de las condiciones iniciales, así como de la ecuación diferencial.

Solución general. Otra manera en la que difieren las ecuaciones lineales y las no lineales es con respecto al concepto de solución general. Para una ecuación lineal de primer orden es posible obtener una solución que contenga una constante arbitraria, a partir de la cual se obtengan todas las soluciones posibles al especificar valores para esta constante. Para las ecuaciones no lineales este puede no ser el caso; aun cuando pueda hallarse una solución que contenga una constante arbitraria, es posible que no puedan obtenerse otras soluciones al dar valores a esta constante. Por ejemplo, para la ecuación diferencial $y' = y^2$ del ejemplo 2, la expresión de la (11) contiene una constante arbitraria, pero no incluye todas las soluciones de la ecuación diferencial.

Soluciones implícitas. Recuérdese una vez más que para una ecuación lineal de primer orden existe una formula explicita [ecuación (17) de la sección 1.2] para la solución de $y = \phi(x)$. En la medida en que es posible encontrar las anti derivadas necesarias, puede determinarse el valor de la solución en cualquier punto simplemente al sustituir el valor adecuado de x en la formula. La situación para las ecuaciones no lineales es mucho menos satisfactoria. Por lo general, lo mejor que puede esperarse es hallar una ecuación

$$F(x, y) = 0 \tag{15}$$

En la que intervengan x y y que sea satisfecha por la solución $y = \phi(x)$.

Construcción grafica o numérica de curvas integrales. Debido a la dificultad de obtener soluciones analíticas exactas de ecuaciones diferenciales no lineales, los métodos que producen soluciones aproximadas u otra información cualitativa sobre las soluciones tienen de manera correspondiente, una mayor importancia (1).

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, de la región del plano xy en la que se satisfacen las hipótesis del teorema 1.5.1; por tanto, existe una solución única que pasa por cada punto inicial dado en esta región.

1. $y' = \frac{x-y}{2x+5y}$
2. $y' = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$
3. $y' = \frac{2xy}{1+y^2}$
4. $y' = 3(x + y)^{-2}$
5. $y' = \frac{\ln|xy|}{1-x^2+y^2}$
6. $y' = (x^2 + y^2)^{3/2}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{3y-y^2}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{(\cot x}{1+v}$

En cada uno de los problemas 9 a 12, resuelva el problema con valor inicial dado y determine de qué manera el intervalo en el que la solución existe depende del valor inicial y_0.

9. $y' = -4x/y, \quad y(0) = y_0$
10. $y' = 2xy^2, \quad y(0) = y_0$
11. $y' + y^3 = 0, \quad y(0) = y_0$
12. $y' = x^2/y(1 + x^3), \quad y(0) = y_0$

13. Considere el problema con valor inicial $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$ que se analizó en el ejemplo 1 del texto.
    a) ¿Existe una solución que pase por el punto $(1,1)$? En caso afirmativo, halle esa solución.
    b) ¿Existe una solución que pase por el punto $(2,1)$? En caso afirmativo, halle esa solucion.
    c) Considere todas las soluciones posibles del problema con valor inicial dado. Determine el conjunto de valores que tienen estas soluciones en $x = 2$.

Ejercicios propuestos para el primer quiz.

1. Determine el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales dadas y diga si son lineal o no lineal.
   a. $(1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=e^x$
   b. $\frac{d^2y}{dx^2}+sen(x+y)=sen\,x$
   c. $\frac{d^2r}{dt^2}+9y=sen\,y$
   d. $(sen\,x)y'''-(\cos x)y'=2$
   e. $(1-y^2)dx+x\,dy=0$
   f. $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$

2. Encuentre la solución general de la ecuación dada.
   a. $y'+2xy=xe^{-x^2}$
   b. $y'+y=xe^{-x}+1$
   c. $(1+x^2)y'+sen\,x, \quad x>0$

3. Determine la solución del problema con valor inicial dado.
   a. $xy'+y=e^x, \quad y(1)=1$
   b. $xy'+2y=x^2-x+1, \quad y(1)=$ ½
   c. $y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi)=0, \quad x>0$

Semana 4

Temas

- Aplicación de las ecuaciones lineales de primer orden
- Dinámica de poblaciones y algunos problemas relacionados.

Objetivos

- Conocer las aplicaciones de las ecuaciones lineales de primer orden.
- Entender la dinámica de poblaciones y algunos problemas relacionados.

Actividades

- Solución de ejercicios sobre las ecuaciones lineales de primer orden.
- Socialización de conceptos básicos sobre dinámica de poblaciones y algunos problemas relacionados.
- Solución de ejercicios sobre dinámica de poblaciones y algunos problemas relacionados.
- Taller número 1, sobre los temas de las semanas 3 y 4. El estudiante contara con 1 hora para resolver los ejercicios propuestos por el profesor.

Recursos

- **Videos**

1. **Título:** Aplicación Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden - Crecimiento Poblacional - Vídeo 152

   Descripción: Solución de ejemplo sobre aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=QbTRVvs5_N4

- **PDF**

2. **Título:** suarezsema.pdf

   Descripción: Estudio teórico de algunos modelos de ecuaciones en que aparecen en la modelización de la dinámica de poblaciones.

   Link: http://personal.us.es/suarez/ficheros/suarezsema.pdf

- **Libros**

1. **Título:** Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición.

   Autor: William E. Boyce; Richard C. DiPrima

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre las aplicaciones de las ecuaciones lineales de primer orden. Páginas 60 - 71. Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre dinámica de poblaciones. Páginas 71 - 87.

2. **Título:** Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.

   Descripción: Conceptos básicos sobre los sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Páginas 98 – 109.

   Autor: Dennis G. Zill

1.6 Aplicaciones de las ecuaciones lineales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales son interesantes para los no matemáticos principalmente debido a la posibilidad de utilizarlas para investigar una amplia variedad de problemas de las ciencias físicas, biológicas y sociales. En este proceso se presentan tres pasos identificables, sin importar cuál sea el campo específico de aplicación.

En primer lugar, es necesario traducir la situación física en términos matemáticos. Suele llevarse a cabo esto al establecer hipótesis acerca de lo que está sucediendo que parezcan ser coherentes con los fenómenos observados. Por ejemplo, se ha observado que los materiales radiactivos decaen con una rapidez proporcional a la cantidad de material presente, que el calor pasa de un cuerpo caliente hacia uno más frío con una rapidez proporcional a la diferencia de temperaturas, que los objetos se mueven según con las leyes de Newton del movimiento y que las poblaciones aisladas de insectos crecen con una rapidez proporcional a la población existente. Cada una de estas proposiciones comprende una razón de cambio (derivada) y, en consecuencia, al expresarse matemáticamente, toma la forma de una ecuación diferencial.

Es importante tener en cuenta que las ecuaciones matemáticas casi siempre son sólo una descripción aproximada del proceso real, porque se basan en observaciones que por sí mismas son aproximaciones. Por ejemplo, los cuerpos que se mueven a velocidades comparables a la de la luz no cumplen con las leyes de Newton, las poblaciones de insectos no crecen indefinidamente como se afirmó, debido a posibles limitaciones en el abastecimiento de alimento, y la transferencia de calor es afectada por otros factores distintos a la diferencia en las temperaturas. Es más, el proceso de plantear matemáticamente un problema físico suele comprender el reemplazo conceptual de un proceso discreto por uno continuo.

Por ejemplo, el número de miembros en una población de insectos cambia en cantidades discretas; sin embargo, si la población es grande, parece razonable considerarla como una variable continua e incluso hablar de su derivada. De manera alternativa, puede adoptarse el punto de vista de que las ecuaciones matemáticas describen con exactitud la operación de un modelo simplificado que se ha construido (o concebido) de modo que comprenda las características más importantes del proceso real.

En todo caso, una vez que el problema se ha formulado matemáticamente, a menudo debe encararse el problema de resolver una o más ecuaciones diferenciales o, si falta el procedimiento, averiguar tanto como sea posible acerca de las propiedades de la solución. Puede suceder que este problema matemático sea bastante difícil y, de ser así, en esta etapa pueden indicarse aproximaciones adicionales que hagan el problema matemáticamente tratable. Por ejemplo, una ecuación no lineal puede aproximarse con una lineal, o una función que varíe con lentitud puede reemplazarse por su valor promedio. Por supuesto, cualquier de esas aproximaciones también debe analizarse desde el punto de vista físico a fin de tener la certeza de que el problema matemático simplificado sigue reflejando las características esenciales del proceso físico en estudio. Al mismo tiempo, un conocimiento profundo de la física del problema puede sugerir aproximaciones matemáticas razonables que hagan el problema matemático más tratable en el análisis. Esta interacción entre la comprensión de los fenómenos físicos y el conocimiento de las técnicas matemáticas y sus limitaciones es característica de la esencia de las matemáticas aplicadas, y es indispensable para construir con éxito modelos matemáticos de procesos físicos intrincados.

Por último, una vez que se ha obtenido la solución (o al menos alguna información acerca de ella), debe interpretarse en términos del contexto en el que surgió el problema. En particular siempre debe comprobarse si la solución matemática parece físicamente razonable. Esto exige, por lo menos, que la solución exista, sea única y dependa en forma continua de los datos del problema. Esta última consideración es importante porque los coeficientes de la ecuación diferencial y de las condiciones iniciales suelen obtenerse como resultado de mediciones de alguna cantidad física y, por consiguiente, son susceptibles de experimentar pequeños errores. Si estos pequeños errores conducen a cambios grandes (o discontinuos) en la solución del problema matemático correspondiente, que no se observan físicamente, entonces debe reconsiderarse si el modelo matemático es el adecuado para el problema físico.

Los ejemplos de esta sección son aplicaciones típicas en las que surgen ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. (1)

Ejemplo 1.

Decaimiento radiactivo. El isótopo radiactivo torio 234 se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente del mismo. Si 100 mg de este material se reducen a 82.04 mg en una semana, encontrar una expresión para la cantidad presente en cualquier instante. También, hallar el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que la masa decaiga hasta la mitad de su valor original.

Sea $Q(t)$ la cantidad de torio 234 presente en cualquier instante t, en donde Q se mide en miligramos y t, en días. La observación física de que el torio 234 se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente significa que la razón de cambio con el tiempo dQ/dt es proporcional a Q ; por tanto, Q satisface la ecuación diferencial.

$$dQ/dt = -rQ, \tag{1}$$

En donde la constante $r > 0$ se conoce como razón de decaimiento. Se busca la solución de la (1) que también satisfaga la condición inicial

$$Q(0) = 100 \tag{2}$$

Así como la condición

$$Q(7) = 82.04 \tag{3}$$

La ecuación (1) es lineal y también separable; su solución general es

$$Q(t) = 100e^{-rt}, \tag{4}$$

En donde c es una constante arbitraria. La condición inicial (2) requiere que $c = 100$ y, por lo tanto,

$$Q(t) = 100e^{-rt}, \tag{5}$$

A fin de satisfacer la (3), se hace $t = 7$ y $Q = 82.04$ en la (5); esto da

$$82.04 = 100e^{-7r}$$

Entonces,

$$r = -\frac{\ln 0.8204}{7} = 0.02828\ dias^{-1} \tag{6}$$

Por tanto, se ha determinado la razón de decaimiento r. Si se usa este valor de r en la (5), se obtiene

$$Q(t) = 100e^{-0.02828t}\ mg. \tag{7}$$

Con lo que se obtiene el valor de $Q(t)$ en cualquier instante.

El lapso durante el que la masa se reduce a la mitad de su valor original se denomina vida media del material. Sea τ el tiempo en que $Q(t)$ es igual a $50\ mg$. Entonces, por la (5),

$$50 = 100e^{-rt}$$

O bien,

$$r\tau = \ln 2. \tag{8}$$

La relación (8) entre la razón de decaimiento y la vida media es válida no sólo para el torio 234, sino para cualquier material que obedezca la ecuación diferencial (1); al usar el valor de r dado por la ecuación (6), se encuentra que, para el torio 234, (1)

$$\tau = \frac{\ln 2}{0.02828} \cong 24.5\ dias. \tag{9}$$

Ejemplo 2.

Interés compuesto Supóngase que, en un banco, se deposita una cantidad de dinero o fondo, que paga interés a una tasa anual r. El valor $S(t)$ de la inversión en cualquier instante t depende de la frecuencia con la que se componga el interés, así como de la tasa de éste. Las instituciones financieras tienen varias políticas sobre la composición: en algunas se compone mensualmente; en otras, semanalmente, y en otras, incluso diariamente. Si se supone que la composición se lleva a cabo continuamente, entonces es posible plantear un problema sencillo con valor inicial que describa el crecimiento de la inversión.

La razón de cambio del valor de la inversión es dS/dt, y esta cantidad es igual a la rapidez con la que se acumula el interés, que es la tasa de interés r multiplicada por el valor actual de la inversión $S(t)$. Por tanto,

$$dS/dt = rS \tag{10}$$

Es la ecuación diferencial que rige el proceso. Supóngase que también se conoce el valor de la inversión en algún instante particular, por ejemplo,

$$S(0) = S_0. \tag{11}$$

Entonces, la solución del problema con valor inicial (10), (11), da el balance $S(t)$ de la cuenta en cualquier instante t. Este problema con valor inicial se resuelve con facilidad. De hecho, es el mismo, salvo por el signo de la constante de proporcionalidad, que el problema con valor inicial del ejemplo 1, que describe el decaimiento radiactivo. Como consecuencia, al resolver las ecuaciones (10) y (11) se encuentra que

$$S(t) = S_0 e^{rt}. \tag{12}$$

Por tanto, una cuenta bancada con interés compuesto en forma continua crece exponencialmente.

Compárense ahora los resultados del modelo continuo que acaba de describirse con la situación en la que la composición ocurre a intervalos de tiempo finitos. Si el interés se compone una vez al año, entonces al cabo de t años,

$$S(t) = S_0(1+r)^t$$

Si el interés se compone dos veces al año, entonces al término de seis meses el valor de la inversión es $S_0[1+(r/2)]$, y al cabo de un año es $S_0[1+(r/2)]^2$. Entonces, después de t años se tiene

$$S(t) = S_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}$$

En general, si el interés se compone m veces al año, entonces

$$S(t) = S_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} \qquad (13)$$

La relación entre las fórmulas (12) y (13) se aclara si se recuerda de lo visto en cálculo que

$$\lim_{m\to\infty} S_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = S_0e^{rt}$$

En la tabla 1.6.1 se muestra el efecto de cambiar la frecuencia de composición para una tasa de interés r del 8%. La segunda y tercera columnas se calcularon con base en la ecuación (13) para una composición trimestral y diaria, respectivamente, y la cuarta se calculó con base en la (12) para una composición continua. Los resultados muestran que, en la mayor parte de los casos, la frecuencia de composición no tiene una importancia particular. Por ejemplo, durante un periodo de 10 años la diferencia entre la composición trimestral y la continua es de \$17.50 por cada \$1000 invertidos, o sea, menos de \$2 anuales. La diferencia sería un tanto mayor para tasas de interés más elevadas y sería menor para tasas más bajas. (1)

Años	$S(t)/S(t_0)$ De la ec. (13)		$S(t)/S(t_0)$ De la ec. (12)	$S(t)/S(t_0)$ De la ec. (14)
	$M=4$	$M=365$		
1	1.0824	1.0833	1.0833	1.0833
2	1.1716	1.1735	1.1735	1.1735
5	1.4859	1.4918	1.4918	1.4918
10	2.2080	2.2253	2.2253	2.2253
20	4.8754	4.9522	4.9522	4.9522
30	10.7652	11.0202	11.0202	11.0202
40	23.7699	24.5238	24.5238	24.5238

Tabla 1.6.1 *Crecimiento del capital a una tasa de interés de $r=8\%$, para varios modos de composición*

Con base en el primer renglón de la tabla se ve que, para la tasa de interés $r = 8\%$, el rendimiento anual para una composición trimestral es de 8.24% y para una composición diaria o continua es de 8.33%. Algunos bancos anuncian un rendimiento anual incluso más alto que el que se obtiene con composición continúa. Esto se logra al calcular una tasa de interés diaria con el uso de un año nominal de 360 días y luego al componer esta tasa a lo largo del año natural real. (1)

Al aplicar este método para una tasa de interés r, e ignorar los años bisiestos, se encuentra que

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{360}\right)^{365t} \tag{14}$$

En la última columna de la tabla 1.6.1 se dan los resultados de la ecuación (14), para una tasa de interés del 8%. Obsérvese que el rendimiento anual efectivo es del 8.45%.

Si se vuelve ahora al caso de la composición continua, supóngase que además de la acumulación de interés pueden hacerse depósitos o retiros. Si se supone que los depósitos o retiros» se efectúan con una cuota constante k, entonces la (10) se sustituye por

$$dS/dt = Rs + k, \tag{15}$$

En donde k es positiva para los depósitos y negativa para los retiros.

La solución general de la (15) es

$$S(t) = ce^{rt} - (k/r),$$

En donde c es una constante arbitraria. Para satisfacer la condición inicial (11) debe elegirse $c = S_0 + (k/r)$. Por tanto, la solución del problema con valor inicial (15), (11) es

$$S(t) = S_0e^{rt} + (k/r)(e^{rt} - 1). \tag{16}$$

El primer término de la expresión (16) es la parte de $S(t)$ debida al interés pagado sobre la cantidad inicial S_0, mientras que el segundo es la parte debida a la cuota de depósito o retiro k.

Lo atractivo de plantear el problema de esta manera general, sin valores específicos de S_0, r o k, reside en la generalidad de la fórmula resultante (16) para $S(t)$. Con esta fórmula es fácil comparar los resultados de diferentes programas de inversión o tasas de interés.

Por ejemplo, supóngase que se abre una cuenta individual de retiro (CIR) a la edad de 25 años, con una inversión inicial de \$ 2000 y que, a partir de ese momento se efectúan depósitos anuales de \$2 000, de manera continua. Si se supone una tasa de interés del 8%, ¿cuál será el balance de la CIR a la edad de 65 años? Se tiene $S_0 = \$2000$, $r = 0.08$ y $k = \$2000$, y se desea determinar $S(40)$. Con base en la ecuación (16), se tiene

$$S(40) = (2000)e^{3.2} + (25\,000)(e^{3.2} - 1)$$

$$= \$49\,065 + \$588\,313 = 637\,378$$

Es interesante observar que la cantidad total invertida es de \$ 82 000, de modo que la cantidad restante de \$555 378 resulta del interés acumulado. (1)

Ejemplo 3.

Mezclas En el instante $t = 0$, un tanque contiene $Q_0\ lb$ de sal disueltas en 100 gal de agua; ver la figura 1.6.1. Supóngase que al tanque está entrando agua que contiene ¼ lb de sal*galón, a razón de 3 gal/min, y que la solución bien revuelta está saliendo del tanque con la misma rapidez. Encontrar una expresión para la cantidad de sal $Q(t)$ que hay en el tanque en el instante t.

La razón de cambio de la sal en el tanque, en el instante $t, Q'(t)$, debe ser igual a la razón a la que la sal entra al tanque menos la razón a la que sale. La razón a la que la sal entra es ¼ lb/gal multiplicado por 3 gal/min. La razón a la que la sal sale es $(Q(t)/100)\ lb/gal$ multiplicado por 3 gal/min; por tanto,

$$Q'(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{100}Q(t) \tag{17}$$

Es la ecuación diferencial que rige este proceso. La ecuación (17) es lineal y su solución general es

$$Q(t) = 25 + ce^{-0.03t}, \tag{18}$$

En donde c es arbitraria. A fin de satisfacer la condición inicial

$$Q(0) = Q_0 \tag{19}$$

Debe tomarse $c = Q_0 - 25$; de donde,

$$Q(t) = 25(1 - e^{-003t}) + Qe^{-0.02t} \tag{20}$$

El segundo término del segundo miembro de (20) representa la porción de la sal original que resta en el tanque en el instante t. Este término se hace muy pequeño con el transcurso del tiempo, a medida que la solución original se extrae del tanque.

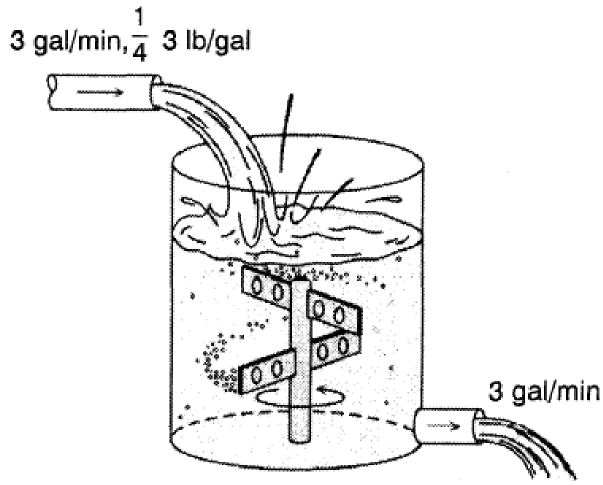


Figura 1.6.1 Tanque de agua del ejemplo 3.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 56.

El primer término del segundo miembro de (20) da la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante t debido a la acción de los procesos de flujo. A medida que t crece, este término tiende al valor constante de 25 (libras). (1)

Ejemplo 4.

Determinación del momento de la muerte[1] En la investigación de un homicidio o una muerte accidental, a menudo es importante estimar el momento de la muerte. A continuación se describe un método matemático para enfocar este problema.

A partir de observaciones experimentales se sabe que, con una exactitud satisfactoria en muchas circunstancias, la temperatura superficial de un objeto cambia con una razón proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la de su entorno (temperatura ambiente). Esto se conoce como ley de Newton del enfriamiento. Por tanto, si $\theta(t)$ es la temperatura del objeto en el instante t y T es la temperatura ambiente constante, entonces θ debe satisfacer la ecuación diferencial lineal

$$d\theta/dt = -k(\theta - T) \tag{21}$$

[1] Consúltese la obra de J. F. Hurley, "An Application of Newton's Law of Cooling", Mathematics Teacher 67 (1974), pp. 141-142 y la de David A. Smith, "The Homicide Problem Revisited", The Two Year College Mathematics Journal 9 (1978), pp. 141-145.

En donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad. El signo negativo de la ecuación (21) se debe al hecho de que si el objeto está más caliente que su entorno $(\theta > T)$, entonces se enfriará con el tiempo. De donde, $d\theta/dt < 0$ cuando $\theta - T > 0$.

Supóngase ahora que en el instante $t = 0$ se descubre un cadáver y que su temperatura es θ_0. Se supone que en el instante del fallecimiento t_d la temperatura del cuerpo θ_d tenía el valor normal de 98.6°F, o sea 37°C. Si se supone que la ecuación (21) es válida en esta situación, entonces la tarea es determinar t_d.
La solución de la ecuación (21) sujeta a la condición inicial $\theta(0) = \theta_0$ es

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{-kt} \tag{22}$$

Sin embargo, la razón de enfriamiento k que aparece en esta expresión hasta ahora desconocida. Es posible determinar k al hacer una segunda medición de la temperatura del cuerpo en algún instante posterior t_1; supóngase que $\theta = \theta_1$ cuando $t = t_1$. Al sustituir estos valores en (22) se encuentra que

$$\theta_1 - T = (\theta_0 - T)e\hat{} - kt_1$$

Por lo cual

$$k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T} \tag{23}$$

En donde θ_0, θ_1, T y t_1 son cantidades conocidas.

Por último, para determinar t_d se sustituye $t = t_d$ y $\theta = \theta_d$ en la ecuación (22) y luego se despeja t_d; se obtiene

$$t_d = -\frac{1}{k}\ln\frac{\theta_d - T}{\theta_0 - T} \tag{24}$$

En donde k está dada por la ecuación (23).

Por ejemplo, supóngase que la temperatura del cadáver es de 85°F cuando es descubierto, que dos hora más tarde su temperatura es de 74°F y que la temperatura ambiente es de 6 8 °F, entonces, por la ecuación (23),

$$k = -\frac{1}{2}\ln\frac{74 - 68}{85 - 68} \approx 0.5207\ h$$

Y por la (24),

$$t_d = -\frac{1}{0.5207}\ln\frac{98.6-68}{85-68} \approx 1.129\ h$$

De donde se concluye que el cuerpo se descubrió aproximadamente 1 hr. 8 min. Después del fallecimiento. (1)

Problemas

1. El isótopo radiactivo plutonio 241 decae de forma que se satisface la ecuación diferencial
$$dQ/dt = -0.0525Q$$
En donde Q se mide en miligramos y t en años.
   a. Determine la vida media τ del plutonio 241.
   b. Si en este momento se cuenta con 50 mg de plutonio, ¿cuánto quedará en 10 años?
2. El einstenio 253 decae con una rapidez proporcional a la cantidad que se tenga. Determine la vida media τ si este material pierde un tercio de su masa en 11.7 días.
3. El radio 226 tiene una vida media de 1620 años. Encuéntrese el periodo en el que un cuerpo de este material se reduce a tres cuartas partes de su tamaño original.
4. Suponga que inicialmente se encuentran 100 mg de torio 234 en un recipiente cerrado y que a éste se le agrega torio 234 con una rapidez constante de 1 mg/día.
   a. Halle la cantidad $Q(t)$ de torio 234 que hay en el recipiente en cualquier instante. Recuerde que, en el ejemplo 1, se encontró la razón de decaimiento para el torio 234.
   b. Halle la cantidad límite Q_1 de torio 234 que existiría en el recipiente cuando $t \to \infty$.
   c. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir antes de que la cantidad de torio 234 en el recipiente disminuya hasta ser 0.5 mg como máximo más del valor límite Q_1?
   d. Si al recipiente se le agrega torio 234 con una rapidez de k mg/día, encuentre el valor de k que se requiere a fin de mantener un nivel constante de 100 mg de torio 234.
5. **Determinación de fechas por radiocarbono**. Un instrumento importante en la investigación arqueológica es la determinación de fechas por radiocarbono, que es un medio para determinar la antigüedad de ciertos restos de madera y plantas y, por tanto, de huesos humanos o de animales o artefactos encontrados a la misma profundidad. El procedimiento fue desarrollado por el químico estadounidense Willard Libby (1908-1980) a principios de la década de 1950, por lo que fue galardonado con el

Premio Nobel de Química en 1960. La determinación de fechas por radiocarbono se basa en el hecho de que algunos restos de madera o plantas, siguen conteniendo cantidades residuales de carbono 14, un isótopo radiactivo del carbono. Este isótopo se acumula durante la vida de la planta y comienza a decaer a la muerte de ésta. Como la vida media del carbono 14 es larga (aproximadamente de 5.568 años[2]), después de muchos miles de años permanecen cantidades mensurables de carbono 14. Libby demostró que si incluso está presente una diminuta fracción de la cantidad original de carbono 14, entonces por medio de mediciones adecuadas de laboratorio puede determinarse con exactitud la proporción de la cantidad original de carbono 14 que resta. En otras palabras, si $Q(t)$ es la cantidad de carbono 14 en el instante t y Q_0 es la cantidad original, entonces puede determinarse la razón $Q(t)/Q_0$, por lo menos si esta cantidad no es demasiado pequeña. Las técnicas de medición actuales permiten la aplicación de este método para periodos de hasta alrededor de 100.000 años, después de los cuales la cantidad de carbono 14 restante es de sólo poco más o menos $4\ x\ 10^{-6}$ de la cantidad original.

a) Si supone que Q satisface la ecuación diferencial $Q' = -rQ$, determinar la constante de decaimiento r para el carbono 14.
b) Halle una expresión para $Q(t)$ en cualquier instante t, si $Q(0) = Q_0$.
c) Suponga que se descubren ciertos restos en los que la cantidad residual presente de carbono 14 es el 20% de la cantidad original. Determine la antigüedad de estos restos.

6. Suponga que se deposita una suma S_0 en un banco que paga interés a una tasa anual r, compuesto continuamente.
   a. Halle el tiempo T necesario para duplicar el valor de la suma original, como una función de la tasa de interés r.
   b. Determine T si $r = 7\%$.
   c. Encuentre la tasa de interés que debe pagarse si la inversión inicial tiene que duplicarse en ocho años.
7. Una persona joven sin capital inicial invierte k dólares anuales a una tasa de interés anual r. Suponga que las inversiones se hacen continuamente y que el interés también se compone de manera continua.
   a. Determine la suma $S(t)$ acumulada en cualquier instante t.
   b. Si $r = 7.5\%$, determine k de modo que se disponga para su retiro de un millón de dólares en 40 años.

[2] La vida media internacionalmente aceptada del carbono 14 es 5568± 30 años, según se indica en la McGraw-HillEncyclopedia of Science and Technology (5a ed.) (New York: McGraw-Hill, 1982), Yol. 11, pp. 328-335.

c. Si $k = \$2000$ anuales, determine la tasa de interés r que debe obtenerse a fin de contar con un millón de dólares disponibles en 40 años.
Sugerencia: Aplique el método de Newton o algún otro procedimiento numérico apropiado en el inciso c).

8. El efecto de un pequeño cambio en la tasa de interés puede ser sustancial para un plazo largo de inversión. Confirme lo anterior al calcular el resultado del programa de inversión CIR del ejemplo 2 si a) $r = 7.5\%$; b) $r = 9\%$.
9. Una persona solicita un préstamo de \$8.000 para comprar un automóvil. El prestamista carga el interés a una tasa anual del 10%. Si se supone que el interés se compone de manera continua y que el deudor efectúa pagos continuamente con una cuota anual constante k, determine la cuota de pago k necesaria para cubrir el adeudo en tres años. Determine también cuánto interés se paga durante el periodo de tres años.
10. El comprador de una casa no puede pagar más de \$800 mensuales por la hipoteca. Suponga que la tasa de interés es de 9% y que el término de la hipoteca es de 20 años. Suponga que el interés se compone continuamente y que también los pagos se hacen en la misma forma.
    a. Determine la cantidad máxima que este comprador puede solicitar en préstamo.
    b. Determine el interés total que se paga durante el término de la hipoteca.
11. ¿Cómo varían las respuestas del problema 10 si el término de la hipoteca es de 30 años?
12. Un jubilado tiene invertida una suma $S(t)$ de modo que obtenga interés a una tasa anual r, compuesto continuamente. Los retiros para sus gastos se hacen a razón de k dólares anuales; suponga que los retiros se hacen continuamente.
    a. Si el valor inicial de la inversión es S_0, determínese $S(t)$ en cualquier momento.
    b. Si se supone que S_0 y r son fijos, determine la cuota de retiro k_0 a la que $S(t)$ permanecerá constante.
    c. Si k sobrepasa el valor k_0 hallado en el inciso b), entonces $S(t)$ disminuirá y, finalmente, será cero. Encuentre el tiempo T en el que $S(t) = 0$.
    d. Determine T si $r = 8\%$ y $k = 2k_0$.
    e. Suponga que una persona que se jubila con un capital S_0 desea retirar fondos a una cuota anual k por no más de T años. Determine la cuota máxima posible de retiro.
13. Suponga que la población de la Tierra cambia con una rapidez proporcional a la población actual. (En la sección 1.7 se considera una hipótesis más exacta referente al crecimiento de la población.) Además, se estima que en el instante $t = 0$ (1650 de nuestra era), la población de la Tierra era de 600 millones ($6.0\ x\ 10^8$); en el instante $t = 300$ (1950 D.C.), la población era de 2.8 miles de millones ($2.8\ x\ 10^9$). Encuentre una expresión que dé la población de la Tierra en cualquier instante. Si se

supone que la población máxima que la Tierra puede sostener es de 25 miles de millones ($2.5\ x\ 10^{10}$), ¿cuándo se alcanzará este límite?

14. Suponga que la temperatura de una taza de café obedece la ley de Newton del enfriamiento. Si el café tiene una temperatura de 200°F cuando acaba de servirse y un minuto después se ha enfriado hasta 190°F en un recinto cuya temperatura es de 70°F, determine cuándo el café alcanza una temperatura de 150°F.
15. Encuentre el intervalo entre el momento de la muerte y el instante en que se descubre un cadáver, si las circunstancias son las mismas que las del ejemplo 4, excepto que la temperatura ambiente es de 32°F.
16. Suponga que, a medianoche, se descubre un cuerpo con una temperatura de 85°F, y que la temperatura ambiente es constante de 70°F. El cuerpo se envía rápidamente (suponga que instantáneamente) a la morgue, en donde la temperatura ambiente se mantiene a 40°F. Al cabo de una hora se encuentra que la temperatura del cuerpo es de 60°F. Estime el momento de la muerte.
17. Suponga que una gota de lluvia esférica se evapora con una rapidez proporcional a su área superficial. Si originalmente su radio mide 3 mm y media hora después se ha reducido hasta 2 mm, encuentre una expresión para calcular el radio de la gota de lluvia en cualquier instante.
18. Inicialmente un tanque contiene 120 litros de agua pura. Al tanque entra a razón de 2 litros/min, una mezcla que contiene una concentración de γg/litro de sal y la mezcla bien revuelta sale del tanque a la misma razón. Encuentre una expresión en términos de γ para la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante t. Halle también la cantidad límite de sal en el tanque $t \to \infty$.
19. Considere un tanque usado en ciertos experimentos de hidrodinámica. Después de realizar un experimento, el tanque contiene 200 litros de una solución de colorante con una concentración de 1 g/litro. A fin de preparar el siguiente experimento, el tanque debe lavarse con agua limpia que fluye a razón de 2 litros/min y la solución bien revuelta sale a la misma razón. Halle el tiempo que transcurrirá antes de que la concentración de colorante en el tanque alcance el 1% de su valor original.
20. Un tanque contiene originalmente 100 gal de agua limpia; a continuación se vierte en el tanque agua que contiene ½ Lb de sal por galón, a razón de 2 gal/min y se deja que la mezcla abandone el tanque a la misma razón. Al cabo de 10 minutos se detiene el proceso y se introduce al tanque agua limpia a razón de 2 gal/min y nuevamente se deja que la mezcla abandone el tanque a la misma razón. Encuentre la cantidad de sal en el tanque al cabo de 20 minutos.

1.7 Dinámica de poblaciones y algunos problemas relacionados

En varias aplicaciones, que van desde la medicina hasta la ecología y hasta por la economía global, resulta conveniente predecir el crecimiento o descenso de la población de una especie dada. En diferentes situaciones puede haber interés en una población de bacterias, insectos, mamíferos o incluso de personas. El propósito principal de esta sección es mostrar cómo es posible aplicar métodos geométricos para obtener información cualitativa importante directamente de la ecuación diferencial, sin resolverla. Esto lleva de inmediato a los muy importantes conceptos de estabilidad e inestabilidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Crecimiento exponencial. Sea $N(t)$ la población de la especie dada en el instante t. La hipótesis más simple referente a la variación de $N(t)$ es que la razón de cambio de N es proporcional[3] al valor actual de N, es decir,

$$dN/dt = rN \tag{1}$$

En dónde r es la constante de proporcionalidad. La constante r se denomina razón de crecimiento o disminución, dependiendo de si es positiva o negativa. Si $r < 0$, entonces el problema matemático es el mismo que el correspondiente al decaimiento radiactivo que se analizó en la sección 1.6. Aquí se supone que $r > 0$, de modo que la población está creciendo.

Al resolver la ecuación (1) sujeta a la condición inicial

$$N(0) = N_0 \tag{2}$$

Se obtiene

$$N(t) = N_0 e^{rt} \tag{3}$$

[3] Aparentemente fue el economista británico Tomas Malthus (1766 -1834) quien primero observó que muchas poblaciones biológicas crecen a una razón proporcional a la población. Su primer artículo sobre poblaciones apareció en 1798.

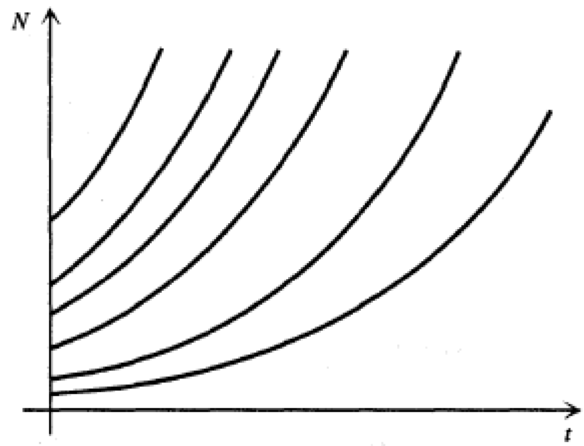


Figura 1.7.1 Crecimiento exponencial: N contra t para $dN/dt = rN$.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 72.

Por tanto, el modelo matemático que consta del problema con valor inicial (1), (2) con $r > 0$ predice que la población crecerá exponencialmente durante todo el tiempo, como se muestra en la figura 1.7.1. En condiciones ideales, se ha observado que la (3) es razonablemente exacta para muchas poblaciones, al menos para periodos limitados. Sin embargo, resulta evidente que estas condiciones ideales no pueden continuar de manera indefinida; llega el momento en que las limitaciones de espacio, abastecimiento de alimentos u otros recursos reducen el índice de crecimiento y hacen que termine el crecimiento exponencial no inhibido. (1)

Crecimiento logístico. Para tomar en cuenta el hecho de que la tasa de crecimiento en realidad depende de la población, en la ecuación (1) se reemplaza la constante r por una función $f(N)$, con lo que se obtiene la ecuación modificada

$$dN/dt = f(N)N. \tag{4}$$

Ahora se desea elegir $f(N)$ de modo que $f(N) \cong r > 0$ cuando N sea pequeño, $f(N)$ decrezca cuando N aumenta, y $f(N) < 0$ cuando N sea suficientemente grande. La función más sencilla que tiene estas propiedades es $f(N) = r - aN$, en donde a también es una constante positiva. Si se usa esta función en la (4), se obtiene

$$dN/dt = (r - aN)N. \tag{5}$$

La ecuación (5) se conoce como ecuación de Verhulst[4] o ecuación **logística**. A menudo resulta conveniente escribir la ecuación logística en la forma equivalente

---

[4] P. F. Verhulst (1804-1849) fue un matemático belga que introdujo la ecuación (5) como modelo para el crecimiento de la población humana, en 1838; lo mencionó como crecimiento logístico, por lo cual (5) a menudo se le denomina ecuación logística. No pudo probar la exactitud de su modelo debido a los datos inadecuados de censo, y no se le prestó mucha atención hasta muchos años después. R. Pearl (1930) demostró que existía una concordancia razonable con los

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N \tag{6}$$

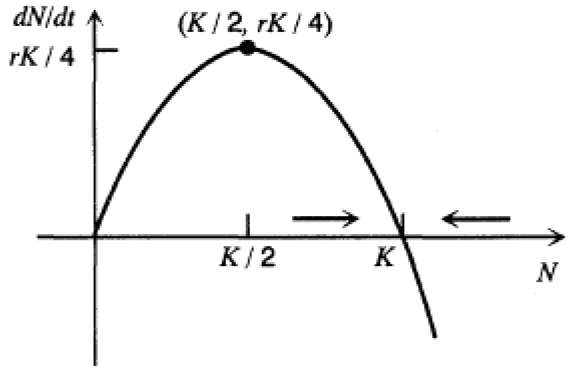


Figura 1.7.2 dN/dt contra N para $dN/dt = r(1 - N/K)N$.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 72.

En donde $K = r/a$. La constante r se denomina razón de crecimiento intrínseco, es decir, la razón de crecimiento en ausencia de todo factor limitante. Un poco más adelante se aclarará la interpretación de K.

La solución de la ecuación logística (6) puede encontrarse fácilmente por el método de separación de variables[5], y la solución se obtendrá un poco después. Sin embargo, ahora se mostrará que al aplicar un razonamiento geométrico es posible descubrir directamente las características principales de la solución a partir de la propia ecuación diferencial sin resolverla. Esto es importante porque a menudo pueden aplicarse los mismos métodos en ecuaciones más complicadas, cuyas soluciones son más difíciles de obtener.

En la figura 1.7.2 se muestra la gráfica de dN/dt contra N, en donde dN/dt está dada por el segundo miembro de la ecuación (6). La gráfica es una parábola que se intersecta con el eje N en $(0,0)$ y $(k,0)$, y con vértice en $(k/2, rk/4)$. Para $0 < N < K$ se ve que $dN/dt > 0$ y, por lo tanto N es una función creciente de t; esto se indica por la flecha que apunta hacia la derecha cerca del eje N. De manera semejante, si $N > K$, entonces $dN/dt < 0$; de donde, $N(t)$ es decreciente, como se indica por la flecha que apunta hacia la izquierda. Si $N = 0$ o $N = K$, entonces $dN/dt = 0$ y $N(t)$ no cambia. Las soluciones constantes $N = \phi_1(t) = 0$ y $N = \phi_2(t) = K$ **soluciones de equilibrio**; a las cuales corresponden los puntos $N = 0$ y $N = K$ del eje N que se denominan **puntos de equilibrio** o **puntos críticos**.

datos experimentales para las poblaciones de Drosophila melanogaster (mosca de la fruta), así como G. F. Gause (1935) para poblaciones de Paramecium y Tribolium (escarabajos de la harina).

[5] La ecuación logística también es una ecuación de Bernoulli.

A continuación se desea trazar las gráficas de las soluciones $N(t)$ contra t para $t > 0$, $N > 0$ y para diferentes valores iniciales $N(0)$. Con este fin resulta útil conocer la relación entre las propiedades de la gráfica de dN/dt contra N y las de la gráfica de N contra t para cualquier ecuación de la forma

$$dN/dt = F(N)$$

En la tabla 1.7.1 se resume esta información. La explicación de las entradas de la tabla 1.7.1 es la siguiente: la gráfica de $N(t)$ contra t es creciente o decreciente, dependiendo de si dN/dt es positiva o negativa. Para investigar la concavidad, nótese que si dN/dt es positiva, entonces N y t crecen o decrecen simultáneamente. Por consiguiente, si dN/dt es positiva y creciente como función de N, entonces también es creciente como función de t, y la gráfica de N contra t es cóncava hacia arriba. De manera semejante, si dN/dt es positiva y decreciente, entonces la gráfica de N contra t es cóncava hacia abajo. (1)

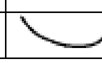
Si dN/dt [o $F(N)$] es	entonces	$N(t)$ es	
Positiva y creciente		Creciente y cóncava hacia arriba	
Positiva y decreciente		Creciente y cóncava hacia abajo	
Negativa y creciente		Decreciente y cóncava hacia abajo	
Negativa y decreciente		Decreciente y cóncava hacia arriba	

Tabla 2 Relación entre las gráficas de dN/dt contra N y de N contra t, respectivamente.

La situación se invierte si dN/dt es negativa, porque entonces N decrece cuando t crece y viceversa. Por lo tanto si dN/dt es negativa y creciente como función de N, entonces es decreciente como función de t y la gráfica de N contra t es cóncava hacia abajo. De manera semejante, si dN/dt es negativa y decreciente, entonces la gráfica de N contra t es cóncava hacia arriba.

Estos resultados significan que las gráficas de las soluciones de la ecuación (6) deben tener la forma general que se indica en la figura 1.7.3, sin importar los valores de r y K. Las rectas horizontales son las soluciones de equilibrio $\phi_1(t) = 0$ y $\phi_2(t) = K$.

En la figura 1.7.2 se nota que dN/dt es positiva y creciente para $0 < N < \mathrm{K}/2$, de modo que allí, la gráfica de $N(t)$ es creciente y cóncava hacia arriba. De modo semejante, dN/dt es positiva y decreciente para $K/2 < N < K$, de modo que, en este intervalo, la gráfica de $N(t)$ es creciente y cóncava hacia abajo. Por tanto, las soluciones que se inician por debajo de $K/2$ tienen la forma de S o carácter sigmoide que se muestra en la figura 1.7.3. Por otra parte, para $N > K$, dN/dt es negativa y decreciente, de modo que, para estos valores de N, la gráfica de $N(t)$ es decreciente y cóncava hacia arriba.

Por último, recuérdese que el teorema 1.5.1, el teorema fundamental de existencia y unicidad, garantiza que dos soluciones distintas jamás pasan por el mismo punto. De donde, aunque las soluciones tienden a la solución de equilibrio $N = K$ cuando $t \to \infty$, no alcanzan este valor en ningún tiempo finito. Dado que K es la cota superior a la que se tiende, pero que no se sobrepasa, al crecer las poblaciones que se inician por debajo de este valor, es natural referirse a K como el **nivel de saturación**, o como la **capacidad cinegética del ambiente**, para la especie dada. (1)

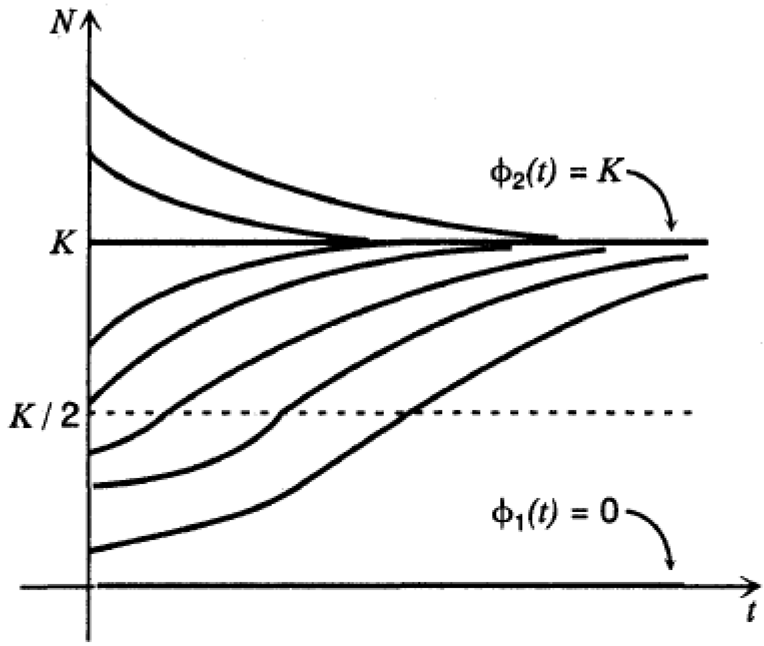


Figura 1.7.3 Crecimiento logístico: N contra t para $dN/dt = r(1 - N/K)N$.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 74.

Una comparación de las figuras 1.7.1 y 1.7.3 revela que las soluciones de la ecuación no lineal (6) son sorprendentemente diferentes de las de la ecuación (1), al menos para grandes valores de t. A pesar del valor de K, es decir, sin importar cuán pequeño sea el término no lineal de (6), sus soluciones tienden a un valor finito cuando $t \to \infty$, mientras que las soluciones de (1) crecen (exponencialmente) sin cota cuando $t \to \infty$. Por tanto, incluso un término no lineal diminuto en la ecuación diferencial tiene un efecto decisivo en la solución, para t grande.

En muchas situaciones basta con tener la información cualitativa acerca de la solución $N(t)$ de la ecuación (6) que se muestra en la figura 1.7.3. Se recalca que esta información se obtuvo por completo a partir de la gráfica de dN/dt contra N y sin resolver la ecuación diferencial (6). Sin embargo, si se desea tener una descripción más detallada del crecimiento logístico -por ejemplo, si se desea conocer al valor de la población en algún instante especifico- es necesario resolver la ecuación (6) sujeta a la condición inicial (2). En el supuesto de que $N \neq 0$ y $N \neq K$ (6) puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{1}{N} + \frac{1/K}{1 - N/K}\right) dN = r\,dt.$$

Al aplicar un desarrollo en fracciones parciales en el primer miembro, se tiene

$$\frac{dN}{(1 - N/K)N} = r\,dt.$$

Luego, al integrar ambos miembros se obtiene

$$\ln|N| - \ln\left|1 - \frac{N}{k}\right| = rt + c \qquad (7)$$

En donde c es una constante arbitraria de integración que debe determinarse con base en la condición inicial $N(0) = N_0$. Ya se hizo notar que si $0 < N_0 < K$, entonces $N(t)$ permanece en este intervalo todo el tiempo. Por consiguiente, en este caso es posible eliminar las barras de valor absoluto en la (7) y, al tomar la exponencial de ambos miembros, se encuentra que

$$\frac{N}{1 - (N/K)} = Ce^{rt}$$

$$\frac{N}{1 - (N/K)} = Ce^{rt}$$

En donde $C = e^c$. Para satisfacer la condición inicial $N(0) = N_0$, es necesario elegir $C = N_0/[1 - (N/K)]$. Si se usa este valor de C en (8) y se despeja N, se obtiene

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \qquad (9)$$

La solución (9) se obtuvo a partir de la hipótesis de que $0 < N_0 < K$. Si NQ > K, entonces los detalles para tratar la ecuación (7) difieren sólo un poco, y se deja al estudiante que demuestre que la (9) también es válida en este caso. Por último, nótese que (9) también contiene las soluciones de equilibrio $N = \phi_1(t) = 0$ y $N = \phi_2(t) = K$ correspondientes a las condiciones iniciales $N_0 = 0$ y $N_0 = K$, respectivamente.

Todas las conclusiones cualitativas a las que se llegó antes mediante un razonamiento geométrico pueden confirmarse al examinar la solución (9). En particular, si $N_0 = 0$, entonces la (9) requiere que $N(t) \equiv 0$ para toda t. Si $N_0 > 0$ y si en la (9) se hace $t \to \infty$, entonces se obtiene

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = N_0K/N_0 = K$$

Por tanto, para cada $N_0 > 0$ la solución tiende asintóticamente a la solución de equilibrio $N = \phi_2(t) = K$ (de hecho, lo hace exponencialmente) cuando $t \to \infty$. De donde, se dice que la solución constante $\phi_2(t) = K$ es una **solución asintóticamente estable** de la ecuación (6), o que el punto $N = K$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable o punto crítico. Esto significa que después de un tiempo largo la población está próxima al nivel de saturación K, sin importar el tamaño inicial de la población, en tanto sea positivo. (1)

Ejemplo 1.

Se ha aplicado el modelo logístico al crecimiento natural de la población de hipoglosos en II ciertas regiones del Océano Pacífico[6]. Sea $N(t)$, medida en kilogramos, la masa total, o biomasa, de la población de hipoglosos en el instante t. Se estima que los parámetros de la ecuación logística tienen los valores $r = 0.71/año$ y $K = 80.5x106\,kg$. Si la biomasa inicial es $N_0 =\ 0.25K$, encontrar la biomasa dos años después. También, hallar el tiempo τ para el que $N(\tau) = 0.15K$.

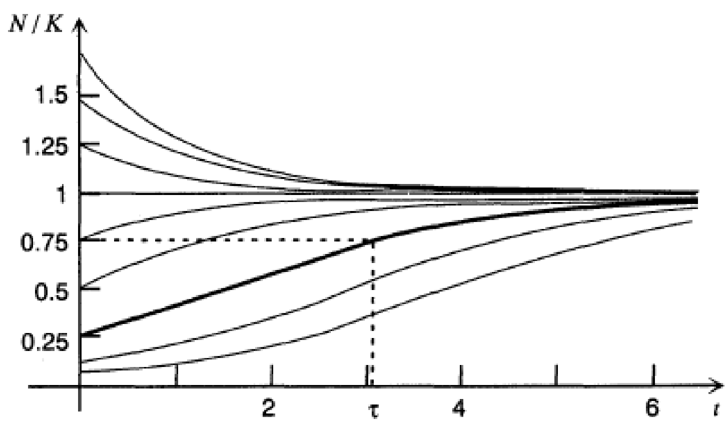


Figura 1.7.4 N/K contra t para el modelo de población de hipoglosos en el Océano Pacífico.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 74.

---

[6] Una buena fuente de información sobre la dinámica de las poblaciones y los aspectos económicos relativos al I hacer un uso eficiente de un recurso renovable, con especial atención a la pesca, es el libro de Clark (ver la bibliografía al final). Los valores de los parámetros que se usan en este ejemplo se dan en la página 48 de este libro y fueron obtenidos como resultado de un estudio efectuado por M. S. Mohring.

Es conveniente reducir la solución (9) a escala de la capacidad de portación K; por tanto, la ecuación (9) se escribe en la forma

$$\frac{N(t)}{K} = \frac{N_0/K}{(N_0/K) + [1 - (N_0/K)]e^{-rt}} \tag{10}$$

Al usar los datos dados en el problema se encuentra que

$$\frac{N(2)}{K} = \frac{0.25}{0.25 + 0.75e^{-1.42}} \cong 0.5797.$$

Como consecuencia, $N(2) = 46.7 \; x \; 10^6 \; kg.$

Para hallar τ primero puede despejarse en la (10); se obtiene

$$e^{-rt} = \frac{(N_0/K)[1 - (N/K)]}{(N/K)[1 - (N_0/K)]};$$

De donde,

$$t = -\frac{1}{r}\ln\frac{(N_0/K)[1 - (N/K)]}{(N/K)[1 - (N_0/K)]} \tag{11}$$

Al usar los valores dados de r y N_0/K y hacer $N/K = 0.75$, se encuentra que

$$\tau = -\frac{1}{0.71}\ln\frac{(0.25)(0,25)}{(0.75)(0.75)} = \frac{1}{0.71}\ln 9 \cong 3.095 \; años.$$

En la figura 1.7.4 se muestran las gráficas de $N(t)$ contra t para los valores dados de los parámetros y para varias condiciones iniciales.

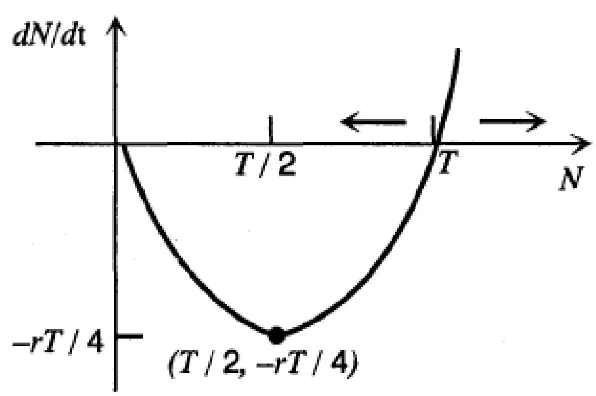


Figura 1.7.5 dN/dt contra N para $dN/dt = -r(1 - N/T)N$.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 78.

Un umbral crítico. Considérese ahora la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = -r\left(1 - \frac{N}{T}\right)N \tag{12}$$

En donde r y T son constantes positivas dadas. Obsérvese que (excepto por la sustitución del parámetro K por T), esta ecuación sólo difiere de la ecuación logística (6) por la presencia del signo negativo en el segundo miembro. Sin embargo, como se verá, las soluciones de la ecuación (12) se comportan de manera muy diferente a las de la (6).

Para la ecuación (12), la gráfica de dN/dt contra N es la parábola que se muestra en la figura 1.7.5. Las intersecciones con el eje N son los puntos críticos $N = 0$ y $N = T$, correspondientes a las soluciones de equilibrio $\phi_1(t) = 0$ y $\phi_2(t) = T$. Si $0 < N < T$, entonces $dN/dt < 0$ y $N(t)$ decrece cuando t aumenta. Por otra parte, si $N > T$, entonces $dN/dt > 0$ y $N(t)$ crece cuando t aumenta. Por tanto, $\phi_1(t) = 0$ es una solución de equilibrio asintóticamente estable $\phi_2(t) = T$ es inestable. Además, dN/dt es decreciente para $0 < N < T/2$ y creciente para $T/2 < N < T$, de modo que la gráfica de $N(t)$ es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, respectivamente, en estos intervalos (ver la tabla 1.7.1). Asimismo, dN/dt es creciente para $N > T$, de modo que la gráfica de $N(t)$ también es cóncava hacia arriba allí. Al usar toda la información obtenida de la figura 1.7.5, se concluye que las gráficas de las soluciones de la ecuación (12), para valores diferentes de N_0, deben tener la apariencia cualitativa que se muestra en la figura 1.7.6. Con base en esta figura resulta evidente que cuando el tiempo crece, $N(t)$ tiende a cero o crece sin cota, dependiendo de si el valor inicial N_0 es menor o mayor que T. Por tanto, T es un nivel de umbral, por debajo del cual no ocurre crecimiento.

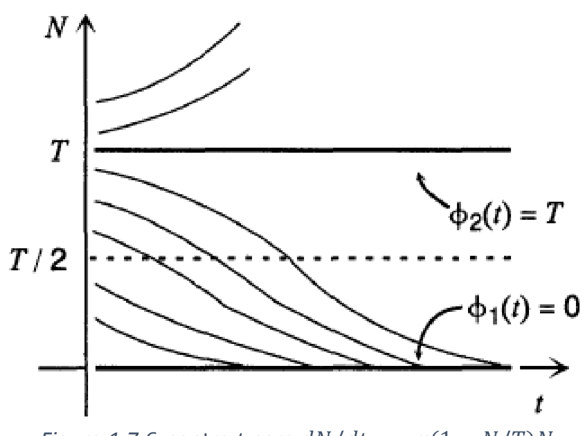


Figura 1.7.6 contra t para $dN/dt = -r(1 - N/T)N$

Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 78

Las conclusiones a las que se llega mediante razonamiento geométrico pueden confirmarse si se resuelve la ecuación diferencial (12). Esto puede hacerse al separar las variables e integrar, precisamente como se hizo para la ecuación (6). Sin embargo, si se nota que (12) puede obtenerse de (6) al sustituir K por T y r por $-r$, entonces es posible efectuar las mismas sustituciones en la solución (9) y obtener

$$N(t) = \frac{N_0 T}{N_0 + (T - N_0)e^{rt}} \tag{13}$$

Que es la solución de (12) sujeta a la condición inicial $N(0) = N_0$.

Si $N_0 < T$, entonces de la (13) se concluye que $N(t) \to 0$ cuanto $t \to \infty$. Esto concuerda con el análisis geométrico cualitativo. Si $N_0 > T$, entonces el denominador del segundo miembro de (13) es cero para cierto valor finito de t. Se denota este valor por $t*$ y se calcula a partir de

$$N_0 - (N_0 - T)e^{rt*} = 0,$$

Lo que da

$$t^* = \frac{1}{n} \ln \frac{N_0}{N_0 - T} \tag{14}$$

Por tanto, si la población inicial N_0, está por arriba del umbral T, entonces el modelo de umbral predice que la gráfica de $N(t)$ tiene una asíntota vertical en $t = t^*$; en otras palabras, la población se vuelve no acotada en un tiempo finito, que depende del valor inicial N_0 y del valor de umbral T. Con base en el análisis geométrico no resultaron evidentes la existencia ni la ubicación de esta asíntota, de modo que en este caso la solución explícita da lugar a importante información adicional cualitativa, así como cuantitativa.

Crecimiento logístico con un umbral. Como se mencionó en la última subsección, puede ser necesario modificar el modelo de umbral (12) de modo que no ocurra crecimiento no acotado cuando N esté arriba del umbral T. La manera más simple de lograrlo es con la introducción de otro factor que tendrá el efecto de hacer a dN/dt negativa cuando N es grande. Por tanto, se considera

$$\frac{dN}{dt} = -r\left(1 - \frac{N}{T}\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \tag{15}$$

En donde $r > 0$ y $0 < T < K$.

En la figura 1.7.7 se muestra la gráfica de dN/dt contra N. En este problema existen tres puntos críticos: $N = 0$, $N = T$ y $N = K$, correspondientes a las soluciones de equilibrio $\phi_1(t) = 0, \phi_2(t) = T$ y $\phi_3(t) = K$, respectivamente. Con base en la figura 1.7.7 es evidente que $dN/dt > 0$ para $T < N < K$ y, por consiguiente, $N(t)$ es creciente allí. La inversa es cierta para $N < T$ y para $N > K$. Como consecuencia, las soluciones de equilibrio $\phi_1(t)$ y $\phi_3(t)$ son estables y la solución $\phi_2(t)$ es inestable. Las gráficas de $N(t)$ contra t tienen el aspecto cualitativo que se muestra en la figura 1.7.8. Si N se inicia por debajo del umbral T, entonces N decrece hasta su extinción final. Por otra parte, si N se inicia por arriba de T, entonces $N(t)$ terminará por tender a la capacidad de portación K. Los puntos de inflexión de las gráficas de $N(t)$ contra t de la figura 1.7.8 corresponden a los puntos máximo y mínimo, N_1 y N_2, respectivamente, de la gráfica de dN/dt contra N de la figura 1.7.7. Estos valores pueden obtenerse al derivar con respecto a N el segundo miembro de la ecuación (15), igualar el resultado a cero y despejar N. Se obtiene

$$N_{1,2} = (K + T \pm \sqrt{K^2 - KT + T^2/3}, \tag{16}$$

En donde el signo positivo da lugar a N_1 y el signo negativo, a N_2 (1).

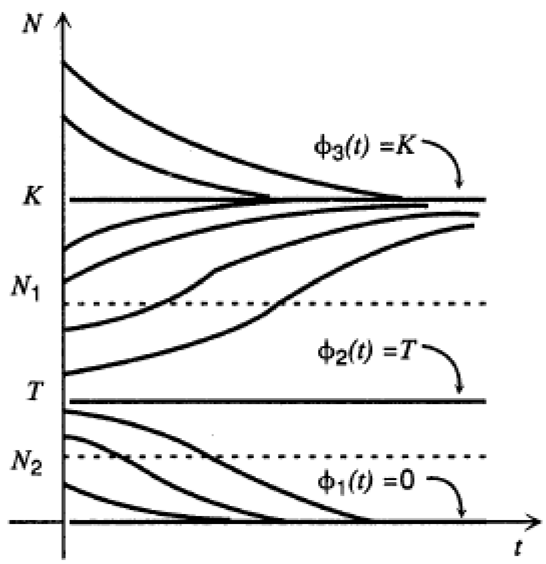


Figura 1.7.8 N contra t para $dN/dt = -r(1 - N/T)(1 - N/K)N$.

Fuente 1Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 80.

Problemas

En cada uno de los problemas del 1 al 6, trace la gráfica de dN/dt contra N; determine los puntos críticos (de equilibrio) y clasifique cada uno como estable o inestable.

1. $dN/dt = aN + bN^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad N_0 \geq 0$
2. $dN/dt = aN + bN^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad -\infty < N_0 < \infty$
3. $dN/dt = N(N-1)(N-2), \quad N_0 \geq 0$
4. $dN/dt = e^N - 1, \quad -\infty < N_0 < \infty$
5. $dN/dt = e^{-N} - 1, \quad -\infty < N_0 < \infty$
6. $dN/dt = -2(arctan\, N)/(1+N^2), \quad -\infty < N_0 < \infty$

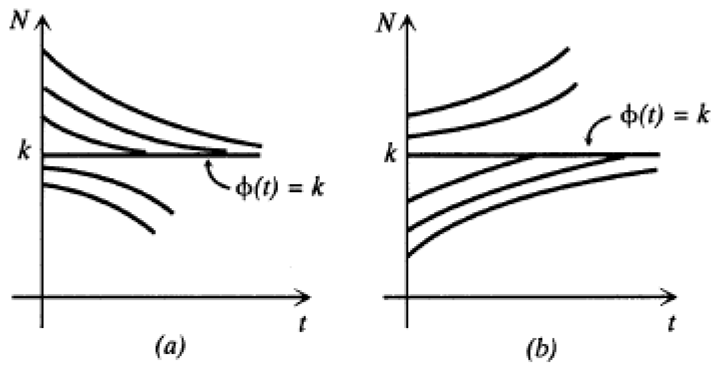


Figura 1.7.9 En los dos casos la solución de equilibrio $\phi(t) = k$ es semiestable. a) $dN/dt \leq 0$; b) $dN/dt \geq 0$.

7. **Soluciones de equilibrio semiestable**. Algunas veces una solución de equilibrio constante tiene la propiedad de que las soluciones que están hacia uno de los lados de la solución de equilibrio tienden hacia ésta, en tanto que las soluciones que se encuentran en el otro lado se alejan de ella (ver la figura 1.7.9); en este caso, se dice que la solución de equilibrio es **semiestable**.

   a) Considere la ecuación

$$dN/dt = k(1-N)^2, \tag{i}$$

   En donde k es una constante positiva. Demuestre que $N = 1$ es el único punto crítico, con la solución de equilibrio correspondiente $\phi(t) = 1$.

b) Trace la gráfica de dN/dt contra N. Demuestre que N es creciente como función de t, para $N < 1$ y también para $N > 1$. Por tanto, las soluciones que están debajo de la solución de equilibrio tienden a ésta, mientras que las que están arriba crecen alejándose de ella. De donde, $\phi(t) = 1$ es semiestable.

c) Resuelva la ecuación (i) sujeta a la condición inicial $N(0) = N_0$ y confirme las conclusiones a las que se llegó en el inciso b).

En cada uno de los problemas del 8 al 13, trace la gráfica de dN/dt contra N y determine los puntos críticos (de equilibrio). Clasifique también cada punto de equilibrio como estable, inestable o semiestable (ver el problema 7).

8. $dN/dt = k(N-1)^2, \quad k > 0, \quad -\infty < N_0 < \infty$
9. $dN/dt = N^2(N^2-1), \quad -\infty < N_0 < \infty$
10. $dN/dt = N(1-N^2), \quad -\infty < N_0 < \infty$
11. $dN/dt = aN - b\sqrt{N}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad N_0 \geq 0$
12. $dN/dt = N^2(4-N^2), \quad -\infty < N_0 < \infty$
13. $dN/dt = N^2(1-N)^2, \quad -\infty < N_0 < \infty$

Ejercicios propuestos para el primer taller

1. Resuelva la ecuación diferencial dada
   a. $y, = x^2/y(1-x^3)$
   b. $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$

2. Encuentre la solución del problema con valor inicial dado en forma explícita y determine (por lo menos aproximadamente) el intervalo en que está definida.
   a. $xdx + ye^{-x}dy = 0, \quad y(0) = 1$
   b. $y' = xy^3(1+x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$

3. resuelva el problema con valor inicial dado y determine de qué manera el intervalo en el que la solución existe depende del valor inicial y_0

$$y' = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$$

4. El radio 226 tiene una vida media de 1620 años. Encuéntrese el periodo en el que un cuerpo de este material se reduce a tres cuartas partes de su tamaño original.

Semana 5

Actividades

- Examen parcial número 1, sobre los temas de las semanas 1 a 4. El estudiante resolverá los ejercicios propuestos por el profesor.

Ejercicios propuestos para el primer parcial acumulativo

1. Resuelva la ecuación diferencial dada
   a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$
   b. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
   c. $y' + y^2\, sen\, x = 0$

2. Encuentre la solución del problema con valor inicial dado en forma explícita y determine (por lo menos aproximadamente) el intervalo en que está definida.
   a. $y' = 2(1 + x)(1 + y^2), \quad y(0) = 0$
   b. $sen\, 2x\, dx + \cos 3y\, dy = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/3$

3. El einstenio 253 decae con una rapidez proporcional a la cantidad que se tenga. Determine la vida media τ si este material pierde un tercio de su masa en 11.7 días.

4. Un tanque contiene originalmente 100 gal de agua limpia; a continuación se vierte en el tanque agua que contiene ½ Lb de sal por galón, a razón de 2 gal/min y se deja que la mezcla abandone el tanque a la misma razón. Al cabo de 10 minutos se detiene el proceso y se introduce al tanque agua limpia a razón de 2 gal/min y nuevamente se deja que la mezcla abandone el tanque a la misma razón. Encuentre la cantidad de sal en el tanque al cabo de 20 minutos.

5. trace la gráfica de dN/dt contra N; determine los puntos críticos (de equilibrio) y clasifique cada uno como estable o inestable.

$$dN/dt = N(N-1)(N-2), \quad N_0 \geq 0$$

Semana 6

Temas

- Algunos problemas de mecánica.
- Ecuaciones exactas y factores integrantes.
- Ecuaciones homogéneas.
- Problemas diversos y aplicaciones.

Objetivos

- Estudiar algunos problemas de mecánica.
- Entender las ecuaciones exactas y factor integrante.
- Conocer los conceptos generales de las ecuaciones homogéneas.
- Resolver problemas diversos de las ecuaciones lineales de primer orden.

Actividades

- Estudio y socialización de conceptos básicos de mecánica, ecuaciones exactas con factor integrante y ecuaciones homogéneas.
- Solución de ejercicios de mecánica, ecuaciones exactas con factor integrante y ecuaciones homogéneas.

Recursos

- **Videos**

1. **Título:** Factor integrante

   Descripción: Solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden mediante el uso de un factor integrante.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=55JoxoSa51Q

2. **Título:** EDO 03 Ecuacion Diferencial homogenea de primer orden UNIVERSIDAD unicoos.

   Descripción: Solución de ejercicio ecuación homogénea de primer orden.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=JnX0aAyPNSY

- **PDF**

1. **Título:** S04_C12.pdf

   Descripción: Teoría y ejemplos sobre las ecuaciones homogéneas de primer orden, métodos de solución.

   Link:http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/MetodosMatematicos2/2008B/S04_C12.pdf

- **Páginas Web**

1. **Título:** Ecuaciones exactas por factor integrante, lineales, Bernoulli.

   Descripción: Teoría de conceptos básicos y ejemplos de las ecuaciones exactas, criterios para que una ecuación sea exacta.

   Link: http://es.slideshare.net/lightknight07/ecuaciones-exactas-por-factor-integrantelinealesbernoulli

2. **Título:** Ecuaciones diferenciales exactas y por factor integrante

   Descripción: Conceptos básicos y ejemplos referentes a las ecuaciones exactas y por factor integrante.

   Link: http://es.slideshare.net/Flightshox/ecuaciones-diferenciales-exactas-7156745

- **Libros**

1. **Título:** Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición.

   Autor: William E. Boyce; Richard C. DiPrima

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre problemas de mecánica. Páginas 87 - 95.

   Problemas diversos y aplicaciones. Páginas 107 - 111.

2. **Título:** Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.

   Descripción: Conceptos básicos sobre ecuaciones exactas y factor integrante. Páginas 45 – 52.

   Autor: Dennis G. Zill.

1.8 Algunos problemas de mecánica

Algunas de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones diferenciales de primer orden se encuentran en el dominio de la mecánica elemental. En esta sección se considerarán algunos problemas en los que interviene el movimiento de un cuerpo rígido a lo largo de una recta. Se supondrá que estos cuerpos obedecen la ley de Newton del movimiento: el producto de la masa y la aceleración es igual a la fuerza externa. En símbolos,

$$F = ma, \tag{1}$$

En donde F es la fuerza externa, m es la masa del cuerpo y a es la aceleración en la dirección de F.

Hay tres sistemas de unidades que se usan comúnmente. En el sistema cgs, las unidades básicas son el centímetro (longitud), el gramo (masa) y el segundo (tiempo). La unidad de fuerza, la dina, se define mediante la ecuación (1) como la fuerza necesaria para impartir una aceleración de 1 cm/s^2 a una masa de 1 g. Como una dina es una fuerza muy pequeña, a menudo es preferible usar el sistema mks en el que las unidades básicas son el metro (longitud), el kilogramo (masa) y el segundo (tiempo). La unidad de fuerza, el newton (N), se define mediante la ecuación (1) como la fuerza necesaria para impartir una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de 1 kg. Por último, en el sistema inglés, o de ingeniería, las unidades básicas son el pie (longitud), la libra (fuerza) y el segundo (tiempo).

La unidad de masa, el slug, se define por la ecuación (1) como la masa a la que una fuerza de 1 lb le da una aceleración de 1 pie/s^2. Para comparar los tres sistemas, observe que 1 N es igual a 10^5 dinas y a 0.255 Ib.

Considérese ahora un cuerpo que cae libremente en un vacío y lo suficientemente cerca de la superficie terrestre, de modo que la única fuerza significativa que actúa sobre ese cuerpo es su peso debido al campo gravitacional de la Tierra. Entonces, la ecuación (1) toma la forma

$$w = mg \tag{2}$$

En donde w es el peso del cuerpo y g denota su aceleración debida a la gravedad. Aunque la masa del cuerpo permanezca constante, su peso y aceleración gravitacional cambian con la distancia al centro del campo gravitacional de la Tierra. Al nivel del mar, se ha determinado experimentalmente que el valor de g es 32 $pies/s^2$ (sistema inglés), 980 cm/s^2 (sistema cgs) o 9.8 m/s^2 (sistema mks). Se acostumbra denotar por g la aceleración gravitacional al nivel del mar, por tanto, g es una constante. Con esta aclaración, la ecuación (2) sólo es exacta al nivel del mar.

La expresión general para el peso de un cuerpo de masa m se obtiene a partir de la ley de Newton del cuadrado inverso de la atracción gravitacional. Si R es el radio de la Tierra y x es la altitud por encima del nivel del mar, entonces

$$w(x) = \frac{k}{(R+X)^2} \tag{3}$$

En donde K es una constante. En $x = 0$ (nivel del mar), $w = mg$; de donde, $K = mgR^2$ y

$$w(x) = \frac{mgR^2}{(R+x)^2} \tag{4}$$

Al desarrollar $(R\ +\ x)^{-2}$ en una serie de Taylor en torno a $x = 0$ se llega a

$$w(x) = mg\left(1 - 2\frac{x}{R} + \cdots\right) \tag{5}$$

Se concluye que si, en comparación con la unidad, se pueden despreciar los términos del orden de magnitud de x/R, entonces la ecuación (4) puede sustituirse por la aproximación más simple (2). Por tanto, para movimientos en la vecindad de la superficie terrestre, o en caso de que no se requiera una exactitud extrema, por lo general basta con utilizar la (2). En otros casos, como en los problemas relacionados con vuelos espaciales, puede ser necesario usar la (4) o por lo menos una mejor aproximación que la (2). (1)

Ejemplo 1.

Se deja caer desde el reposo un objeto de masa m en un medio que presenta una resistencia proporcional a v, la magnitud de la velocidad instantánea del objeto[7]. Si se supone que la fuerza gravitacional es constante, determinar la posición y la velocidad del objeto en cualquier instante t.

El peso mg del objeto actúa entonces en la dirección hacia abajo (positiva), pero la resistencia $k|v|$, en donde k es una constante positiva, actúa para impedir el movimiento. Si $v > 0$, la resistencia es en la dirección hacia arriba (negativa) y, por tanto, se expresa por $-kv$. Si $v <$

[7] En general, la resistencia es una función de la velocidad, es decir, de la magnitud de la velocidad. La hipótesis de una relación lineal es razonable solo para velocidades comparativamente bajas. Si se tienen velocidades mayores puede ser necesario suponer que la resistencia es proporcional a alguna potencia superior de v o incluso que se expresa por alguna función polinomial de $|v|$.

0, la resistencia actúa hacia abajo y todavía se expresa por $-kv$. Por tanto, en todos los casos es posible escribir la ley de Newton como

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

O bien,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \tag{6}$$

La ecuación (6) es una ecuación lineal de primer orden y tiene el factor integrante $e^{kt/m}$. La solución de (6) es

$$v = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-kt/m} \tag{7}$$

La condición inicial $v(0) = 0$ requiere que $c_1 = -mg/k$; por tanto,

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}) \tag{8}$$

Para obtener la posición x del cuerpo, en la ecuación (8) se sustituye v por dx/dt; al integrar y aplicar la segunda condición inicial $x(0) = 0$ da

$$x = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}) \tag{9}$$

La posición y la velocidad del cuerpo en cualquier instante t quedan dadas por las ecuaciones (9) y (8), respectivamente.

Vale la pena hacer notar que cuando $t \to \infty$ en la ecuación (7), la velocidad tiende al valor límite

$$v_1 = mg/k \tag{10}$$

La velocidad límite también puede obtenerse directamente a partir de la ecuación diferencial (6) al hacer $dv/dt = 0$ y luego despejar v en (6). La velocidad límite v_l no depende de las condiciones iniciales, sino sólo de la masa del objeto y del coeficiente de resistencia del medio. Dada v_l o k, la ecuación (10) proporciona una fórmula para calcular la otra. Cuando k tiende a cero (es decir, que la resistencia disminuye), la velocidad límite aumenta indefinidamente.

Ejemplo 2.

Desde la superficie de la Tierra se proyecta hacia arriba un cuerpo de masa constante m con una velocidad inicial v_0. Si se supone que no hay resistencia del aire, pero se toma en cuenta la variación del campo gravitacional terrestre con la altitud, encontrar una expresión para la velocidad durante el movimiento subsecuente. Encontrar también la velocidad inicial necesaria para que el cuerpo alcance una altitud máxima dada ξ, por encima de la superficie terrestre y la menor velocidad inicial para que el cuerpo no regrese a la Tierra; esta última velocidad es la **velocidad de escape**.

Tome el eje x positivo hacia arriba, con el origen en la superficie de la Tierra; ver la figura 1.8.1. El peso del cuerpo actúa hacia abajo y está dado por

$$w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2} \tag{11}$$

En donde el signo negativo significa que $w(x)$ está dirigido en la dirección x negativa. En virtud de que no existen otras fuerzas que actúen sobre el cuerpo, la ecuación del movimiento es

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2} \tag{12}$$

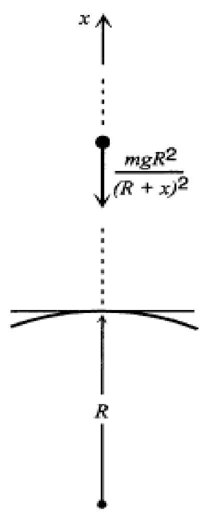


Figura 1.8.1 Un cuerpo en el campo gravitacional de la Tierra.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 90.

Y la condición inicial es

$$v(0) = v_0 \tag{13}$$

Dado que el segundo miembro de (12) sólo depende de x, es conveniente considerar a x, en vez de t, como la variable independiente. Esto requiere que se exprese dv/dt en términos de dv/dx por la regla de la cadena; de donde,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

Y (12) se reemplaza por

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2} \tag{14}$$

Al separar las variables e integrar se obtiene

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{gR^2}{R+x} + c \tag{15}$$

Como $x = 0$ cuando $t = 0$, entonces la condición inicial (13) en $t = 0$ puede sustituirse por la condición de que $v = v_0$ cuando $x = 0$. De donde, $c = (r_0^2/2) - gR$ y

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x}} \tag{16}$$

Observe que la ecuación (16) da la velocidad como una función de la altitud, en vez de como una función del tiempo. Debe elegirse el signo positivo si el cuerpo está ascendiendo y el negativo si el cuerpo está cayendo de regreso a la Tierra.

Para determinar la altitud máxima ξ que el cuerpo alcanza, se hace $y = 0$ y $x = \xi$ en la (16) y luego se despeja ξ, con lo que se obtiene

$$\xi = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2} \tag{17}$$

Al despejar v_0 en la (17) se encuentra la velocidad inicial requerida para elevar el cuerpo hasta la altitud ξ; a saber,

$$v_0 = \sqrt{2gR\frac{\xi}{R+\xi}} \tag{18}$$

Entonces se encuentra la velocidad de escape v_e al hacer que $\xi \to \infty$. Por consiguiente,

$$v_e = \sqrt{2gR} \tag{19}$$

El valor numérico de v_e es aproximadamente de 6.9 $millas/s$ o bien, 11.1 km/s.

En el cálculo anterior de la velocidad de escape se desprecia el efecto de la resistencia del aire, de modo que la velocidad de escape real (incluye el efecto de la resistencia del aire) es algo mayor. Por otra parte, la velocidad de escape efectiva puede reducirse de manera importante si el cuerpo se transporta a una distancia considerable por encima del nivel del mar, antes de su lanzamiento.

En consecuencia, se reducen las fuerzas gravitacionales y de fricción; en especial, la resistencia del aire disminuye con bastante rapidez al aumentar la altitud. También debe tenerse presente que puede ser impráctico impartir de manera instantánea una velocidad inicial demasiado grande; por ejemplo, los vehículos espaciales reciben su aceleración inicial durante un periodo de minutos. (1)

Problemas

1. Una bola de masa de 0.25 kg se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s desde el techo de un edificio que tiene 30 m de altura. Desprecie la resistencia del aire.
   a) Encuentre la altura máxima que alcanza la bola por arriba del piso.
   b) Si se supone que en su trayecto hacia abajo la bola no cae en el edificio, halle el tiempo que transcurre hasta que choca contra el piso.
2. Suponga que las condiciones son como las del problema 1, excepto en que existe una fuerza de $|v|/30$ debido a la resistencia del aire, en donde v está dada en metros por segundo.
   a) Encuentre la altura máxima que alcanza la bola por arriba del piso.
   b) Encuentre el tiempo que transcurre hasta que la bola choca contra el piso.
   Sugerencia: aplique el método de Newton, o algún otro procedimiento numérico adecuado, en el inciso b).
3. Un cuerpo de masa constante m se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Si se supone que la atracción gravitacional de la Tierra es constante, y se desprecian todas las demás fuerzas que actúan sobre el cuerpo, halle
   a) La altura máxima alcanzada por el cuerpo.
   b) El tiempo en el que se alcanza la altura máxima.
   c) El tiempo en el que el cuerpo regresa a su punto de partida.

4. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuentre la velocidad v como una función del tiempo t. Encuentre la velocidad límite v_l a la que se tiende después de mucho tiempo.
5. Un objeto de masa m se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Halle el intervalo de tiempo que transcurre antes de que la velocidad del objeto alcance el 90% de su valor límite.
6. Un bote de motor y su tripulante pesan juntos $320\ lb$. Si el empuje del motor es equivalente a una fuerza constante de $10\ lb$ en la dirección del movimiento, si la resistencia del agua al movimiento es numéricamente igual al doble de la velocidad en pies por segundo y si el bote se encuentra inicialmente en reposo, determine
   a) La velocidad del bote en el instante t.
   b) La velocidad límite.
7. Un paracaidista que pesa $180\ lb$ (incluyendo el equipo) cae verticalmente desde una altura de $5000\ pies$, y abre su paracaídas después de 10 segundos de caída libre. Suponga que la fuerza de la resistencia del aire es de $0.7|v|$ cuando el paracaídas está cerrado y de $12|v|$ cuando el paracaídas está abierto, en donde la velocidad v se da en pies por segundo.
   a) Encuentre la velocidad del paracaidista al abrirse el paracaídas.
   b) Halle la distancia que cae antes de que se abra el paracaídas.
   c) ¿Cuál es la velocidad límite v_l después de que se abre el paracaídas?
   d) Estime cuánto tiempo permanece el paracaidista en el aire después de que el paracaídas se abre.
8. Un cuerpo de masa m se proyecta verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial v_0 en un medio que presenta una resistencia proporcional a la raíz cuadrada de la magnitud de la velocidad. Encuentre la relación entre la velocidad v y el tiempo t. Encuentre la velocidad límite.
9. Un cuerpo de masa m cae desde el reposo en un medio que presenta una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Determine la relación entre la velocidad v y el tiempo t. Determine la velocidad límite.
10. Un cuerpo de masa m cae en un medio que ofrece una resistencia proporcional a $|v|^r$, en donde r es una constante positiva. Si se supone que la atracción gravitacional es constante, encuentre la velocidad límite del cuerpo.
11. Un cuerpo de masa constante m se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un medio que presenta una resistencia $k|v|$, en donde k es una constante. Despréciense los cambios en la fuerza de la gravedad.
    a) Encuentre la altura máxima x_m que alcanza el cuerpo y el instante t_m en el que alcanza esta altura máxima.

b) Demuestre que si $kv_0/mg < I$, entonces t_m y x_m pueden expresarse como

$$t_m = \frac{v_0}{g}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right],$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right].$$

12. Un cuerpo de masa m se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un medio que ofrece una resistencia $k|v|$, en donde k es una constante. Suponga que la atracción gravitacional de la Tierra es constante.
    a) Determine la velocidad $v(t)$ del cuerpo en cualquier instante.
    b) Aplique el resultado del inciso a) para calcular el límite de $v(t)$ cuando $k \to 0$; es decir, a medida que la resistencia tiende a cero. ¿Concuerda este resultado con la velocidad de una masa m proyectada hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un vacío?
    c) Aplique el resultado del inciso a) para calcular el límite de $v(t)$ cuando $m \to 0$; es decir, a medida que la masa tiende a cero.

1.9 Ecuaciones exactas y factores integrantes

Ya se mencionó que para las ecuaciones no lineales de primer orden existen varios métodos de integración aplicables a diversas clases de problemas. Sin embargo, es necesario tener presente que aquellas ecuaciones de primer orden que pueden resolverse por medio de métodos elementales de integración son más bien especiales; la mayor parte de las ecuaciones de primer orden no pueden resolverse de esta manera. (1)

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación diferencial

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0 \tag{1}$$

La ecuación no es lineal ni separable, de modo que los métodos apropiados para esos tipos de ecuaciones no son aplicables en este caso. Sin embargo, obsérvese que la función $\psi(x,y) = x^2 + xy^2$ tiene la propiedad de que

$$2x + y^2 = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad 2xy = \frac{\partial\psi}{\partial y}. \tag{2}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy^2)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3}$$

Si se supone que y es una función de x y se aplica la regla de la cadena, la ecuación (3) puede escribirse en la forma equivalente

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0 \tag{4}$$

Por lo tanto,

$$x^2 + xy^2 = c, \tag{5}$$

En donde c es una constante arbitraria, es una expresión implícita de la solución de la ecuación (1).

Al resolver (1), el paso clave fue el reconocimiento de que existe una función ψ que satisface a (2). En términos más generales, sea la ecuación diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \tag{6}$$

Suponga que es posible identificar una función ψ tal que

$$\frac{d\psi}{dx}(x,y) = M(x,y), \qquad \frac{d\psi}{dy}(x,y) = N(x,y), \tag{7}$$

Y tal que

$$\psi(x,y) = c$$

Define implícitamente $y = \phi(x)$ como una función diferenciable de x; entonces,

$$\frac{d\psi}{dx}(x,y) = M(x,y), \qquad \frac{d\psi}{dy}(x,y) = N(x,y),$$

Y la ecuación diferencial (6) se transforma en

$$\frac{d}{dx}\psi[x, \phi(x)] = 0 \tag{8}$$

En este caso, se dice que (6) es una ecuación diferencial **exacta**. La solución de la **ecuación** (6), o de la ecuación equivalente (8), queda dada implícitamente por

$$\psi(x, y) = c, \tag{9}$$

En donde c es una constante arbitraria.

Teorema 1.9.1

Sean las funciones M, N, M_y, N_x en donde los subíndices denotan derivadas parciales, continuas en la región rectangular[8] $R: \alpha < x < \beta,\ \gamma < y < \delta$. Entonces (6),

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

Es una ecuación diferencial exacta si y sólo si

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \tag{10}$$

En cada punto de R. Es decir, existe una función ψ que satisface las ecuaciones (7).

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y)$$

Si y sólo si M y N satisfacen la ecuación (10) (1).

La demostración de este teorema se hace en dos partes. Primero, se demuestra que si existe una función ψ tal que las ecuaciones (7) son verdaderas, entonces se concluye que se cumple la ecuación (10). Al calcular M_y y N_x a partir de las ecuaciones (7), se obtiene

$$M_y(x, y) = \psi_{xy}(x, y), \qquad N_x(x, y) = \psi_{yx}(x, y) \tag{11}$$

Como M_y y N_x son continuas, se deduce que ψ_{xy} y ψ_{yx} también son continuas; esto garantiza su igualdad[9] y se llega a la ecuación (10).

[8] No es esencial que la región sea rectangular, solo que sea simplemente conexa. En dos dimensiones esto significa que la región no tenga huecos en su interior. En tal caso, por ejemplo, las regiones rectangulares o circulares son simplemente conexas, pero una región anular no lo es. En la mayoría de los textos de cálculo avanzado pueden encontrarse más detalles.

[9] Se requiere la hipótesis de continuidad, ya que de lo contrario ψ_{xy} y ψ_{yx} pueden no ser iguales.

Ahora se demostrará que si M y N satisfacen la ecuación (10), entonces la (6) es exacta. La demostración comprende la construcción de una función ψ que satisfaga las ecuaciones (7),

$$\psi_x(x,y) = M(x,y), \qquad \psi_y(x,y) = N(x,y)$$

Al integrar con respecto a x la primera de las ecuaciones (7), manteniendo y, constante se encuentra que

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + h(y). \tag{12}$$

La función h es una función arbitraria de y, que actúa como la constante arbitraria. Ahora es necesario demostrar que siempre es posible elegir $h(y)$ de modo que $\psi_y = N$. Por la ecuación (12),

$$\psi_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + h'(y).$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + h'(y).$$

Si se hace $\psi_y = N$ y se despeja $h'(y)$ da

$$h'(y) = N(x,y) - \int M_y(x,y)dx. \tag{13}$$

Para determinar $h(y)$ a partir de la ecuación (13) es esencial que, a pesar de su apariencia, el segundo miembro de (13) sea una función sólo de y. Para establecer este hecho es posible derivar con respecto a x la cantidad en cuestión, con lo que se obtiene

$$N_x(x,y) - M_y(x,y),$$

Que es cero en virtud de la ecuación (10). De donde, a pesar de su forma aparente, el segundo miembro de (13) en efecto no depende de x y una sola integración da $h(y)$. Al sustituir $h(y)$ en (12), se obtiene como la solución de las ecuaciones (7)

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \int M_y(x,y)dx\right]dy \tag{14}$$

Es necesario hacer notar que esta demostración contiene un método para el cálculo de $\psi(x,y)$ y, por tanto, para resolver la ecuación diferencial original (6). Por lo general es mejor pasar por este proceso cada vez que sea necesario, en vez de intentar recordar el resultado que se da en la ecuación (14). Nótese también que la solución se obtuvo en forma implícita; puede o no ser factible hallar la solución explícitamente. (1)

Ejemplo 2.

Resolver la ecuación diferencial

$$(y\cos x + 2xe^{y}) + (sen\, x + x^{2}e^{y} - 1)y' = 0 \tag{15}$$

Es fácil ver que

$$M_{y}(x,y) = cos\, x - 2xe^{y} - N_{x}(x,y),$$

De modo que la ecuación dada es exacta. Por tanto, existe una función $\psi(x,y)$ tal que

$$\psi_{x}(x,y) = y\cos x + 2xe^{y},$$

$$\psi_{y}(x,y) = sen\, x + x^{2}e^{y} - 1.$$

Al integrar la primera de estas ecuaciones se obtiene

$$\psi(x,y) = y\,\mathrm{sen}\, x + x^{2}e^{y} + h(y),$$

Si se hace $\psi_{y} = N$ da

$$\psi_{y}(x,y) = sen\, x + x^{2}e^{y} + h'(y) = sen\, x + x^{2}e^{y} - 1.$$

Por tanto, $h'(y) = -1$ y $h(y) = -y$. Puede omitirse la constante de integración ya que cualquier solución de la ecuación precedente es satisfactoria; no se requiere la más general. Al sustituir $h(y)$ en la ecuación (16) da

$$\psi(x,y) = y\; sen\, x + x^{2}e^{y} - y.$$

De donde, la solución de la (15) queda dada implícitamente por

$$y\; sen\, x + x^{2}e^{y} - y = c. \tag{17}$$

Ejemplo 3.

Resolver la ecuación diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0. \tag{18}$$

En este caso,

$$M(x, y) = 3x + 2y, \qquad N(x, y) = 2x + y;$$

Dado que $M_y \neq N_x$, la ecuación dada no es exacta. A fin de ver que no es posible resolverla por el procedimiento antes descrito, trátese de encontrar una función ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = 3xy + y^2, \qquad \psi_y(x, y) = x^2 + xy. \tag{19}$$

Al integrar la primera de las ecuaciones (19) da

$$\psi(x, y) = \tfrac{3}{2}x^2y + xy^2 + h(y) \tag{20}$$

En donde h es una función arbitraria sólo de y. Para intentar satisfacer la segunda de las ecuaciones (19), a partir de la (20) se calcula ψ_y y se iguala a N, con lo que se obtiene

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy + h'(y) = x^2 + xy$$

O bien,

$$h'(y) = -\tfrac{1}{2}x^2 - xy. \tag{21}$$

Dado que el segundo miembro de la ecuación (21) depende de x y de y, es imposible despejar $h(y)$. Por tanto, no existe $\psi(x, y)$ que satisfaga las dos ecuaciones (19).

Factores integrantes. Algunas veces es posible convertir una ecuación diferencial que no sea exacta en una exacta al multiplicarla por un factor integrante adecuado. Recuérdese que este es el procedimiento que se utilizó al resolver las ecuaciones lineales en las secciones 1.2 y 1.3. Con el fin de investigar la posibilidad de poner en práctica esta idea de manera más general, multiplíquese la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{22}$$

Por una función μ y, a continuación, inténtese elegir μ de modo que la ecuación resultante

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \tag{23}$$

Sea exacta. Por el teorema 1.9.1, la ecuación (23) es exacta si y sólo si

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \tag{24}$$

Dado que M y N son funciones dadas, entonces la ecuación (24) hace ver que el factor integrante μ debe satisfacer la ecuación diferencial parcial de primer orden

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0 \tag{25}$$

Si es posible encontrar una función μ que satisfaga la ecuación (25), entonces la (23) será exacta. Entonces puede obtenerse la solución de la (23) por el método descrito en la primera parte de esta sección. La solución hallada de esta manera también satisface a la ecuación (22), ya que el factor integrante μ puede cancelarse en la (23).

Considérese entonces la determinación de las condiciones necesarias en M y N de modo que la ecuación (22) tenga un factor integrante μ que dependa solamente de x. Si se supone que μ es una función sólo de x, se tiene

$$(\mu M)_y = \mu M_y, \qquad (\mu N)_x = \mu N_x + M\frac{d\mu}{dx}.$$

Por tanto, si $(\mu M)_y$ debe ser igual a $(\mu N)_x$, es necesario que

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{26}$$

Si $(M_y - N_x)/N$ es una función sólo de x, entonces existe un factor integrante μ que también depende solamente de x; además, puede encontrarse $\mu(x)$ al resolver la ecuación *lineal* de primer orden (26).

Se puede aplicar un procedimiento semejante para determinar una condición con la que la ecuación (22) tenga un factor integrante que dependa solamente de y (1).

Ejemplo 4.

Determinar un factor integrante de la ecuación

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \tag{27}$$

Y, a continuación resolver la ecuación.

En el ejemplo 3 se demostró que esta ecuación no es exacta. Trátese de determinar si tiene un factor integrante que sólo dependa de x. Al calcular la cantidad $(M_y - N_x)/N$, se encuentra que

$$\frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x} \tag{28}$$

Por tanto, existe un factor integrante μ que es función sólo de x, y que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}. \tag{29}$$

De donde,

$$\mu(x) = x. \tag{30}$$

Al multiplicar la ecuación (27) por este factor integrante, se obtiene

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0. \tag{31}$$

Esta última ecuación es exacta y se encuentra rápidamente que su solución está dada en forma implícita por

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c. \tag{32}$$

La solución también puede encontrarse con facilidad en forma explícita, ya que la ecuación (32) es cuadrática en y.

El lector puede comprobar también que un segundo factor integrante de la ecuación (27) es

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy(2x+y)},$$

Y que se obtiene la misma solución, aunque con mucho mayor dificultad, si se utiliza este factor integrante (1).

Problemas

Determine si cada una de las ecuaciones de los problemas 1 a 12 es exacta. En caso de serlo, halle la solución.

1. $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$
2. $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$
3. $(3x^2 - 2xy + 2)dx + (6y^2 - x^2 + 3)dy = 0$
4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$

5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by}{bx+cy}$
6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax-by}{bx-cy}$
7. $e^x sen\, y - 2y\; sen\, x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$
8. $(e^x sen\, y + 3y)dx - (3x - e^x sen\, y)dy = 0$
9. $(ye^{xy}\, cos\, 2x - 2e^{xy}\, sen\, 2x + 2x)dx + (xe^{xy} cos\, 2x - 3)dy = 0$
10. $(y/x + 6x)dx + (ln\, x - 2)dy = 0, \quad x > 0$
11. $(x\, ln\, y + xy)dx + (y\, ln\, x + xy)dy = 0; \quad x > 0, \quad y > 0$
12. $\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$

En los problemas 13 y 14, resuelva el problema con valor inicial dado y determine, por lo menos aproximadamente, en dónde es válida la solución.

13. $(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0, \quad y(1) = 3$
14. $(9x^2 + y - 1)dx - (4y - x)dy = 0, \quad y(1) = 0$

En los problemas 15 y 16, encuentre el valor de b para el que la ecuación dada es exacta y, después, resuelva esa ecuación al utilizar ese valor de b.

15. $(xy^2 + bx^2y)dx + (x + y)x^2dy = 0$
16. $(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$

1.10 Ecuaciones homogéneas

Los dos tipos más importantes de ecuaciones no lineales de primer orden que se pueden resolver mediante procesos directos de integración son las ecuaciones separables y las exactas.

En esta sección se verá cómo algunas veces es posible aplicar un cambio de variable para simplificar una ecuación diferencial y por tanto hacer que sea posible (o más conveniente) su resolución. En términos generales, la sustitución idónea debe ser sugerida por la aparición repetida de alguna combinación de las variables o por alguna otra peculiaridad en la estructuras de la ecuación.

La clase más importante de ecuaciones para las cuales es posible establecer una regla definitiva es la clase de las ecuaciones diferenciales homogéneas[10]. 16 Se dice que una ecuación de la forma

$$dy/dx = f(x, y)$$

Es homogénea siempre que la función /n o dependa por separado de x y y, sino solamente de su razón y/x o x/y; por tanto, las ecuaciones homogéneas son de la forma

$$dy/dx = F(y/x) \tag{1}$$

Considérense los ejemplos siguientes:

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x};$
(b) $\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln\frac{1}{y/x} + \frac{1+(y/x)}{1-(y/x)}$
(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+2xy}{x^2} = y\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$

Las ecuaciones a) y b) son homogéneas, ya que el segundo miembro de cada una puede expresarse como una función de y/x; dado que la c) no puede escribirse así, no es homogénea. Por lo general, es fácil decir por inspección si una ecuación dada es homogénea o no; para ecuaciones complicadas puede ser de utilidad el criterio que se da en el problema 15.

La forma de una ecuación homogénea sugiere que es posible simplificarla mediante la introducción de una nueva variable, que se denotará por v, con el fin de representar la razón de y a x. Por tanto,

$$y = xv \tag{2}$$

Y la ecuación (1) se transforma en

$$dy/dx = F(v) \tag{3}$$

Si se toma v como la nueva variable dependiente (en sustitución de y), es necesario considerar a v como una función de x y reemplazar dy/dx de la ecuación (3) por una expresión conveniente en términos de v. Al derivar la ecuación (2) da

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v,$$

[10] El término *homogéneas* se usa de más de una manera en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Es necesario estar alerta para distinguir estos usos cuando se presenten.

Y, de donde, (3) queda

$$x\frac{dv}{dx} + v = F(v). \tag{4}$$

El hecho más importante acerca de la ecuación (4) es que las variables x y v siempre pueden separarse, sin importar la forma de la función F; en efecto,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v}. \tag{5}$$

Al resolver la ecuación (5) y después sustituir v por y/x se obtiene la solución de la ecuación original.

Por tanto, cualquier ecuación homogénea puede transformarse a una cuyas variables se separan por la sustitución (2). Por supuesto, en la práctica, al resolver (5) puede o no ser posible evaluar la integral requerida por métodos elementales. Es más, una ecuación homogénea también puede pertenecer a una de las clases ya analizadas; puede ser exacta o incluso lineal, por ejemplo. En esos casos, puede elegirse entre varios métodos para hallar su solución (1).

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}. \tag{6}$$

Al escribir esta ecuación como

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$$

Se demuestra que es homogénea. Las variables no pueden separarse, la ecuación no es exacta ni tiene factor integrante obvio. Por tanto, se ve uno conducido a la sustitución (2), que transforma la ecuación dada en

$$x\frac{dv}{dx} + v = v^2 + 2v.$$

De donde,

$$x\frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

O bien, al separar las variables,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(v+1)}$$

Si se desarrolla el segundo miembro por fracciones parciales, se obtiene

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv.$$

Al integrar los dos miembros, se llega a

$$ln|x| + ln|c| = ln|v| - ln|v+1|,$$

En donde c es una constante arbitraria. Así, al combinar los logaritmos y tomar la exponencial de ambos miembros, se obtiene

$$cx = \frac{v}{v+1}$$

Por último, al sustituir v en términos de y da la solución de la ecuación (6) en la forma

$$cx = \frac{y/x}{(y/x)+1} = \frac{y}{y+1}$$

Al despejar y se obtiene

$$y = \frac{cx^2}{1-cx}. \tag{7}$$

Problemas

Demuestre que las ecuaciones de los problemas 1 a 8 son homogéneas y encuentre sus soluciones.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$
2. $2ydx - xdy = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y-3x}{2x-y}$

6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y}$
8. $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$
9. a) Encuentre la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{2x - y}$$

b) Encuentre la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4}$$

Sugerencia: Para reducir la ecuación del inciso b) a la del inciso a), considérese una sustitución preliminar de la forma $x = X - h, y = Y - k$. Elija las constantes h y k de modo que la ecuación sea homogénea en las variables X y Y.

10. Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y + 15}{2x + y + 7}$$

Vea la sugerencia del problema 9 b).

11. Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y + 5}{2x + y + 7}$$

Vea la sugerencia del problema 9 b).

12. Encuentre la solución de la ecuación

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

1.11 Problemas diversos y aplicaciones

Esta sección consta de una lista de problemas. Los primeros 32 pueden resolverse por los métodos de las secciones anteriores. Se presentan de modo que el lector pueda practicar la identificación del método o los métodos aplicables a una ecuación dada. En seguida, se tienen algunos problemas que sugieren técnicas especializadas, de utilidad para ciertos tipos de ecuaciones. En particular, los problemas 35 a 37 tratan de las ecuaciones de Riccati. Los problemas del 38 al 43 están relacionados con algunas aplicaciones geométricas, mientras que los demás problemas abordan otras aplicaciones de las ecuaciones diferenciales (1).

Problemas

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3-2y}{x}$
2. $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{3+3y^2-x}, \quad y(0) = 0$
4. $(x+e^y)dy - dx = 0$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy+y^2+1}{x^2+2xy}$
6. $x\frac{dy}{dx} + xy = 1 - y, \quad y(1) = 0$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y+y^3} \qquad$ *Sugerencia*: Sea $\mathrm{u} = \mathrm{x}^2$
8. $x\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{sen\, x}{x}, \quad y(2) = 1$
9. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy+1}{x^2+2y}$
10. $(3y^2+2xy)dx - (2xy+x^2)dy = 0$
11. $(x^2+y)dx + (x+e^y)dy = 0$
12. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1+e^x}$
13. $x\,dy - y\,dx = (xy)^{1/2}dx$
14. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0, \quad y(2) = 3$
15. $(e^x+1)\frac{dy}{dx} = y - ye^x$
16. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2}$
17. $\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 3y$
18. $(2y+3x)dx = -x\,dy$
19. $x\,dy - y\,dx = 2x^2y^2dy, \quad y(1) = -2$
20. $y' = e^{x+y}$

21. $xy' = y + xe^{y/x}$

22. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{y^2+1}, \quad y(-1) = 1$

23. $xy' + y - y^2e^{2x} = 0$

24. $2\, sen\, y \cos x\, dx + \cos y\, sen\, x\, dy = 0$

25. $\left(2\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$

26. $(2y+1)dx + \left(\frac{x^2-y}{x}\right)dy = 0$

27. $(\cos 2y - sen\, x)dx - 2\tan \mathrm{x}\ \mathrm{sen}\ 2\mathrm{y}\ \mathrm{dy} = 0$

28. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-2y-y^3}{2x+3xy^2}$

29. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y+\sqrt{x^2-y^2}}{2x}$

30. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{1-2xy^2}, \quad y(0) = 1$

31. $(x^2y + xy - y)dx + (x^2y - 2x^2)dy = 0$

32. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2+y^2}{2x^3+3xy}, \quad y(1) = -2$

33. Demuestre que una ecuación de la forma

$$y = G(P),$$

En donde $p = dy/dx$, puede resolverse de la siguiente manera.

a) Derive con respecto a x.

b) Integre la ecuación del inciso a) para obtener x como función de p. Esta ecuación y la ecuación original $y = G(p)$ forman una representación paramétrica de la solución.

34. Resuelva la ecuación diferencial

$$y - ln\, p = 0,$$

En donde $p = dy/dx$, por el método del problema 33. Resuelva también la ecuación directamente y verifique que las soluciones son las mismas.

35. **Ecuación de Riccatti.** La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

Se conoce como ecuación de Riccati[11]. Suponga que se conoce alguna solución particular y_1 de esta ecuación. Mediante la sustitución

$$y = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$$

Es posible obtener una solución más general que contenga una constante arbitraria. Demuestre que $v(x)$ satisface la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dv}{dx} = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3$$

Observe que $y(x)$ contiene una sola constante arbitraria.

36. Con la aplicación del método del problema 35 y la solución particular dada, resuelva cada una de las siguientes ecuaciones de Riccati.
   a) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2; \qquad y_1(x) = x$
   b) $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2; \qquad y_1(x) = \frac{1}{x}$
   c) $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2 x - sen^2\, x + y^2}{2\cos x}; \qquad y_1(x) = sen\, x$

37. La propagación de una simple acción en una población grande (por ejemplo, los conductores que encienden los faros de su automóvil al atardecer) a menudo depende parcialmente de circunstancias externas (que oscurezca) y parcialmente de una tendencia a imitar a los demás que ya han realizado la acción en cuestión. En este caso, la proporción $y(t)$ de personas que ya han realizado la acción pueden describirse[12] por la ecuación

$$dy/dt = (1 - y)[x(t) + by], \tag{i}$$

En donde $x(t)$ mide el estímulo externo y bes el coeficiente de imitación.

[11] Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), noble veneciano, declino nombramientos académicos universitarios en Italia, Austria y Rusia para continuar sus estudios matemáticos de manera privada en su hogar. Estudio ampliamente la ecuación diferencial que ahora lleva su nombre; sin embargo, fue Euler (en 1760) quien descubrió el resultado que se da en este problema.

[12] Ver el artículo de Anatol Rapoport, "Contribution to the Mathematical Theory of Mass Behavior: I. The Propagation of Single Acts", *Bulletin of Mathematical Biophysics 14* (1952), pp. 159- 169, y el de John Z. Hearon, "Note on the Theory o f Mass Behavior", *Bulletin o f Mathematical Biophysics 17* (1955), pp. 7-13.

a) Observe que la ecuación (i) es una ecuación de Riccati y que $y_1(t) = 1$ es una solución. Aplique la transformación sugerida en el problema 35 y halle la ecuación lineal que satisface $v(t)$.
b) Halle $v(t)$ en el caso de que $x(t) = at$, en donde a es una constante. Deje la respuesta en la forma de una integral.

38. **Trayectorias ortogonales**. Un problema geométrico bastante común es hallar la familia de curvas que se intersecan ortogonalmente en cada punto con una familia dada de curvas. Se dice que cada una de estas familias de curvas constituyen las trayectorias ortogonales de la otra,
a) Considere la familia de parábolas

$$y = kx^2 \tag{i}$$

En donde k es una constante. Trace la gráfica de la ecuación (i) para varios valores de k. Encuentre una expresión para la pendiente de la parábola que pasa por un punto dado, de modo que esa expresión contenga las coordenadas (x, y) del punto, pero no el parámetro k.
Sugerencia: Derive la ecuación (i) y elimine k.
b) Al aplicar el hecho de que las pendientes de curvas ortogonales son recíprocas negativas, escriba la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales de (i).
c) Resuelva la ecuación a la que llegó en el inciso b) y determine las trayectorias ortogonales. Trace varios miembros de esta familia de curvas.

39. En cada uno de los casos siguientes, aplique el método del problema 38 para encontrar la familia de trayectorias ortogonales de la familia dada de curvas. Trace la gráfica de la familia dada y de sus trayectorias ortogonales.
a) La familia de hipérbolas $xy = c$.
b) La familia de circunferencias $(x - c)^2 + y^2 = c^2$.
c) La familia de elipses $x^2 - xy + y^2 = c^2$.
d) La familia de parábolas $2\,cy + x^2 = c^2, \quad c > 0$.

40. Si dos rectas en el plano xy, cuyas pendientes son m_1 y m_2, respectivamente, se intersecan formando un ángulo θ, demuestre que

$$(\tan\theta)(1 + m_1 m_2) = m_2 - m_1.$$

Aplique este hecho para encontrar la familia de curvas que se intersecan con cada una de las siguientes familias formando un ángulo de 45°. En cada caso trace la gráfica de las dos familias de curvas,
a) $x - 2y = c$
b) $x^2 + y^2 = c^2$

41. Encuentre todas las curvas planas cuya tangente en cada punto (x, y) pasa por el punto fijo (a, b).
42. La recta normal a una curva dada en cada punto (x, y) de la curva pasa por el punto (2,0). Si la curva contiene el punto (2, 3), encuentre su ecuación.
43. Halle todas las curvas planas en las que, para cada punto de la curva, el eje y biseca esa parte de la recta tangente entre el punto de tangencia y el eje x.
44. Una persona tiene una fortuna que aumenta a una razón proporcional al cuadrado de su riqueza actual. Si hace un año tenía un millón de dólares y en la actualidad tiene dos millones ¿cuánto valdrá en 6 meses?, ¿y en 2 años?
45. Se forma un estanque al acumularse agua en una depresión cónica de radio a y profundidad h. Suponga que el agua entra a una razón constante k y que se pierde por evaporación a una razón proporcional al área superficial.
    a) Demuestre que el volumen $V(t)$ de agua en el estanque en el instante t satisface la ecuación diferencial

    $$dV/dt = k - \alpha\pi(3\alpha/\pi h)^{2/3}\, V^{2/3},$$

    En donde α es el coeficiente de evaporación.
    b) Halle la profundidad de equilibrio del agua en el estanque. ¿Es estable el equilibrio?
    c) Encuentre una condición que se deba satisfacer para que el estanque no se desborde.
46. Considere un tanque cilíndrico de agua con sección transversal constante A. Se bombea agua al tanque a una razón constante k y el agua se fuga por un pequeño orificio de área a que se encuentra en el fondo del tanque. Con base en el teorema de Torricelli de la hidrodinámica, se concluye que la razón a la que el agua fluye a través del orificio es $\alpha a\sqrt{2gh}$, en donde h es la profundidad instantánea del agua en el tanque, g es la aceleración debida a la gravedad y α es un coeficiente de contracción que satisface $0.5 \leq \alpha \leq 1.0$.
    a) Demuestre que la profundidad del agua en el tanque en cualquier instante satisface la ecuación

    $$dh/dt = (k - \alpha a\sqrt{2gh})/A.$$

    b) Determine la profundidad de equilibrio h_e del agua y demuestre que es estable. Observe que h_e no depende de A.

Semana 7

Temas

- Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes.
- Soluciones fundamentales de las ecuaciones lineales homogéneas.

Objetivos

- Estudiar y conocer la temática de las ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes.
- Conocer los conceptos básicos de las soluciones fundamentales de las ecuaciones lineales homogéneas.

Actividades

- Socialización de conceptos sobre las ecuaciones homogéneas de segundo orden y sus soluciones fundamentales.
- Solución de ejercicios sobre ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes.

Recursos

- **Videos**

1. **Título:** Solución ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes parte 1

   Descripción: Ejemplo de solución de tres ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=MQwta7M4_UM

2. **Título:** Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes

   Descripción: Solución a una ecuación diferencial homogénea lineal con coeficientes constantes.

   Se parte de la ecuación más simple, de primer orden y se asume que para ecuaciones de orden superior como la ecuación de segundo orden la solución es una exponencial.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=NGjiphgUqoY

3. **Título:** Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden | Homogéneas con coeficientes constantes

   Descripción: Ejercicio explicado paso a paso de forma sencilla. Explicamos cómo resolverlas y encontrar su solución general.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=D0DBU7T7hRU

4. **Título:** Boyce y DiPrima 3.2.27

   Descripción: Solución ejercicio 3.2.27 del libro de Boyce y DiPrima. Ecuaciones lineales de segundo orden. Ecuaciones exactas

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=EQxuls4St7U

- **PDF**

1. **Título:** capitulo-4.pdf

   Descripción: Teoría y métodos para resolver ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constante. Pág. 22- 31.

   Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-4.pdf

Unidad 2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Introducción

Las ecuaciones lineales de segundo orden tienen una importancia primordial en el estudio de las ecuaciones diferenciales por dos razones principales. La primera es que las ecuaciones lineales poseen una rica estructura teórica que sustenta varios métodos sistemáticos de resolución. Además, una parte sustancial de esta estructura y estos métodos son comprensibles en un nivel matemático bastante elemental. A fin de presentar las ideas clave en el contexto más sencillo posible, se les estudia en este capítulo para las ecuaciones de segundo orden. Otra razón para estudiar las ecuaciones lineales de segundo orden es que son imprescindibles en cualquier investigación seria de las áreas clásicas de la fisica-matematica. No es posible avanzar mucho en el análisis de la mecánica de fluidos, la conducción del calor, el movimiento ondulatorio o los fenómenos electromagnéticos sin encontrar que es necesario resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

2.1. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \tag{1}$$

En donde f es alguna función dada. Se dice que la ecuación (1) es **lineal** si la función f puede escribirse como

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y, \tag{2}$$

En donde g, p y q son funciones especificadas de la variable independiente x. En este caso, la ecuación (1) queda

$$y" + P(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{3}$$

En donde los apóstrofos denotan derivación con respecto a x. En vez de (3), a menudo se ve la ecuación

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x); \tag{4}$$

Por supuesto, si (4) se divide en $P(x)$, entonces se reduce a la ecuación (3) con

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}, \qquad g(x) = \frac{G(x)}{P(x)}. \tag{5}$$

Al analizar e intentar resolver (3), es necesario restringirse a intervalos en los cuales p, q y g son funciones continuas.

Si (1) no es de la forma (3) o (4), entonces se dice que es **no lineal**. Un análisis extenso de las ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden es demasiado difícil para un texto de este nivel, por lo que se dirá relativamente poco acerca de ellas. Sin embargo, existen dos tipos especiales de ecuaciones no lineales de segundo orden que se pueden resolver mediante un cambio de variables que las reduce a ecuaciones de primer orden. En los problemas 17 a 32, se bosqueja este procedimiento.

Un problema con valor inicial consta de una ecuación diferencial como (1), (3) o (4) junto con un par de condiciones iniciales de la forma

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0, \tag{6}$$

En donde y_0 y y'_0 son números dados. Observe que las condiciones iniciales para una ecuación de segundo orden prescriben no solo un punto particular (x_0, y_0) por el que debe pasar la gráfica de la solución, también la pendiente de la gráfica en ese punto. Resulta razonable esperar que para una ecuación de segundo orden se necesiten dos condiciones iniciales porque, en términos generales, para hallar una solución se requieren dos integraciones y cada una introduce una constante arbitraria. Es de suponer que bastaran dos condiciones iniciales para determinar los valores de estas dos constantes.

Las ecuaciones lineales de segundo orden surgen en muchas aplicaciones importantes. Por ejemplo, el movimiento de una masa sujeta a un resorte y muchos otros sistemas oscilatorios simples, se describen por una ecuación de la forma

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = F(t), \tag{7}$$

En donde m, c y k son constantes y F es una función prescrita. Esta ecuación se analiza en la sección 2.9. Otros ejemplos son la ecuación de Bessel[13] de orden v,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \tag{8}$$

Y la ecuación de Legendre[14] de orden α,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \tag{9}$$

En donde v y α son constantes. La ecuación de Bessel se presenta en muchas situaciones físicas con mayor frecuencia en problemas que comprenden geometría circular, como la determinación de la distribución de temperaturas en una placa circular. La ecuación de Legendre se encuentra frecuentemente en situaciones físicas que están relacionadas con geometría esférica.

Se dice que una ecuación lineal de segundo orden es **homogénea** si el término $g(x)$ de la ecuación (3), o el término $G(x)$ de la (4), es cero para toda x . En caso contrario, la ecuación es **no homogénea**. Como resultado, el término $g(x)$, o el $G(x)$, algunas veces se le nombra término **no homogéneo**. Se empezara el análisis con las ecuaciones **homogéneas**, las que se Escribirán en la forma

---

[13] Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) emprendió una carrera de administración en su juventud, pero pronto se interesó en la astronomía y las matemáticas. Fue designado director del observatorio de Konigsberg en 1810, puesto que ocupo hasta su fallecimiento. Sus estudios de las perturbaciones planetarias lo llevaron en 1824 a efectuar el primer análisis sistemático de las soluciones, conocidas como funciones de Bessel, de la ecuación (8). También es famoso por haber realizado la primera determinación exacta (1838) de la distancia de la Tierra a una estrella.

[14] Adrien-Marie Legendre (1752-1833) ocupo varios puestos en la Academia Francesa de Ciencias a partir de 1783. Su trabajo principal lo realizo en los campos de las funciones elípticas y la teoria de los números. Las funciones de Legendre, soluciones de la ecuación (9), aparecieron por primera vez en 1784 en su estudio de la atracción de esferoides.

$$P(x)y" + Q(x)y' + R(x)y = 0. \tag{10}$$

En este caso la ecuación (10) se transforma en

$$ay" + by' + cy = 0, \tag{11}$$

En donde a, b y c son constantes dadas. Resulta que la ecuación (11) siempre puede resolverse con facilidad en términos de las funciones elementales de cálculo. Por otra parte, suele ser mucho más difícil resolver la ecuación (10) si los coeficientes no son constantes. Antes de abordas la ecuación (11), considérese en primer lugar un ejemplo especialmente sencillo, para adquirir cierta experiencia. Sea la ecuación

$$y" - y = 0 \tag{12}$$

Que es de la forma (11) con $a = 1, b = 0$ y $c = -1$. En palabras, la (12) pide que se busque una función con la propiedad de que la segunda derivada de esa función sea igual a ella misma. Al reflexionar un poco se recordara al menos una bien conocida función del cálculo con esta propiedad, a saber $y_1(x) = e^x$, la función exponencial. Con un poco más de reflexión también se puede llegar a una segunda función $y_2(x) = e^x$. Algunos ensayos más pueden revelar que los múltiplos de estas dos soluciones también son soluciones. Por ejemplo, las funciones $2e^x$ y $5e^{-x}$ también satisfacen la ecuación (12), como es posible comprobar si se calculan sus segundas derivadas. De la misma manera, las funciones $c_1y_1(x) = c_1e^x$ y $c_2y_2(x) = c_2e^{-x}$ satisfacen la ecuación diferencial (12) para todos los valores de las constantes c_1 y c_2. A continuación, es de suma importancia observar que cualquier suma de soluciones de la ecuación (12) también es una solución. En particular, dado que $c_1y_1(x)$ y $c_2y_2(x)$ son soluciones de (12), así también lo es de la función

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} \tag{13}$$

Para valores cualesquiera de c_1 y c_2. Una vez más, esto puede verificarse al calcular la segunda derivada $y"$ a partir de (13). En efecto, se tiene $y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$ y $y" = c_1e^x + ce^{-x}$; por tanto, $y"$ es igual a y, y se satisface la ecuación (12).

Ahora un resumen de lo que se ha hecho hasta el momento en este ejemplo. Una vez que se observa que las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$, son soluciones de la ecuación (12), se concluye que la combinación lineal general (13) de estas funciones también es una solución. Dado que los coeficientes c_1 y c_2 de la ecuación (13) son arbitrarios, esta expresión representa una familia doblemente infinita de soluciones de la ecuación diferencial (12). Ahora es posible considerar como elegir un miembro en particular de esta familia infinita de soluciones que también satisfaga un conjunto dado de condiciones iniciales. Por ejemplo, suponga que se busca la solución de la ecuación (12) que también satisfaga las condiciones iniciales

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = -1 \tag{14}$$

En otras palabras, se busca la solución que pasa por el punto (0,2) y que en ese punto tiene la pendiente -1. Primero, se hace $x = 0$ y $y = 2$ en la ecuación (13); con ello se obtiene

$$c_1 + c_2 = 2 \tag{15}$$

Luego, se deriva la ecuación (13), lo que da por resultado

$$y' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}$$

Entonces, al hacer $x = 0$ y $y' = -1$, se obtiene

$$c_1 - c_2 = 1 \tag{16}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (15) y (16) para c_1 y c_2, se encuentra que

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = \frac{3}{2}$$

Por último, si se introducen estos valores en (13), se obtiene

$$y = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{3}{2}e^{-x}, \tag{17}$$

La solución del problema con valor inicial que consta de la ecuación diferencial (12) y las condiciones iniciales (14).

Ahora se regresara a la ecuación más general (11),

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

Que tiene coeficientes constantes (reales) arbitrarios. Con base en la experiencia adquirida con (12), también se buscan las soluciones exponenciales de (11). Por tanto, se supone que $y = e^{rx}$, En donde r es un parámetro por determinar. Luego, se sigue qué $y' = re^{rx}$ y $y" = r_2 e^{rx}$. Al sustituir estas expresiones para y, y' y $y"$ en (11), se obtiene

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0\,,$$

O bien, dado que $e^{rx} \neq 0$,

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{18}$$

La ecuación (18) se llama ecuación característica de la ecuación diferencial (11). Su importancia reside en el hecho de que si r es una raíz de la ecuación polinomial (18), entonces $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación diferencial (11). Ya que (18) es una ecuación cuadrática con coeficientes reales, tiene dos raíces, que pueden ser reales y diferentes, reales pero repetidas, o complejas conjugadas.
Si se supone que las raíces de la ecuación característica (18) son reales y diferentes, denótense por r_1 y r_2, en donde, por supuesto, $r_1 \neq r_2$. Entonces $y_1(x) = e^r 1^x$ y $y_2(x) = e^r 2^x$ son dos soluciones de la ecuación (11). Así como en el ejemplo anterior, ahora se concluye que

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{19}$$

También es una solución de (11). Para verificar este hecho, se puede derivar la expresión de la ecuación (19); de donde,

$$y' = c_1 r_1 e^{r_1 x} + c_2 r_2 e^{r_2 x} \tag{20}$$

Y

$$y'' = c_1 r_1^2 e^{r_1 x} + c_2 r_2^2 e^{r_2 x} \tag{21}$$

Si se sustituyen estas expresiones para y, y' y y" en (11), se obtiene

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1 x} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2 x} \tag{22}$$

La cantidad entre cada uno de los paréntesis del segundo miembro de la ecuación (22) es cero porque r_1 y r_2 son raíces de (18); por consiguiente, según está definida por (19), en efecto y es una solución de la ecuación (11), que era lo que se quería comprobar.
Ahora suponga que se desea encontrar el miembro particular de la familia de soluciones (19) que satisfaga las condiciones iniciales (6),

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_0) = y_0.$$

Al sustituir $x = x_0$ y $y = y_0$ en (19), se obtiene

$$c_1 e^{r_1 x_0} + c_2 e^{r_2 x_0} = y_0. \tag{23}$$

De manera semejante, al hacer $x = x_0$ y $y' = y'_0$ en (20), da

$$c_1 r_1 e^{r_1 x_0} + c_2 r_2 e^{r_2 x_0} = y_0' \tag{24}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (23) y (24) para c_1 y c_2, se encuentra que

$$c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 x_0}, \qquad c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 x_0} \tag{25}$$

Por tanto, no importa cuales condiciones iniciales se asignen; es decir, sin importar los valores de x_0, y_0 y y_0' de (6), siempre es posible determinar c_1 y c_2 de modo que se satisfagan las condiciones iniciales; es más, solo existe una elección posible de c_1 y c_2 para cada conjunto de condiciones iniciales. Con los valores de c_1 y c_2 dados por la ecuación (25), la expresión (19) es la solución del problema con valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0' \tag{26}$$

Es posible demostrar, con base en el teorema fundamental que se cita en la siguiente sección, que todas las soluciones de (11) están incluidas en la expresión (19), al menos para el caso en el que las raíces de (18) son reales y diferentes. Por lo tanto, la ecuación (19) se le conoce como solución general de la ecuación (11). El hecho de que todas las condiciones iniciales posibles se puedan satisfacer al elegir de manera adecuada las constantes de la ecuación (19) hace más plausible la idea de que esta expresión en realidad incluye todas las soluciones de (11) (1).

Ejemplo 1.

Encontrar la solución general de

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \tag{27}$$

Se supone que $y = e^{rx}$ y se sigue que r debe ser una raíz de la ecuación característica

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0.$$

Por tanto, los valores posibles de r son $r_1 = -2$ y $r_2 = -3$; la solucion general de la ecuacion (27) es

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}. \tag{28}$$

Ejemplo 2.

Hallar la solución del problema con valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 3. \tag{29}$$

La solución general de la ecuación diferencial se encontró en el ejemplo 1 y está dada por la ecuación (28). Para satisfacer la primera condición inicial, se hace $x = 0$ y $y = 2$ en (28); por tanto, c_1 y c_2 deben satisfacer

$$c_1 + c_2 = 2. \tag{30}$$

Para usar la segunda condición inicial, primero debe derivarse la ecuación (28); esto da $y' = -2c_1e^{-2x} - 3c_2e^{-3x}$. Entonces, si se hace $x = 0$ y $y' = 3$, se obtiene

$$-2c_1 - 3c_2 = 3 \tag{31}$$

Al resolver las ecuaciones (30) y (31) se encuentra que $c_1 = 9$ y $c_2 = -7$. Si se usan estos valores en la expresión (28) se obtiene la solución

$$y = 9e^{-2x} - 7e^{-3x} \tag{32}$$

Del problema con valor inicial (29). En la figura 2.1.1 se muestra la gráfica de la solución

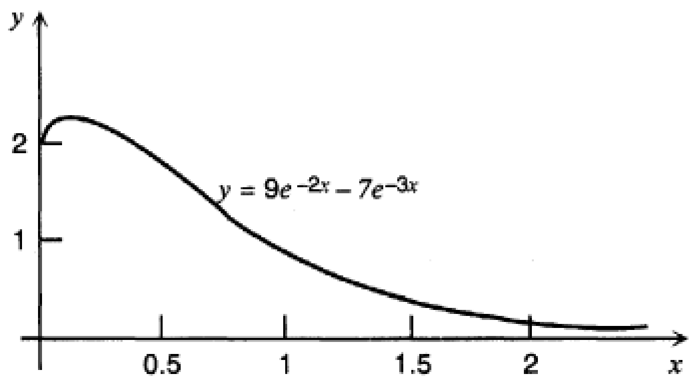


Figura 2.1.1 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 141.

Ejemplo 3.

Hallar la solución del problema con valor inicial

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1/2 \tag{33}$$

Si $y = e^{rx}$, entonces la ecuación característica es

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

Y sus raíces son $r = 3/2$ y $r = 1/2$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{3x/2} + c_2 e^{x/2}. \tag{34}$$

Si se aplican las condiciones iniciales se obtienen las dos ecuaciones siguientes para c_1 y c_2;

$$c_1 + c_2 = 2, \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}.$$

La solución de estas ecuaciones es $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{5}{2}$, y la solucion del problema con valor inicial (33) es

$$y = -\frac{1}{2}e^{3x/2} + \frac{5}{2}e^{x/2}. \tag{35}$$

En la figura 2.1.2 se muestra la gráfica de la solución.

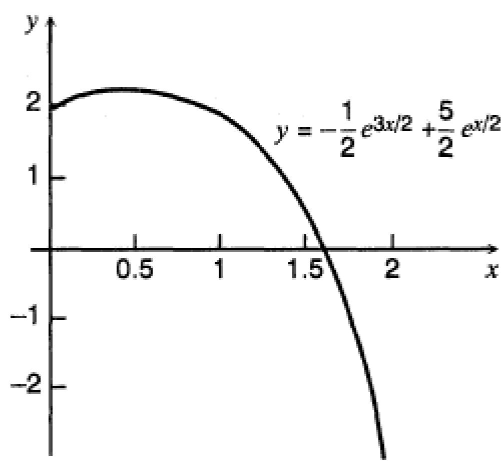


Figura 2.1.2 Solución de $4y'' - 8y' + 3y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.5$.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 141.

Ejemplo 4.

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y'' + y' - 12y = 0, \qquad y(2) = 2, \qquad y'(2) = 0. \tag{36}$$

La ecuación característica es

$$r^2 + r - 12 = 0$$

Con las raíces $r_1 = 3$ y $r_2 = -4$, de modo que la solucion general de la ecuacion diferencial es

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x} \tag{37}$$

Las condiciones iniciales requieren que c_1 y c_2 satisfagan

$$c_1e^6 + c_2e^{-8} = 2, \qquad 3c_1e^6 - 4c_2e^{-8} = 0.$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene

$$c_1 = \frac{8}{7}e^{-6}, \qquad c_2 = \frac{6}{7}e^8,$$

De modo que la solución del problema con valor inicial (36) es

$$y = \frac{8}{7}e^{-6}e^{3x} + \frac{6}{7}e^8e^{-4x} = \frac{8}{7}e^{3(x-2)} + \frac{6}{7}e^{-4(x-2)} \tag{38}$$

De manera alternativa, en vez de utilizar la ecuación (37), es posible escribir la solución general como

$$y = k_1e^{3(x-2)} + k_2e^{-4(x-2)}$$

En esta forma es un poco más fácil aplicar las condiciones iniciales, con el resultado de que $k_1 = 8/7$, $k_2 = 6/7$, de modo que nuevamente se obtiene la solución (38). Este ejemplo hace ver que no hay dificultad en aplicar las condiciones iniciales en un valor de *x* que no sea cero. (1)

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, halle la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$
3. $6y'' - y' - y = 0$
4. $2y'' - 3y' + y = 0$
5. $y'' + 5y' = 0$
6. $4y'' - 9y = 0$
7. $y'' - 9y' + 9y = 0$
8. $y'' - 2y' - 2y = 0$

En cada uno de los problemas 9 a 14, encuentre la solución del problema con valor inicial dado. Trace la gráfica de la solución y describa su comportamiento al crecer x.

9. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

10. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
11. $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$
12. $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$
13. $y'' + 8y - 9y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
14. $4y'' - y = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$

Ecuaciones en las que falta $\boldsymbol{y}$. En una ecuación diferencial de segundo orden de la forma $y" = f(x, y')$, La sustitución $v' = y', \ v' = y"$ da una ecuación de primer orden de la forma $v' = f(x, v)$. Si es posible resolver esta ecuación para y entonces puede obtenerse y al integrar $dy/dx = v$. Observe que al resolver la ecuación de primer orden para *v* se obtiene una constante arbitraria y que en la integración para y se introduce una segunda constante arbitraria.

En cada uno de los problemas 17 a 22 aplique esta sustitución para resolver la ecuación dada.

15. $x^2y" + 2xy' - 1 = 0, \quad x > 0$
16. $xy" + y' = 1, \quad x > 0$
17. $y" + x(y')^2 = 0$
18. $2x^2y" + (y')^3 = 2xy', \quad x > 0$
19. $y" + y' = e^{-x}$
20. $x^2y" = (y')2, \quad x > 0$

Ecuaciones en las que falta *x*. Si una ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma $y'' = f(x, y)$, la variable independiente x no aparece explícitamente, solo a través de la variable dependiente y. Si se hace $v = y'$, entonces se obtiene $dv/dx = f(y, v)$. Como el segundo miembro de esta ecuación depende de y y v, en lugar de x y v, esta ecuación no es de la forma de las ecuaciones de primer orden analizadas en el capítulo 1. Sin embargo, si se piensa en y como la variable independiente entonces, por la regla de la cadena, $dv/dx = (dv/dy)(dy/dx) = v(dv/dy)$.

En cada uno de los problemas 23 a 28, aplique este método para resolver la ecuación diferencial dada.

21. $yy" + (y')^2 = 0$
22. $y" + y = 0$
23. $y" + y(y')^3 = 0$
24. $2y^2y" + 2y(y')^2 = 1$
25. $yy" - (y')^3 = 0$
26. $y" + (y')^2 = 2e^{-y}$

2.2. Soluciones fundamentales de las ecuaciones lineales homogéneas

En la sección anterior se mostró como resolver algunas ecuaciones diferenciales de la forma

$$ay" + by' + cy = 0,$$

En donde a, b y c son constantes. Ahora se trabajara con esos resultados para dar una imagen más clara de la estructura de las soluciones de todas las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden. A su vez, este conocimiento será útil para hallar las soluciones de otros problemas que se encontraran posteriormente.

En el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, ayuda a introducir la notación de un operador diferencial. Sean p y q funciones continuas sobre un intervalo abierto $i;$ es decir, para $\alpha < x < \beta$. Se incluyen los casos $\alpha = -\infty$ o $\beta = \infty$, o los dos. Entonces, para cualquier función $\boldsymbol{\phi}$ que sea dos veces diferenciable sobre I, se define el operador diferencial L por la ecuación

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi. \tag{1}$$

Observe que $L[\phi]$ es una función sobre I. El valor de $L[\phi]$ en un punto x es

$$L[\phi](x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x).$$

Por ejemplo, si $p(x) = x^2$, $q(x) \ = 1 + x$ y $\phi(x) = sen\ 3x$, entonces

$$L[\phi](x) = (sen\ 3x)'' + x^2(sen\ 3x)' + (1 + x)sen\ 3x.$$
$$L[\phi](x) = -9\ sen\ 3x + 3x^2 \cos 3x + (1 + x)sen\ 3x$$

El operador L suele escribirse como $L = D^2 + pD + q$, en donde D es el operador derivada. En esta sección se estudia la sección lineal homogénea de segundo orden $L[\phi](x) = 0$. Dado que se acostumbra usar el símbolo y para denotar (ϕ), por lo general esta ecuación se escribirá en la forma

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2}$$

A la ecuación (2) se le asocia un conjunto de condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0 \tag{3}$$

En donde x_0 es cualquier punto en el intervalo I, y y_0 y y_0' son números reales dados. El resultado teórico fundamental para los problemas con valor inicial de las ecuaciones lineales de segundo orden se enuncia en el siguiente teorema, que es el análogo al teorema 1.3.1 para las ecuaciones lineales de primer orden. Este resultado se aplica con igual propiedad a las ecuaciones no homogéneas, por lo que el teorema se enuncia en esa forma.

Teorema 2.2.1

Considere el problema con valor inicial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0' \tag{4}$$

En donde p, q y g son continuas sobre un intervalo abierto I. Entonces existe exactamente una solución $y = \phi(x)$ de este problema y la solución existe en todo el intervalo I. (1)

Se hace hincapié en que el teorema afirma tres cosas:

1. El problema con valor inicial *tiene* una solución; en otras palabras, *existe* una solución.
2. El problema con valor inicial tiene *una sola* solución; es decir, la solución es *única*.
3. La solución es una función por lo menos dos veces diferenciable *en todo el intervalo I* en donde los coeficientes son continuos.

Para algunos problemas, es fácil probar algunas de estas afirmaciones. Por ejemplo, en la sección 2.2 se encontró que el problema con valor inicial

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y(0) = -1 \tag{5}$$

Tiene una solución

$$y = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{3}{2}e^{-x} \tag{6}$$

El hecho de que se encuentre una solución evidentemente establece que existe una solución para este problema con valor inicial. De manera semejante, la solución (6) es dos veces diferenciable, de hecho lo es cualquier número de veces, en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$ en donde los coeficientes de la ecuación diferencial son continuos. Por otra parte, no es obvio, y es más difícil demostrar, que el problema con valor inicial (5) no tiene otras soluciones que no sean la dada por la ecuación (6). Sin embargo, el teorema 2.2.1 afirma que esta solución es única, de modo que (6) es, de hecho, la única solución del problema con valor inicial (5).
Para el problema más general (4) por lo común, es posible escribir una formula simple para la solución, por lo tanto, todas las partes del teorema deben probarse por métodos generales que no entrañen el conocimiento de la solución en términos de funciones elementales. Esta es una diferencia importante entre las ecuaciones lineales de primer orden y las de segundo. La demostración del teorema 2.2.1 es bastante difícil, por lo que no se abordara aquí. Sin embargo, se aceptara este teorema como verdadero y se aplicara siempre quesea necesario. (1)

Ejemplo 1.

Encontrar el intervalo más largo en el que se tiene la certeza de que existe la solución del problema con valor inicial

$$(x^2 - 3x)y" + xy' - (x + 3)y = 0, \qquad y(1) = 2, \qquad y'(l) = 1$$

Si la ecuación diferencial dada se escribe en la forma de la ecuación (4), entonces $p(x) = 1/(x-3), q(x) = -(x\ +\ 3)/x(x-3)$ y $g(x) = 0$. Los unicos puntos de discontinuidad de los coeficientes son $x = 0$ y $x = 3$. Por consiguiente, el intervalo abierto más largo que contiene el punto inicial $x = 1$, en el que todos los coeficientes son continuos es $0 < x < 3$. Por tanto, este es el intervalo más largo para el cual el teorema 2.2.1 garantiza la existencia de la solución.

Ejemplo 2.

Hallar la solución única del problema con valor inicial

$$y" + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad y(x_0) = 0, \qquad y'(x_0) = 0,$$

En donde p y q son continuas en un intervalo abierto I que contiene a x_0.
La función $y = \phi(x) = 0$ para toda x en I evidentemente satisface la ecuación diferencial y las condiciones iniciales. Por el teorema 2.2.1, es la única solución del problema dado.

Supóngase ahora que y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuacion (2); en otras palabras,

$$L[y_1] = y_1'' + py_1' + qy_1 = 0, \tag{7}$$

Y de manera semejante para Entonces, así como en los ejemplos de la sección 2.1, es posible generar más soluciones mediante la formación de combinaciones lineales de y_1 y y_2. Se enunciara este resultado como un teorema.

Teorema 2.2.2 (Principio de superposición)

Si y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

Entonces la combinación lineal $c_1c_1 + c_2c_2$ también es una solución para cualesquiera valores de las constantes ζ_1 y ζ_2

Para demostrar el teorema 2.2.2 solamente es necesario sustituir y por

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{8}$$

En la (2); el resultado es

$$\begin{aligned} L[c_1 y_1 + c_2 y_2] &= [c_1 y_1 + c_2 y_2]'' + p[c_1 y_1 + c_2 y_2]' + q[c_1 y_1 + c_2 y_2] \\ &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1 p y_1' + c_2 p y_2' + c_1 q y_1 + c_2 q y_2 \\ &= c_1[y_1'' + p y_1' + q y_2] + c_2[y_2'' + p y_2' + q y_2] \\ &= c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]. \end{aligned}$$

Dado que $L[y_1] = 0$ y $L[y_2] = 0$, se deduce que también $L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = 0$. Por lo tanto, sin importar los valores de c_1, c_2, según se da por la ecuación (8), y satisface la ecuación diferencial (2) y se ha completado la demostración del teorema 2.2.2.
Se tiene un caso especial del teorema 2.2.3 si c_1 o c_2, es cero. Entonces se concluye que cualquier múltiplo de una solución de la ecuación (2) también es una solución.
Ahora se regresara a la cuestión de si pueden elegirse las constantes c_1 y c_2 de modo que satisfagan las condiciones iniciales (3). Estas condiciones iniciales requieren que c_1 y c_2 satisfagan las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= y_0, \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= y_0', \end{aligned} \tag{9}$$

Al resolver las ecuaciones (9) para c_1 y c_2, se encuentra que

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{y_0 y_2'(x_0) - y_0' y_2(x_0)}{y_1(x_0) y_2'(x_0) - y_1'(x_0) y_2(x_0)}, \\ c_1 &= \frac{-y_0 y_1'(x_0) - y_0' y_1(x_0)}{y_1(x_0) y_2'(x_0) - y_1'(x_0) y_2(x_0)}, \end{aligned} \tag{10}$$

O bien, en términos de determinantes,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}} \tag{11}$$

Con estos valores de c_1 y c_2, la expresión (8) satisface las condiciones iniciales (3), así como la ecuación diferencial (2).

A fin de que las expresiones para c_1 y c_2 de las ecuaciones (10) u (11) tengan sentido, es necesario que los denominadores sean diferentes de cero. Para las dos, c_1 y c_2, el denominador es el mismo; a saber, el determinante

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0). \tag{12}$$

El determinante $\boldsymbol{W}$ se conoce como **determinante wronskiano,** o simplemente **wronskiano[15],** de las soluciones y_1 y y_2. Algunas veces se utiliza la notación más amplia $W(y_1, y_2)(x_0)$ para representar la expresión del segundo miembro de la ecuación (12), haciendo resaltar de esta manera que el wronskiano depende de las funciones y_1 y y_2, y que se evalúa en el punto x_0. La argumentación precedente basta para establecer el resultado siguiente.

Teorema 2.2.3

Supóngase que y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

Y que el wronskiano

$$W = y_1y_2' - y_1'y_2$$

Es diferente de cero en el punto x_o donde se asignan las condiciones iniciales (3)

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'$$

Entonces existe una elección de las constantes c_1 y c_2 para la que $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ satisface la ecuacion diferencial (2) y las condiciones iniciales (3).

Ejemplo 3.

En el ejemplo 1 de la sección 2.1 se encontró que $y_1(x) = e^{-2x}$ y $y_2(x) = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Hallar el wronskiano de y_1 y y_2.

[15] Los determinantes wronskianos deben su nombre a Jósef Maria Hoéné-Wronski (1776-1853), quien nació en Polonia aunque pasó la mayor parte de su vida en Francia. Hombre talentoso pero inquieto, su vida estuvo marcada por disputas acaloradas frecuentes con otras personas e instituciones.

El wronskiano de estas dos funciones es

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{-5x}$$

Dado que W es diferente de cero para todos los valores de x, pueden usarse las funciones y_1 y y_2 para construir soluciones de la ecuación diferencial dada, junto con condiciones iniciales prescritas en cualquier valor de x.

El siguiente teorema justifica la expresión “solución general” que se introdujo en la sección 2.1 para la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$.

Teorema 2.2.4

Si y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

Y existe un punto x_0 en donde el wronskiano de y_1 y y_2 es diferente de cero, entonces la familia de soluciones

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

Con coeficientes arbitrarios de c_1 y c_2 incluye toda solución de la ecuación (2).

Sea ϕ cualquier solucion de la ecuacion (2). Para probar el teorema es necesario demostrar que ϕ está incluida en la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$; es decir, para alguna elección de las constantes c_1 y c_2 la combinación lineal es igual a ϕ. Sea x_0 un punto en donde el wronskiano de y_1 y y_1 es diferente de cero. Entonces, evalúense ϕ y ϕ' en este punto y se llama a estos valores y_0 y y_0' respectivamente; por tanto,

$$y_0 = \phi(x_0), \qquad y_0' = \phi'(x_0).$$

A continuación, considérese el problema con valor inicial

$$y" + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'. \tag{13}$$

La función ϕ evidentemente es una solucion de este problema con valor inicial. Por otra parte, como $W(y_1, y_2)(x_0)$ es diferente de cero, es posible (por el teorema 2.2.3) elegir c_1 y c_2 de modo que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ también sea una solución del problema con valor inicial (13). En efecto, los valores adecuados de c_1 y c_2 los dan las ecuaciones (10) u (11). La parte de unicidad del teorema 2.2.1 garantiza que estas dos soluciones del mismo problema con valor inicial en realidad son la misma función; por tanto, para la elección adecuada de c_1 y c_2,

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

Y por lo tanto, ϕ esta incluida en la familia de funciones $c_1 y_1 + c_2 y_2$. Por último, como ϕ es una solución *arbitraria* de (2), se concluye que *toda* solución de esta ecuación está incluida en esta familia. Esto completa la demostración del teorema 2.2.4.

El teorema 2.2.4 afirma que, en tanto que el wronskiano de y_1 y y_2 sea diferente de cero, la combinación lineal $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ contiene todas las soluciones de la ecuación (2). Por consiguiente, es natural (y ya se hizo esto en la sección precedente) llamar a la expresión (1)

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Ejemplo 4.

Supóngase que $y_1(x) = e^{r_1 x}$ y $y_2(x) = e^{r_2 x}$ son dos soluciones de una ecuación de la forma (1). Demostrar que forman un conjunto fundamental de soluciones si $r_1 \neq r_2$.

Calcule el wronskiano de y_1 y y_2:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\exp[(r_1 + r_2)x].$$

Dado que la función exponencial nunca es cero y como $r_2 - r_1 \neq 0$ por la proposición del problema, se deduce que W es diferente de cero para todo valor de x. Como consecuencia, y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo 5.

Demostrar que $y_1(x) = x^{1/2}$ y $y_2(x) = x^{-1}$forman un conjunto fundamental de soluciones de

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0. \tag{14}$$

En esta etapa es posible comprobar por sustitución directa que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial. Dado que $y_1'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ y $y_1''(x) = \frac{1}{4}x^{-3/2}$, se tiene

$$2x^2\left(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\right) + 3x\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) - x^{1/2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right)x^{1/2} = 0.$$

De modo semejante, $y_2'(x) = -x^{-2}$ y $y_2''(x) = 2x^{-3}$, asi que

$$2x^2(2x^{-3}) + 3x(-x^{-2}) - x^{-1} = (4 - 3 - 1)x^{-1} = 0.$$

A continuación calcule el wronskiano W de y_1 y y_2:

$$W = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{-1} \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}. \tag{15}$$

Como $W \neq 0$ para $x > 0$, se concluye que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones allí.

Teorema 2.2.5

Considérese la ecuación diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

Y existe un punto x_0 en donde el wronskiano de y_1 y y_2 es diferente de cero, entonces la familia de soluciones

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

Con coeficientes arbitrarios de c_1 y c_2 incluye toda solucion de la ecuación (2).
Cuyos coeficientes p y q son continuos sobre algún intervalo abierto I. Elija algún punto x_0 en I. Sea y_1 la solucion de la ecuacion (2) que tambien satisface las condiciones iniciales

$$y(x_0) = 1, \qquad y'(x_0) = 0,$$

Y y_2 la solución de (2) que satisface las condiciones iniciales

$$y(x_0) = 0, \qquad y'(x_0) = 1,$$

Entonces y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuacion (2).

Primero, observe que la *existencia* de las funciones y_1 y y_2 está asegurada por parte de la existencia del teorema 2.2.1. Para demostrar que forman un conjunto fundamental de soluciones, basta calcular su wronskiano en x_0:

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ejemplo 6.

Encuentre el conjunto fundamental de soluciones especificado por el teorema 2.2.5, para la ecuación diferencial

$$y" - y = 0, \tag{16}$$

Si se utiliza el punto inicial $x_0 = 0$.

En la sección 2.1 se señaló que dos soluciones de la ecuación (16) son $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$.

El wronskiano de estas soluciones es $W = -2 \neq 0$, de modo que forman un conjunto fundamental de soluciones. Sin embargo, no son las soluciones fundamentales indicadas por el teorema 2.2.5 porque no satisfacen las condiciones iniciales mencionadas en ese teorema en el punto $x = 0$.

A fin de encontrar las soluciones fundamentales especificadas por el teorema es necesario hallar las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales adecuadas. Se denota por $y_3(x)$ la solución de la ecuación (16) que satisface las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \qquad y(0) = 0. \tag{17}$$

La solución general de la ecuación (16) es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \tag{18}$$

Y se satisfacen las condiciones iniciales (17) si $c_1 = 1/2$ y $c_2 = 1/2$. Por tanto

$$y_3(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x.$$

De manera semejante, si $y_4(x)$ satisface las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \tag{19}$$

Entonces

$$y_4(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = senh\, x.$$

Como el wronskiano de y_3 y y_4 es

$$W = cosh^2 x - senh^2 x = 1,$$

Entonces estas funciones también forman un conjunto fundamental de soluciones, como se afirma en el teorema 2.2.5. Por lo tanto, la solución general de (16) puede escribirse como

$$y = k_1 \cosh x + k_2\, senh\ x, \tag{20}$$

El análisis de esta sección puede resumirse como sigue. Para encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \alpha < x < \beta$$

Primero es necesario hallar dos funciones y_1 y y_2 que satisfagan la ecuación diferencial en el intervalo $\alpha < x < \beta$. En seguida, debe tenerse la seguridad de que existe un punto en el intervalo en el que el wronskiano de y_1 y y_2 es diferente de cero. En estas circunstancias, y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y la solucion general es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

En donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Si se prescriben condiciones iniciales en un punto de $\alpha < x < \beta$, entonces pueden elegirse c_1 y c_2 de modo que satisfagan estas condiciones. (1)

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, encuentre el wronskiano del par dado de funciones

1. $e^{2x},\ e^{-3x/2}$
2. $\cos x\,, sen\ x$
3. e^{-2x}, xe^{-2x}
4. x, xe^{x}
5. $e^{x} sen\ x, e^{x}\cos x$
6. $\cos^2 x,\ 1 + \cos 2x$

En cada uno de los problemas 7 a 12, determine el mayor intervalo en el que se tiene la certeza de que el problema con valor inicial dado posee una solución única dos veces diferenciable. No intente hallar la solución.

7. $\mathrm{xy}" + 3\mathrm{y} = \mathrm{x}, \qquad \mathrm{y(l)} = 1, \qquad y'(\mathrm{l}) = 2$
8. $(x-1)y" - 3xy' + 4y = senx, \qquad y(-2) = 2, \qquad y'(-2) = 1$
9. $x(x-4)y" + 3xy' + 4y = 2, \qquad y(3) = 0, \qquad y'(3) = -1$
10. $y" + (cos\ x)y' + 3(ln\ |x|)y\ =\ 0, \qquad y(2) = 3, \qquad y'(2) = 1$
11. $(x-3)y" + xy' + (ln\ |x|)y = 0, \qquad y(1) = 0, \qquad y'(1) = 1$
12. $(x-2)y" + y' + (x-2)(tan\ x)y = 0, \qquad y(3) = 1, \qquad y'(3) = 2$

13. Compruebe que $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = x^{-1}$ son dos soluciones de la ecuación diferencial $x^2y" - 2y = 0$ para $x > 0$. A continuacion, demuestre que $c_1x^2 + c_2x^{-1}$ también es una solución de esta ecuación para cualesquiera c_1 y c_2.
14. Compruebe que $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = x^{1/2}$ son soluciones de la ecuacion diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$ para $x > 0$. En seguida demuestre que $c_1 + c_2x^{1/2}$ no es, en general, una solución de esta ecuación. ¿Por qué no?

15. Demuestre que si $y = \phi(x)$ es una solucion de la ecuación diferencial $y" + p(x)y' + q(x)y = g(x)$, en donde $g(x)$ no siempre es cero, entonces $y = c\phi(x)$, en donde c es cualquier constante diferente de uno, no es una solución. ¿Por qué?
16. ¿Es posible que $y = sen(x^2)$ sea una solucion sobre un intervalo que contenga a $x = 0$ de una ecuacion $y" + p(x)y' + q(x)y = 0$ con coeficientes continuos? De una explicación de la respuesta.
17. Si el wronskiano $W de\ f$ y g es $3e^{4x}$ y si $f(x) = e^{2x}$, halle $g(x)$.
18. Si el wronskiano $W de\ f$ y g es x^2e^x y si $f(x) = x$, halle $g(x)$.
19. Si $W(f, g)$ es el wronskiano de f y g y si $u = 2f - g$, $v = f + 2g$, halle el wronskiano $W(u, v)$ de u y v en términos de $W(f\ g)$.
20. Si el wronskiano de f y g es $x\cos x - sen\ x$ y si $u = f + 3g$, $v = f - g$, halle el wronskiano de u y v.

Semana 8

Temas

- Independencia lineal y el Wronskiano.

Objetivos

- Conocer la independencia lineal y el Wronskiano.
- Estudiar las raíces complejas de la ecuación característica.
- Conocer y entender las raíces repetidas: Reducción de orden

Actividades

- Solución de ejercicios sobre la independencia lineal y el Wronskiano.
- Solución de ejercicios sobre las raíces complejas de la ecuación característica.
- Solución de problemas sobre raíces repetidas: Reducción de orden.
- Quiz número 2, sobre los temas de las semanas 6 y 7. El estudiante contara con 1 hora para resolver los ejercicios propuestos por el profesor.

Recursos

- **Videos**

1. **Título:** El Wronskiano

   Descripción: Explicación del wronskiano y ejemplo de este.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=gg58KbrhNkg

- **PDF**

1. **Título:** capitulo-4.pdf

   Descripción: Teoría independencia lineal y el Wronskiano. Pág. 2 - 18.

   Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-4.pdf

- **Libros**

3. **Título:** Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición.

   Autor: William E. Boyce; Richard C. DiPrima

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre independencia lineal y el wronskiano. Páginas 154 - 160.

2.3. Independencia lineal y el Wronskiano

La representación de la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden como una combinación lineal de dos soluciones cuyo wronskiano es diferente de cero está estrechamente relacionada con el concepto de independencia lineal de dos funciones. Esta es una idea muy importante y tiene un significado que rebasa con mucho el contexto actual; en esta sección se le analizara brevemente.

Se dice que dos funciones f y g son **linealmente dependientes** sobre un intervalo si existen dos constantes k_1 y k_2, no ambas cero, tales que

$$k_1 f(x) + k_2 g(x) = 0 \tag{1}$$

Para toda x en el intervalo. Se dice que las funciones f y g son **linealmente independientes** sobre un intervalo si no son linealmente dependientes; es decir, si la ecuación (1) se cumple para toda x en el intervalo solo si $k_1 = k_2 = 0$. Aunque puede ser difícil determinar si un conjunto grande de funciones es linealmente dependiente o independiente, suele ser fácil dar respuesta a esta pregunta para un conjunto de solo dos funciones: son linealmente dependientes si son proporcionales entre si y linealmente independientes en caso contrario. Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de las definiciones que acaban de darse. (1)

Ejemplo 1.

Determinar si las funciones $sen\, x$ y $\cos(x - \pi/2)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes sobre un intervalo arbitrario.

Las funciones dadas son linealmente dependientes sobre cualquier intervalo ya que

$$k_1\, sen\, x + k_2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Para toda x si se eligen $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$.

Ejemplo 2.

Demostrar que las funciones e^x y e^{2x} son linealmente independientes sobre cualquier intervalo.

A fin de establecer este resultado, se supone que

$$k_1 e^x + k_2 e^{2x} = 0 \tag{2}$$

Para toda x en el intervalo; entonces, es necesario demostrar que $k_1 = k_2 = 0$. Elija dos puntos x_0 y x_1 en el intervalo, en donde $x_1 \neq x_0$. Si se evalua (2) en estos puntos, se obtiene

$$\begin{aligned} k_1 e^{x_0} + k_2 e^{2x} &= 0, \\ k_1 e^{x_1} + k_2 e^{2x_1} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

El determinante de los coeficientes es

$$e^{x_0} e^{2x_1} - e^{2x_0} e^{x_1} = e^{x_0} e^{x_1}(e^{x_1} - e^{x_0})$$

Dado que el determinante es diferente de cero, se concluye que la única solución de la ecuación (3) es $k_1 = k_2 = 0$. De donde, e^x y e^{2x} son linealmente independientes.

El siguiente teorema relaciona la independencia y dependencia lineales con el wronskiano.

Teorema 2.3.1

Si f y g funciones diferenciables sobre un intervalo abierto I y si $W(f, y)(x_0) \neq 0$ para algún punto x_0 en I, entonces f y g son linealmente independientes sobre I. De manera alternativa, si f y g son linealmente dependientes sobre I, entonces $W(f, y)(x) \neq 0$ para toda x en I.

Para probar la primera proposición del teorema 2.3.1 considérese una combinación lineal $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ y supongase que esta expresion es cero en todo el intervalo. Si se evalúan la expresión y su derivada en x_0, se tiene

$$\begin{aligned} k_1 f(x_0) + k_2 g(x_0) &= 0, \\ k_1 f'(x_0) + k_2 g'(x_0) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

El determinante de los coeficientes de las ecuaciones (4) es precisamente $W(f, y)(x_0)$, que por hipótesis es diferente de cero. Por lo tanto, la única solución de las ecuaciones (4) es $k_1 = k_2 = 0$, de modo que f y g son linealmente independientes.

La segunda parte del teorema 2.3.1 se deduce de manera inmediata a partir de la primera. Sean f y g linealmente dependientes y supóngase que la conclusión es falsa; es decir, $W(f, y)$ no es cero en todo punto de I. Entonces, existe un punto x_0 tal que $W(f, y)(x_0) \neq 0$; por la primera parte del teorema 2.3.1, esto significa que f y g son linealmente independientes, lo cual es una contradicción, con lo que se completa la demostración.

Este resultado puede aplicarse a las dos funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{2x}$ analizadas en el ejemplo 2. Para cualquier punto x_o se tiene

$$W(f,g)(x_0) = \begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{2x_0} \\ e^{x_0} & 2e^{2x_0} \end{vmatrix} = e^{3x_0} \neq 0 \tag{5}$$

Por consiguiente, las funciones e^x y e^{2x} son linealmente independientes sobre cualquier intervalo.

Es necesario tener cuidado en no leer demasiado en el teorema 2.3.1. En particular, dos funciones f y g puede ser linealmente independientes aun cuando $W(f,g)(x) = 0$ para toda x en el intervalo I.

Ahora se analizaran todavía más las propiedades del wronskiano de dos soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. El siguiente teorema, que quizá sorprenda, da una formula explicita simple para el wronskiano de dos soluciones cualesquiera de cualquiera de esas ecuaciones. (1)

Teorema 2.3.2 (Teorema de Abel)[16]

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{6}$$

en donde p y g son continuas sobre un intervalo abierto I, entonces el wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ está dado por

$$W(y_1, y_2)(x) = c \exp\left[-\int p(x)dx\right]. \tag{7}$$

En donde c es cierta constante que depende de y_1 y y_2, pero no de x. Es más, $W(y_1, y_2)(x)$ Es cero para toda x en I (si $c = 0$), o bien, nunca es cero en I (si $c \neq 0$).

[16] El resultado del teorema 2.3.2 fue deducido por el matemático noruego Niels H. Abel (1802-1829) en 1827 y se conoce como fórmula de Abel. Abel también demostró que no existe formula general para resolver una ecuación de quinto grado en términos de operaciones algebraicas explicitas sobre los coeficientes del polinomio, resolviendo así una interrogante que había permanecido sin respuesta desde el siglo XVI. Sin embargo, sus contribuciones más importantes fueron en el análisis, en particular en el estudio de las funciones elípticas. Su trabajo no fue reconocido con amplitud hasta después de su muerte. El distinguido matemático francés Legendre lo llamo “monumento más duradero que el bronce”.

Para probar el teorema de Abel, nótese en principio que y_1 y y_2 satisfacen

$$\begin{aligned} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 &= 0, \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

Si se multiplica la primera ecuación por $-y_2$, la segunda por y_1 y se suman las ecuaciones resultantes, se obtiene

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0. \tag{9}$$

Si se hace $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$ y se observa que

$$W' = y_1y_2'' - y_1''y_2, \tag{10}$$

Es posible escribir la ecuación (9) en la forma

$$W' + pW = 0. \tag{11}$$

La ecuación (11) puede resolverse de inmediato, ya que es tanto una ecuación lineal de primer orden (sección 1.2) como una separable (sección 1.4). Por tanto,

$$W(x) = c\exp\left[-\int p(x)dx\right]. \tag{12}$$

En donde c es una constante. El valor de c depende del par de soluciones de (6) que intervengan. Sin embargo, dado que la función exponencial nunca es cero, $W(x)$ no es cero a menos que $c = 0$, en cuyo caso $W(x)$ es cero para toda x, con lo que se completa la demostración del teorema 2.3.2.

Observe que los wronskianos de dos conjuntos fundamentales cualesquiera de soluciones de la misma ecuación diferencial solo pueden diferir en una constante multiplicativa y que pueda determinarse el wronskiano de cualquier conjunto fundamental de soluciones hasta una constante multiplicativa, sin resolver la ecuación diferencial.

Ejemplo 3.

En el ejemplo 5 de la sección 2.2 se comprobó que $y(x) = x^{1/2}$ y $y(x) = x^{-1}$ son soluciones de la ecuación

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0. \tag{13}$$

Comprobar que el wronskiano de y_1 y y_2 esta dado por la ecuación (12).

Con base en el ejemplo que acaba de citarse se sabe que $W(y_1, y_2)(x) = -(3/2)x^{-3/2}$. Para utilizar la ecuación (12) es necesario escribir la ecuación diferencial (13) en la forma estándar con el coeficiente de y'' igual a uno. Por tanto, se obtiene

$$y'' + \frac{3}{2x}y' - \frac{1}{2x^2}y = 0,$$

De modo que $p(x) = 3/2$. De donde,

$$W(y_1, y_2)(x) = c\exp\left[-\int \frac{3}{2x}dx\right] = c\exp\left(-\frac{3}{2}\ln x\right) = cx^{-3/2} \tag{14}$$

La ecuación (14) da el wronskiano de cualquier par de soluciones de (13). Para las soluciones particulares dadas en este ejemplo es necesario elegir $c = -3/2$.

Puede establecerse una versión más poderosa del teorema 2.3.1 si las dos funciones que intervienen son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.

Teorema 2.3.3

Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación diferencial (6)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

En donde p y g son continuas sobre un intervalo abierto I, entonces y_1 y y_2 son linealmente dependientes sobre I, si y solo si $W(y_1, y_2)(x)$ es cero para toda x en I. De manera alternativa, y_1 y y_2 son linealmente independientes sobre I si y solo si $W(y_1, y_2)(x)$ es nunca es cero en I.

Por supuesto, por el teorema 2.3.2 se sabe que $W(y_1, y_2)(x)$ es cero en todo punto de I, o bien, no es cero en ningún punto de I. Al probar el teorema 2.3.3, observe en primer lugar que si y_1 y y_2 son linealmente dependientes, entonces $W(y_1, y_2)(x)$ es cero para toda x en I, por el teorema 2.3.1. Queda por demostrar la inversa; es decir, si $W(y_1, y_2)(x)$ es cero en todo el intervalo I, entonces y_1, y y_2 son linealmente dependientes. Sea x_0 cualquier punto en I; entonces necesariamente $W(y_1, y_2)(x) = 0$. Como consecuencia, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= 0, \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

Para c_1 y c_2 tiene una solución no trivial. Si se usan estos valores de c_1 y c_2 sea $\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Entonces ϕ es una solución de la ecuación (6), y, por las ecuaciones (15), ϕ también satisface las condiciones iniciales

$$\phi(x_0) = 0, \qquad \phi'(x_0) = 0. \tag{16}$$

Por consiguiente, por la parte de unicidad del teorema 2.2.1, o por el ejemplo 2 de la sección 2.2, $\phi(x) = 0$ para toda x en I. Ya que $\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, en donde c_1 y c_2 no son cero las dos, esto significa que y_1 y y_2 son linealmente dependientes. La proposición alternativa del teorema se deduce de inmediato.
Ahora es posible resumir los hechos acerca de los conjuntos fundamentales de soluciones, wronskianos e independencia lineal de la siguiente manera: sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación (6),

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

En donde p y q son continuas sobre un intervalo abierto I. Entonces, las cuatro proposiciones siguientes son equivalentes, en el sentido de que cada una incluye a las otras tres.

1. Las funciones y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones sobre I.
2. Las funciones y_1 y y_2 son linealmente independientes sobre I.
3. $W(y_1, y_2) \neq 0$ para algun x_0 en I.
4. $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para toda x en I.

La expresión **espacio vectorial** también se aplica a otras colecciones de objetos matemáticos que obedecen las mismas leyes de la adición y la multiplicación por escalares de los vectores geométricos. Por ejemplo, es posible demostrar que el conjunto de funciones que son dos veces diferenciables sobre el intervalo abierto I forma un espacio vectorial. De modo semejante, el conjunto V de funciones que satisfacen la ecuación (6) también forma un espacio vectorial. (1)

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, determine si el par de funciones dado es linealmente independiente o linealmente dependiente.

1. $f(x) = x^2 + 5x, \qquad g(x) = x^2 - 5x$
2. $f(x) = cos\ 3x, \qquad g(x) = 4\cos^3 x - 3\ cos\ x$
3. $f(x) = e^{\lambda x}\ cos\ \mu x, \qquad g(x) = e^{\lambda x} sen\ \mu x, \qquad \mu \neq 0$

4. $f(x) = e^{3x}$, $\quad g(x) = e^{3(x-1)}$
5. $f(x) = 3x - 5$, $\quad g(x) = 9x - 15$
6. $f(x) = x$, $\quad g(x) = x^{-1}$

7. El wronskiano de dos funciones es $W(x) = x\, sen^2 x$. ¿Las funciones son linealmente independientes o linealmente dependientes? ¿Por qué?
8. El wronskiano de dos funciones es $x^2 - 4$. ¿Las funciones son linealmente independientesbo linealmente dependientes? ¿Por que?
9. Si las funciones y_1 y y_2, son soluciones linealmente independientes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, demuestre que c_1y_1 y c_2y_2 también son soluciones linealmente independientes, siempre que ninguna de c_1 o c_2 sea cero.
10. Si las funciones y_1 y y_2, son soluciones linealmente independientes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, demuestre que $y_3 = y_1 + y_2$ y $y_4 = y_1 - y_2$ tambien forman un conjunto linealmente independiente de soluciones. A la inversa, si y_3 y y_4 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial, demuestre que también y_1 y y_2 lo son.
11. Si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, determine en qué condiciones las funciones $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$ y $y_4 = b_1y_1 + b_2y_2$ tambien forman un conjunto linealmente independiente de soluciones.
12. a) Demuestre que cualquier vector bidimensional puede escribirse como una combinación lineal de $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.
    b) Demuestre que si los vectores $x = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}$ y $y = y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$ son linealmente independientes, entonces cualquier vector $z = z_1\boldsymbol{i} + z_2\boldsymbol{j}$ puede expresarse como una combinación lineal de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$. Observe que si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son linealmente independientes, entonces $x_1y_2 - x_2y_2 \neq 0$. ¿Por qué?

En los problemas 13 y 14, encuentre el wronskiano de soluciones de la ecuación diferencial dada sin resolver esta

13. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$
14. $(cos\, x)y'' + (sen\, x)y' - xy = 0$

Ejercicios propuestos para el segundo quiz.

a. Una bola de masa de 0.5 kg se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 25 m/s desde el techo de un edificio que tiene 40 m de altura. Desprecie la resistencia del aire.
   a. Encuentre la altura máxima que alcanza la bola por arriba del piso.
   b. Si se supone que en su trayecto hacia abajo la bola no cae en el edificio, halle el tiempo que transcurre hasta que choca contra el piso.

b. Determine si las siguientes ecuaciones son exactas. En caso de serlo, halle la solución.
   a. $(3x^2 - 2xy + 2)dx + (6y^2 - x^2 + 3)dy = 0$
   b. $(2x - 1)dx + (3y + 7) = 0$
   c. $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$

c. Demuestre que la siguiente ecuación es homogéneas y encuentre su solución.
   a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$
   b. $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$

Semana 9

Temas

- Raíces complejas de la ecuación característica.
- Raíces repetidas: Reducción de orden.

Objetivos

- Estudiar las raíces complejas de la ecuación característica.
- Conocer y entender las raíces repetidas: Reducción de orden

Actividades

- Socialización de conceptos básicos sobre las raíces complejas de la ecuación característica y las raíces repetidas por el método de reducción del orden.
- Solución de ejercicios sobre las raíces complejas de la ecuación característica y raíces repetidas: Reducción de orden.
- Taller número 2, sobre los temas de las semanas 8 y 9. El estudiante contara con 1 hora para resolver los ejercicios propuestos por el profesor.

Recursos

- **Videos**

1. **Título:** Raíces complejas de la ecuación característica 1

   Descripción: Ejemplo solución de raíces complejas de la ecuación característica.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=4SuF6QQIZFs

2. **Título:** Raíces complejas de la ecuación característica 2

   Descripción: Ejemplo solución de raíces complejas de la ecuación característica.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=7YjTHBBWcNI

3. **Título:** Raíces complejas de la ecuación característica 3

   Descripción: Ejemplo solución de raíces complejas de la ecuación característica.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=2arBa7d7rLI

- **PDF**

1. **Título:** 2 - UII_2_6_2_2.pdf

   Descripción: Ecuación característica (raíces reales y distintas, raíces reales e iguales, raíces complejas conjugadas)

   Link:http://www.depi.itch.edu.mx/aaguirre/pdf/mate_v/pdf/UII/UII_2_6_2_2.pdf

2. **Título:** capitulo-4.pdf

   Descripción: Reducción de una ecuación diferencial de segundo orden a una de primer orden para su solución.

   Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-4.pdf

- **Páginas Web**

1. **Título:** Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, por WikiMatematica.org

   Descripción: Definición y ejemplos de raíces repetidas y raíces complejas.

   Link:http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Ecuaciones_lineales_homogéneas_con_coeficientes_constantes#CASO_I_.22RA.C3.8DCES_REALES_Y_DISTINTAS.22

- **Libros**

1. **Título:** Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición.

   Autor: William E. Boyce; Richard C. DiPrima

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre raíces complejas y raíces repetidas. Páginas 160 - 177.

2.4. Raíces complejas de la ecuación característica

En esta sección se continúa el análisis de la ecuación

$$ay" + by' + cy = 0, \tag{1}$$

En donde a, b y c son números reales dados. Si se buscan soluciones de la forma $y = e^{rx}$, entonces r debe ser una raíz de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2}$$

Si las raíces r_1 y r_2 son reales y diferentes, lo que ocurre siempre que el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo, entonces la solución general de (1) es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}. \tag{3}$$

Ahora, suponga que $b^2 - 4ac$ es negativo; entonces las raíces de (2) son números complejos conjugados; se les denota por

$$r_1 = \lambda + i\mu, \qquad r_2 = \lambda - i\mu \tag{4}$$

En donde λ y μ son reales. Las expresiones correspondientes para y son

$$y_1(x) = \exp[(\lambda + i\mu)x], y_2(x) = \exp[(\lambda - i\mu)x]. \tag{5}$$

La primera tarea es examinar el significado de estas expresiones, lo cual comprende la evaluación de la función exponencial para un número complejo. Por ejemplo, si $\lambda = -1$, $\mu = 2$ y $x = 3$; entonces, por la ecuacion (5),

$$y_1(3) = e^{3+6i}. \tag{6}$$

¿Qué significa elevar un número, como e, a una potencia compleja? La respuesta es proporcionada por una importante relación conocida como fórmula de Euler.

Formula de Euler. Para dar significado a las ecuaciones (5) es necesario contar con una definición de la función exponencial compleja. Por supuesto, se desea que la definición se reduzca a la función exponencial real conocida cuando el exponente es real. Existen varias

maneras de realizar esta extensión de la función exponencial. Aquí se aplica un método basado en series infinitas.
Recuerde, por lo visto en calculo elemental, que la serie de Taylor para e^x en torno a $x = 0$ es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{7}$$

Si ahora se supone que *x* puede sustituirse por *ix* en (7), se tiene

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \end{aligned} \tag{8}$$

En donde la suma se ha separado en sus partes real e imaginaria, aplicando el hecho de que $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$, etcetera. La primera serie de la ecuación (8) es precisamente la serie de Taylor para $cos\ x$ en torno a $x = 0$ y la segunda es la serie de Taylor para $sen\ x$ en torno a $x = 0$. Por tanto, se tiene

$$e^{ix} = \cos x + sen\ x. \tag{9}$$

La ecuación (9) se conoce como fórmula de Euler y es una relación matemática extremadamente importante. Aunque su deducción se basa en la suposición no verificada de que se puede usar la serie (7) para valores complejos, así como para valores reales, de la variable independiente, la intención es utilizar esta deducción solamente para que la ecuación (9) parezca razonable. Ahora los hechos se colocan sobre una base firme al adoptar la ecuación (9) como la *definición* de e^{ix}. En otras palabras, siempre que se escribe e^{ix} se refiere a la expresión del segundo miembro de (9).
Existen algunas variantes de la fórmula de Euler que también vale la pena hacer notar. Si en (9) se sustituye x por $-x$ y se recuerda que $cos\ (-x) = cos\ x$ y $sen(-x) = -sen\ x$, se tiene

$$e^{-ix} = \cos x - i\ sen\ x. \tag{10}$$

Además, si en la ecuación (9) se sustituye x por μx, entonces se obtiene una versión generalizada de la fórmula de Euler; a saber,

$$e^{i\mu x} = \cos \mu x + sen\ \mu x. \tag{11}$$

A continuación, se desea ampliar la definición de la función exponencial hacia exponentes complejos arbitrarios de la forma $(\lambda + i\mu)x$. Dado que se desea que las propiedades acostumbradas de la función exponencial se cumplan para los exponentes complejos, es evidente que se desea que $exp[(\lambda + i\mu)x]$ satisfaga

$$e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} \tag{12}$$

Entonces, si se sustituye esta expresión por $e^{i\mu x}$ en (11), se obtiene

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)x} &= e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) \\ &= e^{\lambda x} \cos \mu x + i e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x. \end{aligned} \tag{12}$$

Ahora se tomara a la ecuación (13) como la definición de $exp[(\lambda + i\mu)x]$. El valor de la función exponencial con un exponente complejo es un número complejo cuyas partes real e imaginaria están dadas por los términos del segundo miembro de (13). Observe que las partes real e imaginaria de $exp[(\lambda + i\mu)x]$ se expresan por completo en términos de funciones elementales con valores reales. Por ejemplo, la cantidad de la ecuación (6) tiene el valor

$$e^{-3+6i} = e^{-3} \cos 6 + ie^{-3} \operatorname{sen} 6 \cong 0.0478041 - 0.0139113i.$$

Con las definiciones (9) y (13) resulta directo demostrar que las leyes usuales de los exponentes son válidas para la función exponencial compleja. También es fácil verificar que la fórmula de derivación

$$\frac{d}{dx}(e^{rx}) = re^{rx} \tag{14}$$

También se cumple para valores complejos r.

Soluciones con valores reales. Las funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dadas por las ecuaciones (5) y con el significado expresado por la (13), son soluciones de la ecuación (1) cuando las raíces de la ecuación característica (2) son los números complejos $\lambda \pm i\mu$. Desafortunadamente, las soluciones y_1 y y_2 son funciones con valores complejos, mientras que en general sería preferible tener soluciones con valores reales, en caso de ser posible. Pueden encontrarse estas soluciones como una consecuencia del teorema 2.2.2, el que afirma que si y_1 y y_2 son soluciones de (1), entonces cualquier combinación lineal de *y x* y *y2* también es una solución. En particular, al formar la suma y después la diferencia de y_1 y y_2, se tiene

$$y_1(x) + y_2(x) = e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) + e^{\lambda x}(\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x)$$
$$= 2e^{\lambda x} \cos \mu x$$

Y

$$y_1(x) - y_2(x) = e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) - e^{\lambda x}(\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x)$$
$$= 2ie^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x.$$

De donde, si se desprecian los factores constantes 2 y *2i*, respectivamente, se obtiene un par de soluciones con valores reales,

$$u(x) = e^{\lambda x} \cos \mu x, \qquad v(x) = e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x. \tag{15}$$

Observe que u y v son tan solo las partes real e imaginaria, respectivamente, de y_1.
Por calculo directo es posible demostrar que el wronskiano de u y v es

$$W(u, v)(x) = \mu e^{2\lambda x} \tag{16}$$

Por tanto, mientras $\mu \neq 0$, el wronskiano W no es cero, de modo que u y v forman un conjunto fundamental de soluciones. (Por supuesto, si $n = 0$, entonces las raices son reales y no es aplicable el análisis de esta sección). Como consecuencia, si las raíces de la ecuación característica son los números complejos $\lambda \pm i\mu$, con $\mu \neq 0$, entonces la solución general de la ecuación (1) es

$$y = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x, \tag{17}$$

En donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Observe que la solución (17) puede escribirse tan pronto como se conocen los valores de λ y μ. (1)

Ejemplo 1.

Encontrar la solución general de

$$y'' + y' + y = 0 \tag{1}$$

La ecuación característica es

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

Y sus raíces son

$$r = -\frac{1 \pm (1-4)^{\frac{1}{2}}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, $\lambda = -1/2$ y $\mu = \sqrt{3}/2$, de modo que la solución general de la ecuación (18) es

$$y = c_1 e^{-x/2} \cos\frac{\sqrt{3x}}{2} + c_2 e^{-x/2} sen\ \frac{\sqrt{3x}}{2} \tag{19}$$

Ejemplo 2.

Encontrar la solución general de

$$y'' + 9y = 0 \tag{20}$$

La ecuación característica es $r^2 + \mathbf{9} = 0$ con las raíces $r = \pm 3i;$ por tanto, λ=0 y μ=3. La solución general es

$$\boldsymbol{y = c_1 \cos 3x + c_2 sen\ 3x} \tag{21}$$

Observe que si la parte real de las raíces es cero, como en este ejemplo, entonces no hay factor exponencial en la solución.

Ejemplo 3.

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \qquad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \tag{22}$$

La ecuación característica es $16r^2 - 8r + 145 = 0$ y sus raices son $r = 1/4 \pm 3i$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{x/4} cos\ 3x + c_2 e^{x/4}\ sen\ 3x. \tag{23}$$

Para aplicar la primera condición inicial se hace x=0 en la ecuación (23); esto da

$$y(0) = c_1 = -2.$$

Para la segunda condición inicial es necesario derivar la (23) y después hacer x = 0. Así, se encuentra que

$$y'(0) = \frac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1$$

De lo cual $c_2 = 1/2$. Si se usan estos valores de c_1 y c_2 en la (23), se obtiene

$$y = -2e^{\frac{x}{4}} \cos 3x + \frac{1}{2} e^{x/4} \operatorname{sen} 3x \tag{24}$$

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, aplique la fórmula de Euler para escribir la expresión dada en la forma $a + ib$.

1. $\exp(l + 2i)$
2. $\exp(2 — 3\, i)$
3. $e^{i\pi}$
4. $e^{2-(\pi/2)i}$
5. 2^{1-i}
6. π^{-1+2i}

En cada uno de los problemas 7 a 16, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada

7. $y'' - 2y' + 2\,y = 0$
8. $y'' - 2y' + 6\,y = 0$
9. $y'' + 2y' - 8y = 0$
10. $y'' + 2\,y' + 2\,y = 0$
11. $y'' + 6y' + 13y = 0$
12. $4\,y" + 9\,y = 0$
13. $y'' + 2y' + 1.25y = 0$
14. $9y'' + 9\,y' — 4y = 0$
15. $y'' + y' + 1.25y = 0$
16. $y'' + 4\,y' + 6.25\,y = 0$

En cada uno de los problemas 17 a 22 halle la solución del problema con valor inicial dado. Trace la gráfica de la solución y describa su comportamiento para *x* creciente.

17. $y" + 4\,y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
18. $y" + 4\,y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
19. $y" - 2y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 2$

20. $y'' + y = 0, y(\pi/3) = 2, \quad y'(\pi/3) = -4$
21. $y'' + y' + 1.25\,y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$
22. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(\pi/4) = 2, \quad y'(\pi/4) = -2$

2.5. Raíces repetidas; reducción de orden

En secciones anteriores se mostró como resolver la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

Cuando las raíces de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2}$$

Son reales y diferentes, o bien, complejas conjugadas. Ahora se considerara la tercera posibilidad; a saber, que las dos raíces r_1 y r_2 son iguales. Este caso se presenta cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es cero y, por la formula cuadrática, se deduce que

$$r_1 = r_2 = -b/2a \tag{4}$$

La dificultad salta a la vista inmediatamente; las dos raíces dan la misma solución

$$y_1(x) = e^{-bx/2a}$$

De la ecuación diferencial (1), y no es obvio como hallar una segunda solución. (1)

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \tag{5}$$

La ecuación característica es

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0$$

A fin de realizar este procedimiento se sustituye $y = v(x)y_1(x)$ en (1) y se usa la ecuación resultante para hallar $v(x)$. Si parte de

$$y = v(x)y_1(x) = v(x)e^{-2x} \tag{6}$$

Se tiene

$$y' = v'(x)e^{-2} - 2v(x)e^{-2} \tag{7}$$

Y

$$y'' = v''(x)e^{-2x} - 4v'(x)e^{-2} + 4v(x)e^{-2x} \tag{8}$$

Al sustituir las expresiones de las ecuaciones (6), (7) y (8) en (5) y agrupar términos, se obtiene

$$[v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) + 4v'(x) - 8v(x) + 4v(x)]e^{-2x} = 0$$

Que se simplifica a

$$v''(x) = 0. \tag{9}$$

Por consiguiente,

$$v'(x) = c_1$$

Y

$$\boldsymbol{v(x) = c_1 x + c_2} \tag{10}$$

En donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Por último, al sustituir *v(x)* de la ecuación (6) por la expresión dada en la (10), se obtiene

$$\boldsymbol{y = c_1 x e^{-2x} + c_2 e^{-2x}} \tag{11}$$

El segundo término del segundo miembro de la ecuación (11) corresponde a la solución original $y_1(x) = exp(-2x)$, pero el primer término surge de una segunda solucion a saber, $y_2(x) = x\, exp(-2x)$. Es evidente que estas dos soluciones no son proporcionales, pero puede verificarse que son linealmente independientes al calcular su wronskiano:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix}$$
$$= e^{-4x} - 2xe^{-4x} + 2xe^{-4x} = e^{-4x} \neq 0$$

Por lo tanto,

$$y_1(x) = e^{-2x}, \qquad y_2(x) = xe^{-2x} \tag{12}$$

Forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (5), y la solución general de esa ecuación queda dada por (11). (1)

Ejemplo 2.

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y'' - y' + 0.25y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1/3 \tag{13}$$

La ecuación característica es

$$r^2 - r + 0.25 \;=\; 0,$$

De modo que las raíces son $r_1 = r_2 = 1/2$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2} \tag{14}$$

La primera condición inicial exige que

$$\boldsymbol{y(0) = c_1 = 2.}$$

Para satisfacer la segunda condición inicial en primer lugar se deriva la ecuación (14) y se hace x=0; esto da

$$y'(0) = \frac{1}{2}c_1 + c_2 = \frac{1}{3}$$

De modo que $c_2 = -2/3$. Por tanto, la solucion del problema con valor inicial es

$$\boldsymbol{y = 2xe^{x/2} - 2/3\, xe^{x/2}} \tag{15}$$

Resumen. Ahora es posible resumir los resultados que se obtuvieron para las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes,

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

Sean r_1 y r_2 las raíces del polinomio característico correspondiente

$$ar^2 + br + c = 0$$

Si r_1 y r_2 son reales pero no iguales, entonces la solución general de la ecuación diferencial (1) es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Si r_1 y r_2 son complejas conjugadas $\lambda \pm i\mu$, entonces la solución general es

$$y = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2\, e^{\lambda x}\, sen\, \mu x \tag{16}$$

Si r_1 y r_2, entonces la solución general es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{17}$$

Reducción de orden. Vale la pena hacer notar que el primer procedimiento utilizado en esta sección para las ecuaciones con coeficientes constantes es de aplicación mas general. Supóngase que se conoce una solución $y_1(x)$, que no sea cero en todo punto, de

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0. \tag{18}$$

Para encontrar una segunda solución, sea

$$y = v(x)y_1(x) \tag{19}$$

Entonces

$$y' = v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x),$$
$$y'' = v''(x)y_1(x) + 2v'(x)y_1'(x) + v(x)y_1''(x).$$

Si se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (18) por sus expresiones que acaban de darse y se agrupan los términos, se encuentra que

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0. \tag{20}$$

Dado que y_1 es una solución de (18), el coeficiente de v en la (20) es cero, de modo que la ecuación (20) queda

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0 \tag{21}$$

Ejemplo 3.

Dado que $y_1(x) = x^{-1}$ es una solucion de

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0 \tag{22}$$

Hallar una segunda solución linealmente independiente.
Se hace $y = v(x)x^{-1}$; entonces

$$y' = v'x^1 - vx^{-2}, y'' = v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}.$$

Si se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (22) y se agrupan términos se obtiene

$$\begin{aligned} &2x^2(v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}) + 3x(vx^{-1} - vx^{-2}) - vx^{-1} \\ &= 2xv'' + (-4+3)v' + (4x^{-1} - 3x^{-1} - x^{-1})v \\ &= 2xv'' - v' = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Observe que el coeficiente de v es cero, como debe ser; esto permite tener una útil comprobación de los pasos algebraicos.
Si se separan las variables en la ecuación (23) y se despeja $v'(x)$, se encuentra que

$$v'(x) = cx^{1/2}$$

Entonces

$$v(x) = \frac{2}{3}cx^{3/2} + k$$

Se concluye que

$$y = \frac{2}{3}cx^{1/2} + kx^{-1} \tag{24}$$

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' - 2y' + y = 0$
2. $9y'' + 6y' + y = 0$
3. $4y'' - 4y' - 3y = 0$
4. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
5. $y'' - 2y' + 10y = 0$
6. $y'' - 6y' + 9y = 0$

En cada uno de los problemas 7 a 10, resuelva el problema con valor inicial dado.

7. $9y'' - 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
8. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
9. $9y'' + 6y' + 82y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$
10. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1$

En cada uno de los problemas 11 a 15, aplique el método de reducción de orden para encontrar una segunda solución de la ecuación diferencial dada.

11. $x^2y'' + 2xy' = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = 1$
12. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x$
13. $x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1}$
14. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x$
15. $xy'' - y' + 4x^3y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = sen\, x^2$

Ejercicios propuestos para el segundo taller.

1. Determine si el par de funciones dado es linealmente independiente o linealmente dependiente.

   a. $f(x) = x^2 + 5x, \qquad g(x) = x^2 - 5x$
   b. $f(x) = e^{\lambda x} \, cos \, \mu x, \qquad g(x) = e^{\lambda x} sen \, \mu x, \qquad \mu \neq 0$
   c. $f(x) = x, \qquad g(x) = x^{-1}$

2. Aplique la fórmula de Euler para escribir la expresión dada en la forma $a + ib$.
   a. $\exp(1 + 2i)$
   b. $\exp(2 — 3i)$
   c. π^{-1+2i}

3. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.
   a. $y'' - 2y' + y = 0$
   b. $9y'' + 6y' + y = 0$

Semana 10

Actividades

- Examen parcial número 2, sobre los temas de las semanas 6 a 9. El estudiante deberá resolver los ejercicios propuestos por el profesor.

Ejercicios propuestos para el segundo parcial.

1. Un paracaidista que pesa $180\ lb$ (incluyendo el equipo) cae verticalmente desde una altura de $5000\ pies$, y abre su paracaídas después de 10 segundos de caída libre. Suponga que la fuerza de la resistencia del aire es de $0.7|v|$ cuando el paracaídas está cerrado y de $12|v|$ cuando el paracaídas está abierto, en donde la velocidad v se da en pies por segundo.
   e) Encuentre la velocidad del paracaidista al abrirse el paracaídas.
   f) Halle la distancia que cae antes de que se abra el paracaídas.
   g) ¿Cuál es la velocidad límite v_l después de que se abre el paracaídas?
   h) Estime cuánto tiempo permanece el paracaidista en el aire después de que el paracaídas se abre.
2. Demuestre que la siguiente ecuación es homogénea y encuentre su solución.
$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$
3. Encuentre el wronskiano de soluciones de la ecuación diferencial dada sin resolver esta
$$x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0$$
4. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada
   a. $y'' + 4\,y' + 6.25\,y = 0$
   b. $y'' - 6y' + 9y = 0$
5. Aplique el método de reducción de orden para encontrar una segunda solución de la ecuación diferencial dada.
   a. $x^2y'' + 2xy' = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = 1$
   b. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x$

Semana 11

Temas

- Ecuaciones no homogéneas; método de los coeficientes indeterminados.
- Variación de parámetros.
- Teoría general de las ecuaciones de n-ésimo orden.

Objetivos

- Estudiar y comprender las Ecuaciones no homogéneas; método de los coeficientes indeterminados.
- Conocer y entender el método variación de parámetros.

Actividades

- Socialización de conceptos básicos de las ecuaciones no homogéneas, variación de parámetros y teoría general de las ecuaciones de n-ésimo orden.
- Solución de problemas sobre ecuaciones no homogéneas; método de los coeficientes indeterminados y variación de parámetros.

Recursos

- **Videos**

1. **Título:** Ecuación Diferencial No Homogénea Coeficientes Indeterminados

   Descripción: Solución de ejemplo ecuación diferencial no homogénea Coeficientes Indeterminados.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=1XVWZZpjnnw

- **PDF**

1. **Título:**

Descripción: Teoría, ejemplo y ejercicios ecuaciones no homogéneas por el método de los coeficientes indeterminados. Pág. 41 – 48.

Link:http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Analisis matematico/Temas/C10_Lineales_Orden_Superior.pdf

- **Libros**

1. **Título:** Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición.

   Autor: William E. Boyce; Richard C. DiPrima

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre Ecuaciones no homogéneas y métodos de solución. Páginas 177 - 197.

   Teoría general de las ecuaciones de n-ésimo orden. Páginas 219 - 225.

2. **Título:** Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.

   Descripción: Teoría preliminar de las ecuaciones de orden superior. Páginas 113 – 123.

   Coeficientes indeterminados. Páginas 142 – 163.

   Variación de parámetros. Páginas 163 – 169.

   Autor: Dennis G. Zill

2.6. Ecuaciones no homogéneas; métodos de los coeficientes indeterminados

Ahora se regresara a la ecuación no homogénea

$$L[y] = y'' + P(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{1}$$

En donde p, q y g son funciones (continuas) dadas sobre el intervalo abierto I. La ecuación

$$L[y] = \; y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

En la que $g(x) = 0$ y p y q son las mismas de (1), se llama ecuación homogénea correspondiente a la ecuación (1). Los dos resultados siguientes describen la estructura de las soluciones de la ecuación no homogénea (1) y proporcionan una base para construir su solución general.

Teorema 2.6.1

Si Y_1 y Y_2, son dos soluciones de la ecuación no homogénea (1), entonces su diferencia $Y_1 - Y_2$, solución de la ecuación homogénea correspondiente (2), Si, ademásy Y_1 y Y_2 son un conjunto fundamental de soluciones de (2), entonces

$$Y_1(x) - Y_2(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{3}$$

En donde c_1 y c_2 son ciertas constantes.

Para probar este resultado, observe que Y_1 y Y_2 satisfacen las ecuaciones

$$L[Y_1](x) = g(x), \qquad L[Y_2](x) = g(x) \tag{4}$$

Si se resta la segunda de estas ecuaciones de la primera, se tiene

$$L[Y_1](x) - L[Y_2](x) = g(x) - g(x) = 0$$

Sin embargo,

$$L[Y_1] - L[Y_2] = L[Y_1 - Y_2]$$

Porque L es un operador lineal, de modo que (5) queda

$$L[Y_1 - Y_2](x) = 0. \tag{5}$$

Teorema 2.6.2

La solución general de la ecuación no homogénea (1) puede escribirse de la forma

$$y = \phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x) \tag{6}$$

En donde y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones de ecuación homogénea correspondiente (2). c_1 y c_2, son constantes arbitrarias y y es alguna solución específica de la ecuación no homogénea (1).

En palabras algo diferentes, el teorema 2.6.2 afirma que para resolver la ecuación no homogénea (1) es necesario realizar tres cosas:

1. Hallar la solución general $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente. Esta solución suele denominarse solución complementaria y puede denotarse por $y_c(x)$.
2. Encontrar alguna solución sencilla $Y(x)$ de la ecuación no homogénea. A menudo a esta solución se le menciona como solución particular.
3. Sumar las funciones encontradas en los dos pasos precedentes.

Método de los coeficientes indeterminados. Este método requiere que se haga una suposición inicial acerca de la forma de la solución particular $Y(x)$, pero se dejan los coeficientes sin especificar. La expresión supuesta se sustituye en la ecuación (1) y se intenta determinar los coeficientes de manera que esa ecuación se satisfaga. En caso de buen resultado se encontró una solución de la ecuación diferencial (1) y es posible usarla como la solución particular $Y(x)$. Si no es posible determinar los coeficientes, significa que no existe solución de la forma supuesta. En este caso puede modificarse la suposición inicial e intentar una vez más. (1)

La ventaja más importante del método de los coeficientes indeterminados es que su ejecución es directa una vez que se hace la suposición acerca de la forma de *Y(x)*. Su principal limitación es que es útil fundamentalmente para ecuaciones en las que es fácil escribir de antemano la forma correcta de la solución particular. Por esta razón, este método suele usarse solo para problemas en los que la ecuación homogénea tiene coeficientes constantes y el término no homogéneo se restringe a una clase relativamente pequeña de funciones. En especial, solo se consideran términos homogéneos que constan de polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos. A pesar de estas limitaciones, el método de los coeficientes indeterminados es útil para resolver muchos problemas que tienen aplicaciones importantes. (1)

Ejemplo 1.

Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}. \tag{7}$$

Se busca una función Y tal que la combinación $Y''(x) - 3Y'(x) - 4Y(x)$ sea igual a $3e^{2x}$. Como la función exponencial se reproduce por medio de la derivación, la forma más razonable de lograr el resultado que se desea es suponer que Y(x) es algún múltiplo de e^{2x}; es decir,

$$Y(x) = Ae^{2x},$$

En donde el coeficiente A aún está por determinarse. Para encontrar A se calculan

$$Y'(x) = 2Ae^{2x}, Y''(x) = 4Ae^{2x},$$

Y se sustituye en lugar de y, y' y y" en la ecuación (7). Se obtiene

$$(4A - 6A - 4A)e^{2x} = 3e^{2x}.$$

De donde, $-6A = 3$, de modo que $A = -1/2$. Por tanto, una solución particular es

$$Y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}. \tag{8}$$

Ejemplo 2.

Encontrar una solución particular de

$$3y' - 4y = 2\ sen\ x. \tag{9}$$

Por analogía con el ejemplo 1, suponga primero que $Y(x) = A\ sen\ x$, en donde A es una constante por determinar. Al sustituir en (9) y reordenar los términos se obtiene

$$-5A\ sen\ x - 3A\ cos\ x = 2\ sen\ x. \tag{10}$$

No existe elección de la constante A que satisfaga la ecuación (10) para toda x, por lo que se concluye que la suposición referente a *Y(x)* es incorrecta. La aparición del termino coseno en (12) sugiere modificar la suposición original para incluir un término $cosenoidal$ en *Y(x)*; es decir,

$$Y(x) = \ A\ sen\ x + B\ cos\ x,$$

En donde deben determinarse *A y B.* Entonces,

$$Y'(x) = A\cos x - B\ sen\ x, Y''(x) = -A\ sen\ x - B\cos x$$

Al sustituir estas expresiones en lugar de y, y ' y y" en la ecuación (9) y agrupar términos se obtiene

$$(-A + 3B - 4A) sen\ x + (-B - 3A - 4B)\cos x = 2\ sen\ x\ . \qquad (11)$$

Para satisfacer la ecuación (11) es necesario hacer corresponder los coeficientes de $sen\ x$ y $cos\ x$ de cada miembro de la ecuación; por tanto, *A y B* deben satisfacer las ecuaciones

$$-5A + 3B = 2, \qquad -3A - 5B = 0.$$

De donde, $A = -5/17$ y $B\ = \ 3/17$, de manera que una solución particular de la ecuación (9) es

$$Y(x) = -\frac{5}{17}\ sen\ x + \frac{3}{17} cos\ x.$$

Ejemplo 3.

Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2. \qquad (12)$$

Como el segundo miembro de la ecuación (12) es un polinomio, es natural suponer que Y también es un polinomio del mismo grado o superior. En esta sección se demostrara después que (con ciertas excepciones) basta suponer que Y es un polinomio del mismo grado que el termino no homogéneo; por lo tanto, se supone que

$$Y(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Se sigue que

$$Y'(x) = 2Ax + B, \qquad y''(x) = 2A.$$

Si se sustituyen estas expresiones en lugar de y, y' y y'' en la ecuación (12) y se agrupan términos, se obtiene

$$-4Ax^2 + (-6A - 4B)x + (2A - 3B - 4C) = 4x^2.$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de x, se encuentra que A, B y C deben satisfacer

$$-4A = 4, \qquad -6A - 4B = 0, \qquad 2A - 3B - 4C = 0.$$

Por tanto, $A = -1$, $B = 3/2$ y $C = -13/8$; de donde, una solucion particular de (12) es

$$Y(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

Ejemplo 4.

Hallar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos 2x \qquad (13)$$

En este caso se supone que *Y(x)* es el producto de e^x y una combinación lineal de $cos\ 2x$ y $sen\ 2x$; es decir,

$$Y(x) = Ae^x \cos 2x + Be^x sen\ 2x.$$

En este ejemplo el álgebra es más tediosa, pero se concluye que

$$Y'(x) = (A + 2B)e^x \cos 2x + (-2A + B)e^x sen\ 2x$$

Y

$$Y''(x) = (3A + 4B)e^x \cos 2x + (-4A - 3B)e^x sen\ 2x.$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (13) se encuentra que A y B deben satisfacer

$$10A + 2B = 8, \qquad 2A - 10B = 0$$

De donde, $A = 10/13$ y $B = 2/13$; por consiguiente, una solución particular de (13) es

$$Y(x) = \frac{10}{13}e^x \cos 2x + \frac{2}{13}e^x sen\ 2x.$$

Ejemplo 5.

Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - Ay = 3e^{2x} + 2\ sen\ x - 8e^{x}\ cos\ 2x. \tag{14}$$

Al descomponer el segundo miembro de la ecuación (13), se obtienen las tres ecuaciones

$$y'' - 3y' - 4y - 3e^{2x},$$

$$y'' - 3y' - 4y = 2\ sen\ x,$$

Y

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^{x}\ cos\ 2x.$$

En los ejemplos 1, 2 y 4, respectivamente, se han encontrado las soluciones de estas tres ecuaciones. Por lo tanto, una solución particular de (19) es su suma; a saber,

$$Y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17} sen\ x + \frac{10}{13}e^{x}\cos 2x + \frac{2}{13}e^{x} sen\ 2x$$

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, halle la solución de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$
2. $y'' + 2y' + 5y = 3\ sen\ 2x$
3. $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$
4. $y'' + \ 2y' = 3 + 4\ sen\ 2x$
5. $y'' + 9y = x^2e^{3x} + 6$
6. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

En cada uno de los problemas 7 a 11, encuentre la solución del problema con valor inicial dado.

7. $y'' + y' - 2y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
8. $y'' + 4y = x^2 + 3e^{x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
9. $y'' - 2y' + y = xe^{x} + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
10. $y'' - 2y' - 3y = 3xe^{2x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
11. $y'' + 4y = 3\ sen\ 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$

En cada uno de los problemas 12 a 17, determine una forma adecuada para *Y(x)* si ha de aplicarse el método de los coeficientes indeterminados. No evalué las constantes.

12. $y'' + 3y' = 2x^4 + x^2e^{-3x} + sen\ 3x$
13. $y'' + y = x(1 + sen\ x)$
14. $y'' - 5y' + 6y = e^{x}\ cos\ 2x\ +\ e^{2x}(3x + 4)senx$
15. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} + 2e^{-x}\ cos\ x\ + 4e^{-x}x^2\ sen\ x$

16. $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{2x} + x\ sen\ 2x$
17. $y'' + 4y = x^2\ sen\ 2x\ +\ (6x+7)cos\ 2x$

2.7. Variación de parámetros

En esta sección se describe otro método para hallar una solución particular de una ecuación no homogénea. Este método, conocido como **variación de parámetros**, se debe a Lagrange y complementa bastante bien el método de los coeficientes indeterminados. La ventaja más importante de la variación de parámetros es que se trata de *método general*; en principio, por lo menos, es posible aplicarlo a cualquier ecuación y no requiere suposiciones detalladas respecto a la forma de la solución. De hecho, más tarde en esta sección se aplica este método con el fin de obtener una fórmula para encontrar una solución particular de una ecuación diferencial lineal no homogénea arbitraria de segundo orden. Por otra parte, el método de variación de parámetros al final requiere la evaluación de ciertas integrales en las que interviene el término no homogéneo de la ecuación diferencial, lo cual puede presentar dificultades. Antes de considerar este método en el caso general, se ilustrara su aplicación con un ejemplo. (1)

Ejemplo 1.

Encontrar un solución particular de

$$y'' + 4y = 3\ csc\ x. \tag{1}$$

Observe también que la ecuación homogénea correspondiente a (1) es

$$y'' + 4y = 0, \tag{2}$$

Y que la solución general de (2) es

$$y_c(x) = c_1 cos\ 2x + c_2\ sen\ 2x \tag{3}$$

La idea básica en el método de variación de parámetros es sustituir las constantes c_1 y c_2 de la ecuación (3) por las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, respectivamente, y después determinar estas funciones de modo que la expresión resultante

$$y = u_1(x)\ cos\ 2x + u_2(x)\ sen\ 2x \tag{4}$$

De la ecuación (4), se deriva y se reagrupan los términos, se obtiene

$$y' = -2u_1(x)sen\ 2x\ +\ 2u_2(x)cos\ 2x\ +\ u_1'(x)cos\ 2x + u_2'\ sen\ 2x \qquad (5)$$

Si se tiene presente la posibilidad de elegir una segunda condición sobre u_1 y u_2, se requiere que los dos últimos términos del segundo miembro de (5) sean cero; es decir, que

$$u_1'(x)cos\ 2x + u_2'\ sen\ 2x = 0 \qquad (6)$$

Entonces, de la ecuación (5) se concluye que

$$y' = -2u_1(x)sen\ 2x\ +\ 2u_2(x)cos\ 2x \qquad (7)$$

Aunque el efecto final de la condición (6) aun no es evidente, por lo menos se simplifico la expresión para y'. Ademas, al derivar la ecuacion (7) se obtiene

$$y'' = -4u_1(x)cos\ 2x - 4u_2(x)sen\ 2x - 2u_1'(x)sen\ 2x\ +\ 2u_2'(x)cos\ 2x \qquad (8)$$

Entonces, si se sustituyen y y y'' de la ecuacion (1) por sus expresiones dadas en (4) y (8), respectivamente, se encuentra que u_1 y u_2 deben satisfacer

$$-2u_1'(x)sen\ 2x + 2u_2'(x)\cos 2x = 3\csc x \qquad (9)$$

Despejando $u_2'(x)$ en (6), se tiene

$$u_2'(x) = -u_1'(x)\frac{\cos 2x}{sen\ 2x} \qquad (10)$$

Luego, si se sustituye $u_2'(x)$ de la (9) por esta expresión y se simplifica, se obtiene

$$u_1'(x) = -\frac{3\csc x\ \ sen\ 2x}{2} = -3\cos x. \qquad (11)$$

Además, si se sustituye esta expresión para $u_1'(x)$ en la ecuación (10) y se aplican las fórmulas para el doble de un ángulo, se encuentra que

$$u_2'(x) = \frac{3\cos x\cos 2x}{sen\ 2x} = \frac{3(1-2\ sen^2\ x)}{2\ sen\ x} = \frac{3}{2}\csc x - 3\ sen\ x \qquad (12)$$

Una vez que se obtuvieron$u_1'(x)$ y $u_2'(x)$, el paso siguiente es integrar para obtener $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$. El resultado es

$$u_1'(x) = -3\ senx + c \tag{13}$$

y

$$u_2'(x) = \frac{3}{2}\ ln\ |csc\ x - cot\ x|\ +\ 3\ cos\ x\ +\ c_2. \tag{14}$$

Por último, al sustituir estas expresiones en la ecuación (4), se tiene

$$y = -3\ sen\ x \cos 2x + \frac{3}{2} ln|\csc x - \cot x| sen\ 2x + 3 \cos x\ sen\ 2x + c_1 \cos 2x + c_2 sen\ 2x \tag{15}$$

Teorema 2.7.1

Si las funciones p, q y g son continuas sobre un intervalo abierto I y si las funciones y_1, y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ correspondientes a la ecuación no homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

entonces una solución panicular de esta es

$$Y(N) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx,$$

Y la solución general es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2 + Y(x)$$

Ejemplo 2.

Comprobar que $y_1(x) = x$ y $y(x) = 1/x$ son soluciones de

$$x^2 y'' + xy' - y = 0, \tag{16}$$

Y, a continuación determine la solución general de

$$x^2y'' + xy' - y = x \ln x \tag{17}$$

Para $x > 0$.
Se divide la ecuación (17) entre x^2 y vuelve a escribirse como

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{\ln x}{x}, \qquad x > 0 \tag{18}$$

Ahora es posible identificar $(ln\, x)/x$ con el término no homogéneo $g(x)$ de la ecuacion $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$.
Para resolver (18) se supone que

$$y = u_1(x)x + u_2(x)x^{-1} \tag{19}$$

y se procede como en el ejemplo 1. Las ecuaciones que determinan a $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$ son

$$\begin{aligned} u_1'(x)x + u_2'(x)x^{-1} &= 0 \\ u_1'(x)x + u_2'(x)(-x^{-2}) &= \frac{\ln x}{x} \end{aligned} \tag{20}$$

La solución del sistema de ecuaciones (20) es

$$u_1'(x) = \frac{\ln x}{2x}, \qquad u_2'(x) = -\frac{x\ \ln x}{2} \tag{21}$$

Entonces, se concluye que

$$u_1(x) = \frac{(\ln x)^2}{4} + c_1, \qquad u_2(x) = -\frac{x^2(2\ln x - 1)}{8} + c_2 \tag{22}$$

Por último, si se sustituyen estas expresiones en la ecuación (19) se obtiene la solución general de la (18); a saber,

$$y = \frac{1}{4}x(\ln x)^2 - \frac{1}{4}\ln x + c_1x + c_2x^{-1} \tag{23}$$

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4 aplique el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial dada. A continuación, compruebe la respuesta mediante la aplicación del método de los coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$
2. $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$
3. $y'' + 2y' + y - 3e^{-x}$
4. $4y'' - 4y' + y = 16e^{x/2}$

En cada uno de los problemas 5 a 8, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

5. $y'' + y - tan\, x, \quad 0 < x < \pi/2$
6. $y'' + 9y = 9\sec^2 3x\,, \quad 0 < x < \pi/6$
7. $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}, \quad x > 0$
8. $y'' + 4y = 3\, csc\, 2x, \quad 0 < x < \pi/2$

En cada uno de los problemas 9 a 12 compruebe que las funciones dadas y_1 y y_2 satisfacen la ecuación homogénea correspondiente; entonces encuentre una solución particular de la ecuación no homogénea dada.

9. $x^2y'' - 2y = 3x^2 - 1, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^{-1}$
10. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = xe^x$
11. $xy'' - (1+x)y' + y = x^2e^{2x}, \quad x > 0; \quad y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^x$
12. $(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2e^{-x}, \quad 0 < x < 1; \quad y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x$

Unidad 3

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR.

Introducción

La estructura teórica y los métodos de resolución desarrollados en el capítulo anterior para las ecuaciones lineales de segundo orden se extienden directamente a las ecuaciones lineales de tercer orden y de orden superior. En este capítulo se repasa con brevedad esta generalización, tomando nota sobre todo de aquellos casos en los que es posible que se presenten nuevos fenómenos, debido a la mayor diversidad de situaciones que pueden ocurrir para las ecuaciones de orden superior.

3.1 Teoría general de las ecuaciones lineales de n-ésimo orden

Una ecuación diferencial lineal de n-esimo orden es una ecuación de la forma

$$P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = G(x) \qquad (1)$$

Se supone que las funciones $P_0 \ldots, P_n$ y G son funciones continuas con valores reales sobre algún intervalo I: $\alpha < \beta$, y que P_0 es diferente de cero en todo punto de este intervalo. Entonces, al dividir la ecuación (1) entre $P_0(x)$, se obtiene

$$L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = g(x). \qquad (2)$$

El operador diferencial lineal L de orden n definido por la ecuación (2) es semejante al operador de segundo orden introducido en el capítulo 2.

Como la ecuación (2) comprende la n-ésima derivada de y con respecto a x, serán necesarias, por así decirlo, n integraciones para resolverla. En cada una de estas integraciones se introduce una constante arbitraria. De donde, es de esperar que para obtener una solución única sea necesario especificar n condiciones iniciales,

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'^{(x_0)} = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (3)$$

En donde x_0 puede ser cualquier punto en el intervalo I y $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$.

Teorema 3.1.1

Si las funciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y g son continuas sobre el intervalo abierto I, entonces existe exactamente una solución $y = 1\phi(x)$ de la ecuación diferencial (2) que también satisface las condiciones iniciales (3). Esta solución existe en todo el intervalo I.

La ecuación homogénea. Como en el problema de segundo orden correspondiente, primero se analiza la ecuación homogénea

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (4)$$

Si las funciones $y_0, y_0', \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación (4), entonces por calculo directo se deduce que la combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x), \tag{5}$$

En donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.
Específicamente, para cualquier elección del punto x_0 en I y para cualquier elección de $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, debe ser posible determinar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de modo que se satisfagan las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + \cdots + c_ny_n(x_0) &= y_0 \\ c_1y_1'(x_0) + \cdots + c_ny_n'(x_0) &= y_0' \\ &\vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{6}$$

De donde, una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución, para valores arbitrarios de $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ es que el wronskiano

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Sea diferente de cero en $x = x_0$. Dado que x_0 puede ser cualquier punto en el intervalo I, es necesario y suficiente que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sea diferente de cero en todo punto del intervalo.

Teorema 3.1.2

Si las funciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y g son continuas sobre el intervalo abierto I, si las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación (4) y si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ por lo menos en un punto en I, entonces toda solución de (4) puede expresarse como una combinación lineal de las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Un conjunto de soluciones $y_1, \ldots, y_n$ de la ecuación (4) cuyo wronskiano sea diferente de cero se conoce como **conjunto fundamental de soluciones**. Dado que todas las soluciones de (4) son de la forma (5), para hacer referencia a una combinación lineal arbitraria de cualquier conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (4) se usa la expresión **solución general**.

Se dice que las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ son **linealmente dependientes** sobre I si existe un conjunto de constantes $k_1, k_2, \dots, k_n$ no todas cero, tales que

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_n f_n = 0 \tag{8}$$

Para toda x e n I. Se dice que las funciones $f_1, \dots, f_n$ son linealmente independientes sobre I si no son linealmente dependientes allí.

La ecuación no homogénea. Considérese ahora la ecuación no homogénea (2),

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = g(x).$$

Si Y_1 y Y_2 son dos soluciones cualesquiera de la ecuación (2), entonces se concluye de inmediato, a partir de la linealidad del operador L, que

$$L[Y_1 - Y_2](x) = L[Y_1](x) - L[Y_2](x) = g(x) - g(x) = 0.$$

De donde, la diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación no homogénea (2) es una solución de la ecuación homogénea (4). Dado que cualquier solución de la ecuación homogénea puede expresarse como una combinación lineal de un conjunto fundamental de soluciones $y_1, \dots, y_n$ se deduce que cualquier solución de la ecuación (2) puede escribirse como

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + Y(x), \tag{9}$$

En donde Y es alguna solución particular de la ecuación no homogénea (2). La combinación lineal (9) se llama solución general de la ecuación no homogénea (2). (1)

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, determine los intervalos en los que se tenga la seguridad de que existen soluciones.

1. $y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 3y = x$
2. $xy''' + (sen\, x)y'' + 3y = cos\, x$
3. $x(x-1)y^{\mathrm{IV}} + e^x y'' + 4x^2 y = 0$
4. $y''' + xy'' + x^2 y' + x^3 y = ln\, x$
5. $(x-1)y^{\mathrm{IV}} + (x+1)y'' + (tan\, x)y = 0$
6. $(x^2-4)y^{\mathrm{IV}} + x^2 y''' + 9y = 0$

En cada uno de los problemas 7 a 12 elimine las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ entre las expresiones para y sus derivadas $y', \ldots, y^{(n-1)}$ Con ello, determine la ecuación diferencial que satisface la función dada.

7. $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + sen\ x$
8. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3\ sen\ x$
9. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$
10. $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$
11. $y = x + c_1 + c_2 \cos x + c_3\ sen\ x$
12. $y = c_1 + c_2 x + c_3\ senh\ x + c_4 \cosh x$

En cada uno de los problemas 13 a 18, compruebe que las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial y determine su wronskiano.

13. $y''' + y' = 0; \quad 1, \quad cos\ x, \quad sen\ x$
14. $y^{\mathrm{IV}} + y'' = 0; \quad 1, \quad x, \quad cos\ x, \quad sen\ x$
15. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0; \quad e^x, \quad e^{-x}, \quad e^{-2x}$
16. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = 0; \quad 1, \quad x, \quad e^{-x}, \quad xe^{-x}$
17. $xy''' - y'' - 0; \quad 1, \quad x, \quad x^3$
18. $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad x, \quad x^2, \quad 1/x$

Semana 12

Temas

- Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes.
- Métodos de los coeficientes indeterminados.
- Método de variación de parámetros.

Objetivos

- Conocer los conceptos básicos de las ecuaciones de n-ésimo orden.
- Estudiar y comprender las ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes.
- Estudiar y comprender el método de los coeficientes indeterminados.
- Estudiar y comprender el método de variación de parámetros.

Actividades

- Solución de ejercicios sobre las ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes, métodos de los coeficientes indeterminados y método de variación de parámetros de las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden.

Recursos

- **Videos**

1. **Título:** Solución ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes parte 2

   Descripción: Ejemplo de solución de dos ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden superior.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=ogj3-Cm_cpc

2. **Título:** Coeficientes indeterminados - método de superposición parte 1

   Descripción: Método para solucionar ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden superior (con coeficientes constantes).

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=5fb5qCWHlPo

3. **Título:** Coeficientes indeterminados método del anulador parte 1

   Descripción: Método solución de ecuaciones de diferenciales lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=_dh1p96GAMA

4. **Título:** Variación de parámetros parte 1

   Descripción: Método solución de ecuaciones de diferenciales lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=W-lP0MnrwDk

- **PDF**

1. **Título:** capitulo-4.pdf

   Descripción: Teoría, ejemplos y ejercicios del método de los coeficientes indeterminados. Pág. 31 – 52.

   Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-4.pdf

2. **Título:** capitulo-4.pdf

   Descripción: Teoría, ejemplos y ejercicios del método de los coeficientes indeterminados. Pág. 52 – 58.

   Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-4.pdf

3. **Título:** capitulo-4.pdf

   Descripción: Conceptos básicos, ejemplos y ejercicios de ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes. Pág. 22 – 31.

   Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-4.pdf

- **Libros**

1. **Título:** Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición.

   Autor: William E. Boyce; Richard C. DiPrima

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre Ecuaciones homogéneas de orden superior. Páginas 219 – 240.

2. **Título:** Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.

   Descripción: Teoría preliminar de las ecuaciones diferenciales de orden superior. Páginas 113 – 186.

   Autor: Dennis G. Zill

3.2 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Considérese la ecuación diferencial lineal homogénea de n-esimo orden

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

En donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales. Con base en lo que se sabe de las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, es natural anticipar que $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación (1) para valores adecuados de *r*. En efecto,

$$L[e^{rx}] = e^{rx}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} + a_n) = e^{rx} Z(r) \qquad (2)$$

Para toda *r*. Para aquellos valores de *r* para los que $Z(r) = 0$, se concluye que $L[e^{rx}] = 0$ y que $y = e^{rx}$ es una solución de (1). El polinomio $Z(r)$ se llama **polinomio característico** y la ecuación $Z(r) = 0$ es la **ecuación característica** de la ecuación diferencial (1). Un polinomio de grado *n* tiene *n* ceros, digamos $r_1, r_2, \ldots, r_n$; de donde, es posible escribir el polinomio característico en la forma

$$Z(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2) \ldots (r - r_n) \qquad (3)$$

Raíces reales y **distintas.** Si las raíces de la ecuación característica son reales y ninguna de ellas es igual, entonces se tienen *n* soluciones distintas $e^{r_1 x}, e^{r_2 e}, \ldots, e^{r_n x}$ de la ecuación (1). Para demostrar en este caso que la solución general de (1) es de la forma

$$y = c_1 e^{r_1 x}, c_2 e^{r_2 e}, \ldots, c_n e^{r_n x} \qquad (4)$$

Entonces existen las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas cero, tales que $c_1 e^{r_1 x}, c_2 e^{r_2 e}, \ldots, c_n e^{r_n x}$ para cada *x* en $x - \infty < x < \infty$**.** Si se multiplica por $e^{-r_1 x}$ da $c_1 + c_2 e^{(r_2 - r_1)x} + \cdots + c_n e^{(r_n - r_1)x} = 0$ y, si se deriva, se obtiene

$$(r_2 - r_1) c_2 e^{(r_2 - r_1)x} + (r_3 - r_1) c_3 e^{(r_3 - r_1)x} + \cdots + (r_n - r_1) c_n e^{(r_n - r_1)x} = 0$$

Para $-\infty < x < \infty$**.** Si se multiplica este último resultado por $e^{-(r_2 - r_1)x}$ y luego se deriva, da

$$(r_3 - r_2)(r_3 - r_1) c_3 e^{(r_3 - r_2)x} + \cdots + (r_n - r_2)(r_n - r_1) c_n e^{(r_n - r_2)x} = 0$$

Para $-\infty < x < \infty$. Si se continúa de esta manera, finalmente se obtiene

$$(r_n - r_{n-1})(r_n - r_{n-2}) \dots (r_n - r_2)(r_n - r_1)c_n e^{(r_n - r_{n-1})x} = 0 \qquad (5)$$

Raíces complejas. Si las raíces de la ecuación característica son complejas, deben ocurrir en pares conjugados, $\lambda \pm i\mu$, ya que los coeficientes $a_0, \dots, a_n$ son números reales. Siempre que ninguna de las raíces este repetida, la solución general de la ecuación (1) sigue siendo de la forma1 (4). Sin embargo, es posible sustituir las soluciones de valores complejos y por las soluciones de valores reales

$$e^{\lambda x} \cos \mu x\,, \qquad e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x, \qquad (6)$$

Ejemplo 1.

Encontrar la solución general de

$$y^{\mathrm{IV}} - y = 0 \qquad (7)$$

Si se sustituye y por e^{rx}, se encuentra que la ecuación característica es

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$$

Las raíces son $r = 1, -1, i, -i$, de donde, la solución general de la ecuación (7) es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x \; + \; c_4\, senx.$$

Raíces repetidas. Si las raíces de la ecuación característica no son distintas, es decir, si algunas de las raíces están repetidas, entonces resulta evidente que la solución (4) no es la solución general de la ecuación (1). Si se recuerda que r_1 es una raíz repetida para la ecuación lineal de segundo orden $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, entonces las dos soluciones linealmente independientes son $e^{r_1 x}$ y $e^{r_2 x}$, parece razonable esperar que si una raíz de $Z(r) \; = \; 0$, por ejemplo $r \; = r_1$ tiene multiplicidad *s* (en donde $s \leq \; n$), entonces

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{s-1} e^{r_1 x} \qquad (8)$$

Son soluciones de (1). Para probar esto, obsérvese que si r_1 es cero de multiplicidad 5 de Z(r), entonces la ecuación (2) puede escribirse como

$$L[e^{rx}] = e^{rx} a_0 (r - r_1)^s (r - r_{s+1}) \dots (r - r_n) = e^{rx} (r - r_1)^s H(r) \qquad (9)$$

Para todos los valores de *r*, en donde $H(r_1) \neq 0$.

Por último, si una raíz compleja $\lambda + i\mu$ esta repetida s veces, también el complejo conjugado $\lambda + i\mu$ esta repetido s veces. De manera correspondiente a esta $2s$ soluciones de valor complejo es posible encontrar $2s$ soluciones de valores reales si se observa que las partes real e imaginaria de $e^{(\lambda+i\mu)x}$, $xe^{(\lambda+i\mu)x}$ también son soluciones linealmente independientes:

$$e^{\lambda x}\cos\mu x, \qquad e^{\lambda x}\operatorname{sen}\mu x, \qquad xe^{\lambda x}\cos\mu x, \qquad xe^{\lambda x}\operatorname{sen}\mu x$$
$$\ldots, x^{s-1}e^{\lambda x}\cos\mu x, \qquad x^{s-1}e^{\lambda x}\operatorname{sen}\mu x$$

De donde, la solución general de la ecuación (1) siempre se puede expresar como una combinación lineal de n soluciones de valores reales (1). Considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.

Encontrar la solución general de

$$y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0 \tag{10}$$

La ecuación característica es

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2+1)(r^2+1) = 0.$$

Las raíces son $r = i, i, -i, -i$ y la solución general de (10) es

$$y = c_1\, cos\; x + c_2\, sen\; x + c_3 x\, cos\; x + c_4 x\; senx.$$

Ejemplo 3.

Encontrar la solución general de

$$y^{\mathrm{IV}} + y = 0 \tag{11}$$

La ecuación característica es

$$r^4 + 1 = 0.$$

En este caso no es tan fácil factorizar el polinomio. Es necesario calcular las raíces cuartas de -1. Ahora bien, -1, concebido como un numero complejo, es $-1 + 0i$; su magnitud es 1 y su ángulo polar es π. Entonces,

$$-1 = \cos \pi + i\, sen\, \pi = e^{i\pi}$$

Es más, el ángulo está determinado solo hasta un múltiplo de 2π; por tanto,

$$(-1)^{1/4} = e^{i(\pi/4+m\pi/2)} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right) + i\, sen\, \left(\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right)$$

En donde *m* es cero o cualquier entero positivo o negativo; por tanto,

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 6, exprese el número complejo dado en la forma

$$R(cos\ \theta + i\ sen\ \theta) - Re^{i\theta}.$$

Observe que $e^{i(\theta+2m\pi)} = e^{i\theta}$ si *m* es un entero.

1. $1 + i$
2. $-1 + \sqrt{3i}$
3. $- 3$
4. $-i$
5. $\sqrt{3} - i$
6. $-1 - i$

Observe que $e^{i(\theta+2m\pi)} = e^{i\theta}$ si *m* es un entero y que

$$\left[e^{i(\theta+2m\pi)}\right]^{1/n} = e^{i[(\theta+2m\pi)/n]} = \cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2m\pi}{n}\right) + i\, sen\, \left(\frac{\theta}{n}+\frac{2m\pi}{n}\right)$$

En cada uno de los problemas 7 a 10 aplique estos hechos para determinar la raíz indicada del número complejo dado.

7. $1^{1/3}$
8. $(1-i)^{1/2}$
9. $1^{1/4}$
10. $[2(cos\,\pi/3 + i\,sen\,\pi/3)]^{1/2}$

En cada uno de los problemas 11 a 16, determine la solución de la ecuación diferencial dada.

11. $y''' - y'' - y' + y = 0$
12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
13. $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$
14. $y^{\mathrm{IV}} - 4y''' + 4y'' = 0$
15. $y^{\mathrm{VI}} + y = 0$
16. $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' + 4y = 0$

3.3 Método de los coeficientes indeterminados

Puede obtenerse una solución particular Y de la ecuación lineal no homogénea de n-esimo orden con coeficientes constantes

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \tag{1}$$

Por el método de los coeficientes indeterminados, siempre que *g*(*x*) tenga una forma adecuada. Aunque el método de los coeficientes indeterminados no es tan general como el de variación de parámetros que se describe en la siguiente sección, suele ser mucho más fácil cuando puede aplicarse.
En primer lugar considérese el caso en el que *g(x)* es un polinomio de grado *m*

$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m \tag{2}$$

En donde $b_0, b_1, \dots, b_m$ son constantes dadas. Es natural buscar una solución particular de la forma

$$Y(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m \tag{3}$$

En términos más generales, es fácil verificar que si cero es una raíz con multiplicidad s del polinomio característico, en cuyo caso $1, x, x^2, \dots, x^{s-1}$ son soluciones de la ecuación homogénea, entonces una forma adecuada para *Y(x)* es

$$Y(x) = x^s(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m) \tag{4}$$

Como segundo problema, supóngase que *g(x)* es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_m) \tag{5}$$

Entonces se esperaría que Y(x) fuera de la forma

$$Y(x) = e^{\alpha x}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m) \tag{6}$$

Siempre que $e^{\alpha x}$ no sea una solución de la ecuación homogénea. Si α es una raíz con multiplicidad s de la ecuacion caracteristica, en forma apropiada para y(x) es

$$Y(x) = e^{\alpha x}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m) \tag{7}$$

De manera semejante, si *g(x)* es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_m)\begin{cases} sen\ \beta x, \\ \cos \beta x, \end{cases} \tag{8}$$

Entonces una forma adecuada para *Y(x),* siempre que $\alpha + i\beta$ no sea una raíz de la ecuación característica, es

$$\begin{aligned} Y(x) = {} & e^{\alpha x}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m)\cos \beta x \\ & + e^{\alpha x}(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_m) sen\ \beta x \end{aligned} \tag{9}$$

Si $\alpha + i\beta$ es una raíz con multiplicidad s de la ecuación característica, entonces es necesario multiplicar el segundo miembro de (9) por x^s.

Tabla 3.3.1 SOLUCION PARTICULAR DE

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = g(x)$$

$g(x)$	$Y(x)$
$P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$	$x^s(A_0x^m + \cdots + A_m)$
$P_m(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_0x^m + \cdots + A_m)e^{\alpha x}$
$P_m(x)e^{\alpha x}\begin{cases}\text{sen}\,\beta x\\ \cos\beta x\end{cases}$	$x^s[(A_0x^m + \cdots + A_m)e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+(B_0x^m + \cdots + B_m)e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x]$

Ejemplo 1.

Hallar una solución particular de

$$y''' - 4y = x + 3\cos x + e^{-2x}. \tag{10}$$

En primer lugar se resuelve la ecuación homogénea. La ecuación característica es $r^3 - 4r = 0$ y las raíces son $0, \pm 2$; de donde,

$$y_c(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$$

Si se aplica el principio de superposición, puede escribirse una solución particular de la (10) como la suma de soluciones particulares correspondientes a las ecuaciones diferenciales

$$y''' - 4y' = x, \qquad y''' - 4y' = 3\cos x, \qquad y''' - 4y' = e^{-2x}.$$

La elección inicial para una solución particular $Y_1(x)$ de la primera ecuación es $A_0x + A_1$ pero como una constante es solución de la ecuación homogénea, se multiplica por x; por tanto,

$$Y_1(x) = x(A_0x + A_1).$$

Para la segunda ecuación se elige

$$Y_2(x) = B\cos x + C\,sen\,x,$$

Por último, para la tercera ecuación, en virtud de que e^{-2} es una solución de la ecuación homogénea, se supone que

$$Y_3(x) = Exe^{-2x}$$

Las constantes se determinan al sustituir en las ecuaciones diferenciales por separado; resultan ser $A_0 = 1/8, A_1 = 0, B = 0, C = -3/5\ y\ E = 1/8$. De donde, una solución particular de la ecuación (10) es

$$Y(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}sen\ x + \frac{1}{8}xe^{-2x}$$

El método de los coeficientes indeterminados puede aplicarse siempre que sea posible intuir la forma correcta para *Y(x)*. Sin embargo, por lo común es posible para ecuaciones diferenciales que no tengan coeficientes constantes o para términos no homogéneos que no sean del tipo antes descrito (1).

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, determine la solución general de la ecuación diferencial dada. Aquellos casos en que se especifica, encuentre la solución que satisface las condiciones iniciales dadas.

1. $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-x} + 3$
2. $y^{IV} - y = 3x + cos\ x$
3. $y''' + y'' + y' + y = e^{-x} + 4x$
4. $y''' - y' = 2\ sen\ x$
5. $y^{IV} + y''' = sen\ 2x$
6. $y''' + 4y' = x, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$
7. $y^{IV} + 2y'' + y = 3x + 4, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1$
8. $y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{4}, \quad y''(0) = -\frac{3}{2}$

En cada uno de los problemas 9 a 14, determine una forma adecuada para y(x), si ha de aplicarse el método de los coeficientes indeterminados. No evalué las constantes.

9. $y''' - 2y'' + y' = x^3 + 2e^x$
10. $y''' - y' = xe^{-x} + 2\ cos\ x$
11. $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = e^x + sen\ x$
12. $y^{\mathrm{IV}} + 4y'' = sen\ 2x + xe^x + 4$
13. $y^{\mathrm{IV}} - y''' - y'' + y' = x^2 + 4 + x\ sen\ x$
14. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 2y'' = 3e^x + 2x^{-x} + e^{-x}sen\ x$

3.4 Método de variación de parámetros

El método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x) \qquad (1)$$

Es una extensión directa de la teoría para la ecuación diferencial de segundo orden Supóngase entonces que se conoce un conjunto fundamental de soluciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ de la ecuación homogénea; entonces

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x). \qquad (2)$$

El método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación (1) se apoya en la posibilidad de determinar n funciones $u_1, u_2, \dots, u_n$, tales que *Y(x)* sea de la forma

$$Y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x). \qquad (3)$$

En virtud de que difícilmente puede esperarse una simplificación al determinar Y, si es necesario resolver ecuaciones diferenciales de orden superior para las $u_i, i = 1,2, \dots, n$, resulta natural imponer condiciones para suprimir los términos que produzcan derivadas superiores de las u_i. Con base en la ecuación (3) se obtiene

$$Y' = (u_1 y_1' + u_2 y_2' + \cdots + u_n y_n') + (u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n). \qquad (4)$$

Por tanto, la primera condición que se impone sobre las u_i es que

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n = 0. \qquad (5)$$

Si se continúa este proceso de manera semejante, a través de $n-1$ derivadas de Y da

$$Y^{(m)} = u_1 y_1^{(m)} + u_2 y_2^{(m)} + \cdots + u_n y_n^{(m)}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots, n-1 \qquad (6)$$

Y las $n-1$ condiciones siguientes sobre las funciones $u_1, \dots, u_n$:

$$Y^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}) + (u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}) \qquad (7)$$

La n-ésima derivada de Y es

$$Y^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}) + (u'_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + u'_n y_n^{(n-1)}) \tag{8}$$

Por último, se impone la condición de que Y sea una solución de la ecuación (1). Al sustituir las derivadas de Y por sus expresiones de las ecuaciones (6) y (8), agrupar términos y aplicar el hecho de que $L[y_i] = 0, i = 1, 2, \ldots, n$, se obtiene

$$u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + u'_n y_n^{(n-1)} = g. \tag{9}$$

La ecuación (9), junto con las $n-1$ ecuaciones (7), dan n ecuaciones lineales simultáneas no homogéneas para $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$:

$$\begin{aligned} y_1 u'_1 + y_2 u'_2 + \cdots + y_n u'_n &= 0, \\ y'_1 u'_1 + y'_2 u'_2 + \cdots + y'_n u'_n &= 0, \\ y''_1 u'_1 + y''_2 u'_2 + \cdots + y''_n u'_n &= 0, \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} u'_1 + \cdots + y_n^{(n-1)} u'_n &= g. \end{aligned} \tag{10}$$

De donde, es posible determinar $u'_1, \ldots, u'_n$:. Si se aplica la regla de Cramer, se encuentra que la solución del sistema de ecuaciones (10) es

$$u'_m(x) = \frac{g(x) W_m(x)}{W(x)}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Con esta notación, una solución particular de la ecuación (1) se expresa por

$$Y(x) = \sum_{m=1}^{n} y_m(x) \int_{x_0}^{x} \frac{g(t) W_m(t)}{W(t)}\, dt. \tag{12}$$

En algunos casos es posible simplificar los cálculos hasta cierto punto al aplicar la identidad de Abel

$$\boldsymbol{W(x) = W(y_1, \ldots, y_n)(x) = c\ exp\left[-\int p_1(x) dx\right]}$$

Puede determinarse la constante c al evaluar W en algún punto conveniente (1).

Ejemplo 1.

Dado que $y_1 = e^x,\ y_2(x) = xe^x$ y $y_3(x) = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a

$$y''' - y'' - y' + y = g(x), \tag{13}$$

Determinar una solución particular de la ecuación (13) en términos de una integral.
Se usa la ecuación (12). En primer lugar se tiene

$$W(x) = W(e^x, xe^x, e^{-x})(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ e^x & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ e^x & (x+2)e^x & e^{-x} \end{vmatrix}$$

Si se extrae e^x con factor común de cada una de las dos primeras columnas y e^{-x} de la tercera columna, se obtiene

$$W(x) = e^x \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 1 & x+2 & 1 \end{vmatrix}.$$

A continuación, al restar el primer renglón del segundo y tercer renglones, se tiene

$$W(x) = e^x \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Por último, si se evalúa el último determinante por menores asociados con la primera columna, se encuentra que

$$W(x) = 4e^x.$$

En seguida

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^x & e^{-x} \\ 0 & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ 1 & (x+2)e^x & e^{-x} \end{vmatrix}.$$

Si se utilizan menores asociados con la primera columna, se obtiene

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} xe^x & e^{-x} \\ (x+1)e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2x - 1.$$

De manera semejante,

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{-x} \\ e^x & 0 & -e^{-x} \\ e^x & 1 & e^{-x} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = 2,$$

Y

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & (x+1)e^x & 0 \\ e^x & (x+2)e^x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación (12) se tiene

$$\begin{aligned} Y(x) &= e^x \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)(-1-2t)}{4e^t}\,dt + xe^x \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)(2)}{4e^t}\,dt + e^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)e^{2t}}{4e^t}\,dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{x_0}^{x} \left\{ e^{x-t}[-1 + 2(x-t)] + e^{-(x-t)} \right\} g(t)\,dt. \end{aligned}$$

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 3, aplique el método de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación diferencial dada.

1. $y''' + y' - \tan x\,, \qquad 0 < x < \pi/2$
2. $y''' - y' = x$
3. $y''' - 2y' - y + 2y = e^{4x}$
4. Dado que x, x^2 y $1/x$ son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \qquad x > 0,$$

   Determine una solución particular.
5. Halle una fórmula que comprenda integrales para una solución particular de la ecuación diferencial

$$y''' - y'' + y' = g(x).$$

6. Halle una fórmula que comprenda integrales para una solución particular de la ecuación diferencial

$$y^{IV} - y = g(x)$$

   Sugerencia: las funciones $sen\, x, cos\, x, senh\, x\; y\; cosh\, x$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.
7. Halle una fórmula que comprenda integrales para una solución particular de la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{y''' - 3y'' + 3y'y = g(x).}$$

   Si $g(x) = x^{-2}e^{x}$, determine *Y(x).*
8. Halle una fórmula que comprenda integrales para una solución particular de la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = g(x), \qquad x > 0.}$$

   Sugerencia: compruebe que x, x^2 y x^3 son soluciones de la ecuación homogénea.

Semana 13

Temas

- Soluciones en serie cerca de un punto ordinario, parte I.
- Soluciones en serie cerca de un punto ordinario, parte II.

Objetivos

- Conocer las soluciones en serie cerca de un punto ordinario, parte I.
- Comprender las soluciones en serie cerca de un punto ordinario, parte II

Actividades

- Resolver ejercicios sobre Soluciones en serie cerca de un punto ordinario, parte I y Soluciones en serie cerca de un punto ordinario, parte I.
- Quiz número 3, sobre los temas de las semanas 11 y 12. El estudiante contara con 1 hora para resolver los ejercicios propuestos por el profesor.

Recursos

3. **Videos**

1. **Título:** Solución ED en un punto ordinario mediante series parte 1 (Ecuación de Airy)

   Descripción: Solución a una ecuación diferencial lineal de segundo orden en punto ordinario.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=_C25YtqSDfE

2. **Título:** Solución ED en un punto ordinario mediante series parte 2 (Ecuación de Airy)

Descripción: Segunda parte: Solución a una ecuación diferencial lineal de segundo orden en punto ordinario.

Link: https://www.youtube.com/watch?v=MBcFNtKigPE

4. **PDF**

1. **Título:** capitulo-6.pdf

   Descripción: Soluciones en torno a puntos ordinarios. Pág. 11 – 18.

   Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-6.pdf

- **Libros**

1. **Título:** Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición.

   Autor: William E. Boyce; Richard C. DiPrima

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre soluciones en serie de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Páginas 248 - 266.

2. **Título:** Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.

   Descripción: Teoría preliminar de las soluciones de series de potencias de ecuaciones lineales. Páginas 257 – 277.

   Autor: Dennis G. Zill.

Unidad 4

SOLUCIONES EN SERIE DE LAS ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN.

Introducción

Hallar la solución general de una ecuación diferencial lineal se apoya en la determinación de un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea. Hasta el momento se ha dado un procedimiento sistemático para construir soluciones fundamentales sólo si la ecuación tiene coeficientes constantes. Para tratar la clase mucho más grande de ecuaciones que tienen coeficientes variables es necesario extender la búsqueda de soluciones más allá de las funciones elementales del cálculo. El instrumento más importante que se necesita es la representación de una función dada mediante una serie de potencias. La idea básica es semejante a la del método de los coeficientes indeterminados: se supone que las soluciones de una ecuación diferencial dada tienen desarrollos en series de potencias y luego se intenta determinar los coeficientes de modo que se satisfaga la ecuación diferencial.

4.1 Soluciones en serie cerca de un punto ordinario parte I

En la unidad 2 se describieron métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Ahora se considerarán métodos para resolver ecuaciones lineales de segundo orden cuando los coeficientes son funciones de la variable independiente. Basta considerar la ecuación homogénea

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \tag{1}$$

Ya que el procedimiento para la ecuación no homogénea correspondiente es semejante.
Una amplia ciase de problemas en física matemática conduce a ecuaciones de la forma (1) que tiene coeficientes polinominales; por ejemplo, la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0,$$

En donde v es una constante, y la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

En donde α es una constante. Por esta razón, así como para simplificar los cálculos algebraicos, se considerará principalmente el caso en el que las funciones P, Q y R son polinomios. Sin embargo, como se verá, el método de resolución es aplicable para una clase de funciones más general que los polinomios.
Entonces por el momento, supóngase que P, Q y R son polinomios y que no tienen factores comunes. Supóngase también que se desea resolver la ecuación (1) en la vecindad de un punto x_0. La resolución de la (1) en un intervalo que contenga a x_0 está íntimamente asociada al comportamiento de P en ese intervalo.
Un punto x_0 tal que $P(x_0) \neq 0$ se conoce como punto ordinario. Como P es continua, se deduce que existe un intervalo alrededor de x_0 en el que $P(x)$ nunca es cero. En ese intervalo es posible dividir la ecuación (1) entre $P(x)$ para obtener

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

En donde $p(x) = Q(x)/P(x)$ y $q(x) = R(x)/P(x)$ son funciones continuas. De donde, según el teorema 2.2.1 de existencia y unicidad, en ese intervalo existe una solución única de (1) que también satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ para valores arbitrarios de y_0 y y'_0. En esta sección y en la siguiente se analiza la resolución de la ecuación (1) en la vecindad de un punto ordinario.

Por otra parte, si $P(x_0) = 0$, entonces a x_0 se le llama **punto singular** de la ecuación (1). En este caso, por lo menos una de $Q(x_0)$ y $R(x_0)$ es diferente de cero. Como consecuencia, por lo menos uno de los coeficientes p y q de la ecuación (2) se vuelve no acotado cuando $x \to x_0$ y, por tanto, el teorema 2.2.1 no es válido en este caso.

Ahora se abordará el problema de resolver la ecuación (1) en la vecindad de un punto ordinario x_0. Se buscan soluciones de la forma

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad (3)$$

Y se supone que la serie converge en el intervalo $|x - x_0| < \rho$ para algún $\rho > 0$. Aunque a primera vista puede parecer poco atractivo buscar una solución en la forma de una serie de potencias, en realidad es una forma conveniente y útil para una solución. Dentro de sus intervalos de convergencia, las series de potencias se comportan bastante parecido a los polinomios y es fácil manipularlas analítica y numéricamente. De hecho, incluso si es posible obtener una solución en términos de funciones elementales, como funciones exponenciales o trigonométricas, es probable que se requiera una serie de potencias o alguna expresión equivalente si se desea evaluarlas numéricamente o trazar sus gráficas.

La manera más práctica para determinar los coeficientes a_n es sustituir por la serie (3) y sus derivadas y, y' y y'' en la ecuación (1). Los siguientes ejemplos ilustran este proceso.

Las operaciones, como la derivación, que intervienen en el procedimiento se justifican en tanto se permanezca dentro del intervalo de convergencia. Las ecuaciones diferenciales de estos ejemplos, por derecho propio, también tienen una importancia considerable (1).

Ejemplo 1.

Encontrar una solución en serie de la ecuación

$$y'' + y = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \qquad (4)$$

Como se sabe, dos soluciones lineales independientes de esta ecuación son $sen\, x$ y $cos\, x$, por lo que para resolverla no se requieren métodos de series. Sin embargo, este ejemplo ilustra la aplicación de l series de potencias en un caso relativamente sencillo. Para la ecuación (4), $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ y $R(x) = 1$; de donde, todos los puntos son ordinarios.

Se busca una solución en la forma de una serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$,

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \end{aligned} \qquad (5)$$

Y se supone que la serie converge en algún intervalo $x < p$.

Si se deriva término a término se obtiene

$$y' = a_1 + 2a_1 x + \cdots + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + (n+2)a_{n+2}x^{n+1} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}, \tag{6}$$

$$y'' = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + (n+1)na_{n+1}x^{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \tag{7}$$

Al sustituir por las series (5) y (7) y' y y'' en la ecuación (4) da

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

A continuación, en la primera suma, se desplaza el índice de suma al sustituir n por $n+2$ y empezar la suma en 0 en vez de 2; se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

O bien,

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + a_n]x^n = 0$$

Para que esta ecuación se satisfaga para toda x, el coeficiente de cada potencia de x debe ser cero; de donde, se concluye que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

La ecuación (8) se conoce como **relación de recurrencia**. Los coeficientes sucesivos pueden evaluarse uno por uno al escribir la relación de recurrencia primero para $n = 0$, después para $n = 1$, etcétera. En este ejemplo, (8) relaciona cada coeficiente con el segundo antes de él. Por tanto, los coeficientes de índice par $(a_0,\ a_2, a_4, \ldots)$ y los de índice impar $(a_1,\ a_3, a_5, \ldots)$ quedan determinados por separado. Para los coeficientes de índice par se tiene

$$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 1} = \frac{a_0}{2!}, \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 3} = \frac{a_0}{4!}, \qquad a_6 = -\frac{a_4}{6\cdot 5} = \frac{a_0}{6!}, \ldots$$

Estos resultados sugieren[17] que, en general, si $n = 2k$, entonces

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0, \qquad k = 1, 2, 3, \dots \tag{9}$$

De manera semejante, para los coeficientes de índice impar

$$a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = -\frac{a_1}{3!}, \qquad a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = +\frac{a_1}{5!}, \qquad a_7 = -\frac{a_5}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{7!}, \dots,$$

Y en general, si $n = 2k + 1$, entonces

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1, \qquad k = 1, 2, 3, \dots \tag{10}$$

Si se sustituyen estos coeficientes en la ecuación (5), se tiene

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 \\ &\quad + \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots \\ &= a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots \right] \\ &\quad + a_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots \right] \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Ahora que se han obtenido formalmente las dos soluciones en serie de la ecuación (4), es posible hacer la prueba respecto a su convergencia. Si se aplica la prueba de la razón, es fácil demostrar que cada una de las series de (11) converge para toda x, y esto justifica retroactivamente todos los pasos aplicados en la obtención de las soluciones. De hecho, se reconoce que la primera serie de (11) es exactamente la serie Taylor para $cos\ x$ alrededor de $x = 0$ y que la segunda es la serie de Taylor para $sen\ x$ alrededor de $x = 0$. Por tanto, como se esperaba, se obtiene la solución $y = a_0\ cos\ x + a_1\ sen\ x$.

Nótese que no se impusieron condiciones sobre a_0 y a_1, de donde, son arbitrarias. Con base en las ecuaciones (5) y (6), se ve que y y y', evaluadas en $x = 0$, son a_0 y a_1 respectivamente.

---

[17] El resultado que se da en la ecuación (9) y otras fórmulas semejantes en este capítulo puede probarse por inducción matemática. Se supone que estos resultados son plausibles y se omite el argumento inductivo.

Como las condiciones iniciales $y(0)$ y $y'(0)$ se puede elegir de manera arbitraria, se concluye que a_0 y a_1, deben ser arbitrarias hasta que se den condiciones iniciales específicas.
En las figuras 4.1.1 y 4.1.2 se muestra cómo las sumas parciales de las series de la ecuación (11) se aproximan a $cos\ x$ y $sen\ x$. A medida que aumenta el número de términos, el intervalo sobre el cual la aproximación es satisfactoria se hace más largo y, para cada x en este intervalo, mejora la exactitud de la aproximación.

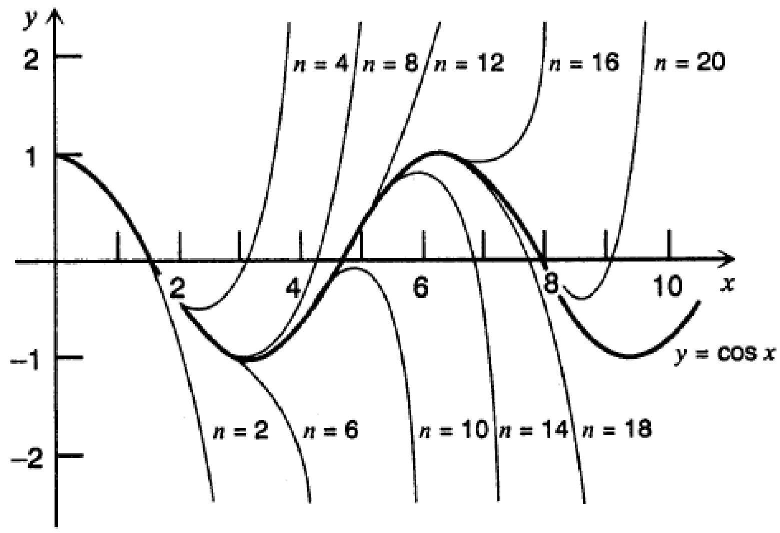


Figura 4.1.1 Aproximaciones polinomiales para $\cos x$. El valor de n es el grado del polinomio de aproximación.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 251.

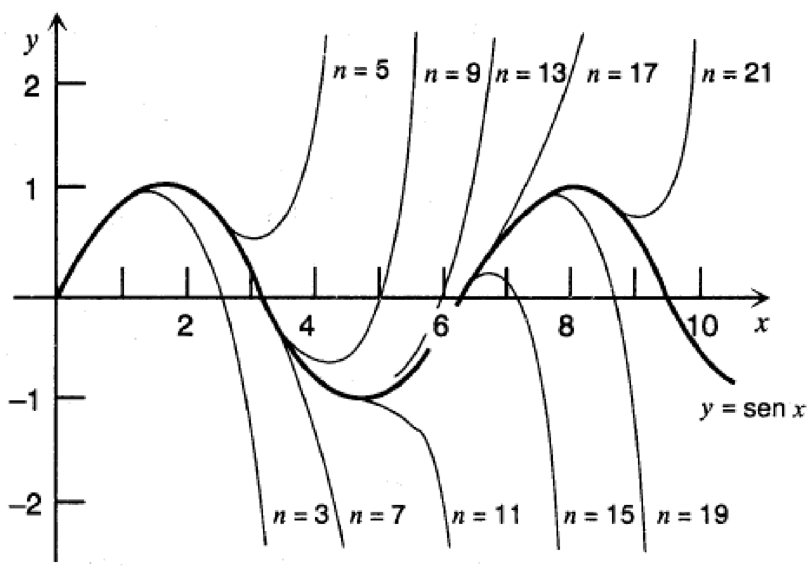


Figura 4.1.2 Aproximaciones polinomiales para $sen\ x$. El valor de n es el grado del polinomio de aproximación.
Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 252.

En el ejemplo 1 se sabía desde el principio que $sen\, x$ y $cos\, x$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (4). Sin embargo, si se hubiese ignorado esto y simplemente se hubiera resuelto (4) con la aplicación de métodos por series, se habría obtenido la solución (11). Al aceptar el hecho de que la ecuación diferencial (4) se presenta a menudo en las aplicaciones, podría decidirse dar nombres especiales a las dos soluciones de la ecuación (11); quizá

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Entonces, podría plantearse la pregunta de cuáles propiedades tienen estas funciones. Por ejemplo, es razonablemente obvio, a partir de los desarrollos en serie, que $C(0) = 1, S(0) = 0$, $C(-x) = C(x)$ y $S(-x) = -S(x)$. Otra fórmula que se deduce con facilidad es

$$\frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = C(x)$$

De manera semejante, $dC(x)/dx = -S(x)$. Es más, al calcularlas con las series infinitas3 es posible demostrar que las funciones $C(x)$ y $S(x)$ poseen todas las propiedades analíticas y algebraicas usuales de las funciones coseno y seno, respectivamente.

Aunque quizá el lector vio por primera vez las funciones seno y coseno definidos de manera más elemental en términos de triángulos rectángulos, resulta interesante que estas funciones puedan definirse como soluciones de cierta ecuación diferencial sencilla lineal de segundo orden. Con más precisión, la función $sen\, x$ puede definirse como la solución del problema con valor inicial $y'' + \; y = 0, y(0) = 0\,, y'(0) = 1$; de modo análogo la función $cos\, x$ puede definirse como la solución del problema con valor inicial $y'' + \; y = 0, y(0) = 1\,, y'(0) = 0$. También se pueden usar otros problemas con valor inicial para definir estas funciones; ver el problema 22. Muchas otras funciones importantes en física matemática también se definen como soluciones de ciertos problemas con valor inicial. Para la mayor parte de estas funciones no existe manera más sencilla o elemental de enfocarlas. (1)

Ejemplo 2.

Encontrar una solución en serie de potencias de x para la ecuación de Airy[18]

[18] Sir George Airy (1801-1892), astrónomo y matemático inglés, fue director del Observatorio de Greenwich de 1835 a 1881. Una razón por la que la ecuación de Airy es interesante es que para x negativa las soluciones son oscilatorias,

$$y'' - xy = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{12}$$

Para esta ecuación, $P(x) = 1, Q(x) = 0$ y $R(x) = -x$; de donde, todos los puntos son ordinarios; en particular, $x = 0$. Se supondrá que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{13}$$

Y que la serie converge en algún intervalo $|x| < \rho$. La serie para y'' está dada por la ecuación (7); como se explicó en el ejemplo anterior, es posible volver a escribir la como

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \tag{14}$$

Si se sustituyen por las series (13) y (14) y y y'' en la ecuación (12), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}. \tag{15}$$

En seguida, se desplaza el índice de suma en la serie del segundo miembro de esta ecuación al sustituir n por $n-1$ e iniciar la suma en 1 en vez de cero. Por tanto, se tiene

$$2 \cdot 1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

De nuevo, para que esta ecuación se satisfaga para toda x, es necesario que los coeficientes de las potencias iguales de x sean iguales; de donde, $a_2 = 0$ y se obtiene la relación de recurrencia

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1} \qquad para\; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{16}$$

Dado que a_{n+2} está dada en términos de a_{n-1} es evidente que las a quedan determinadas en pasos de tres. Por tanto, a_0 determina a_3, la que a su vez determina $a_6, \ldots$; a_1 determina a_4, la que a su vez determina a_7, ..., y a_2 determina a_5, la que a su vez determina a_8, ... Como $a_2 = 0$, de inmediato se concluye que $a_5 = a_8 = a_{11} = \cdots = 0$.

Para la sucesión $a_0, a_3, a_6, a_9, \ldots$ se hace $n = 1, 4, 7, 10, \ldots$ en la relación de recurrencia:

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \qquad a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \qquad a_9 = \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \ldots$$

Para esta sucesión de coeficientes es conveniente escribir una fórmula para $a_{3n}, n = 1, 2, 3, \ldots$ Los resultados anteriores sugieren la fórmula general

---

semejante a funciones trigonométricas, y para x positiva son monótonas, semejante a funciones hiperbólicas. ¿Puede explicar por qué es razonable esperar ese comportamiento?

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-4)(3n-3)(3n-1)(3n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Para la sucesión $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \ldots$, se hace $n = 2, 5, 8, 11, \ldots$ en la relación de recurrencia:

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}, \qquad a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}, \qquad a_{10} = \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \ldots$$

De la misma manera que antes, se encuentra que

$$a_{3n} = \frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n-3)(3n-2)(3n+1)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La solución general de la ecuación de Airy es

$$\begin{aligned} y &= a_0\left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)} + \cdots\right] \\ &\quad + a_1\left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)} + \cdots\right] \\ &= a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)}\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Una vez que se han obtenido estas dos soluciones en serie ahora se puede investigar su convergencia. Debido al rápido crecimiento de los denominadores de los términos de las series (17), podría esperarse que estas series tengan un radio grande de convergencia. En efecto, es fácil aplicar la prueba de la razón para demostrar que estas dos series convergen para toda x; ver el problema 20.

Si, por el momento, se supone que las series convergen para toda x, sean y_1 y y_2 las funciones definidas por las expresiones entre los primeros y segundos corchetes, respectivamente, de la ecuación (17). Entonces, al elegir primero $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ y luego $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, se deduce que y_1 y y_2 son por separado soluciones de (12). Anótese que y_1 satisface las condiciones iniciales $y_1(0) = 1, y_1(0) = 0$ y que y_2 satisface las condiciones iniciales $y_2(0) = 1, y_2'(0) = 0$. Por tanto, $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ y, como consecuencia, y_1 y y_2 son linealmente independientes. De donde, la solución general de la ecuación de Airy es

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

En las figuras 4.1.3 y 4.1.4, respectivamente, se muestran las gráficas de las soluciones y_1 y y_2 de la ecuación de Airy, así como las gráficas de varias sumas parciales de las dos series de la ecuación (17). Observe que tanto y_1 como y_2 son monótonas para $x > 0$ y oscilatorias para $x < 0$. También, con base en las figuras, es posible ver que las oscilaciones no son uniformes, sino que decaen en amplitud y crecen en frecuencia a medida que aumenta la distancia al origen. Como contraste con el ejemplo 1, las soluciones y_1 y y_2 de la ecuación de Airy no son funciones elementales que el lector ya haya encontrado en el cálculo. Sin embargo, debido a su importancia en algunas aplicaciones físicas, estas funciones se han estudiado estupendamente y sus propiedades son bien conocidas para los matemáticos y los científicos aplicados.

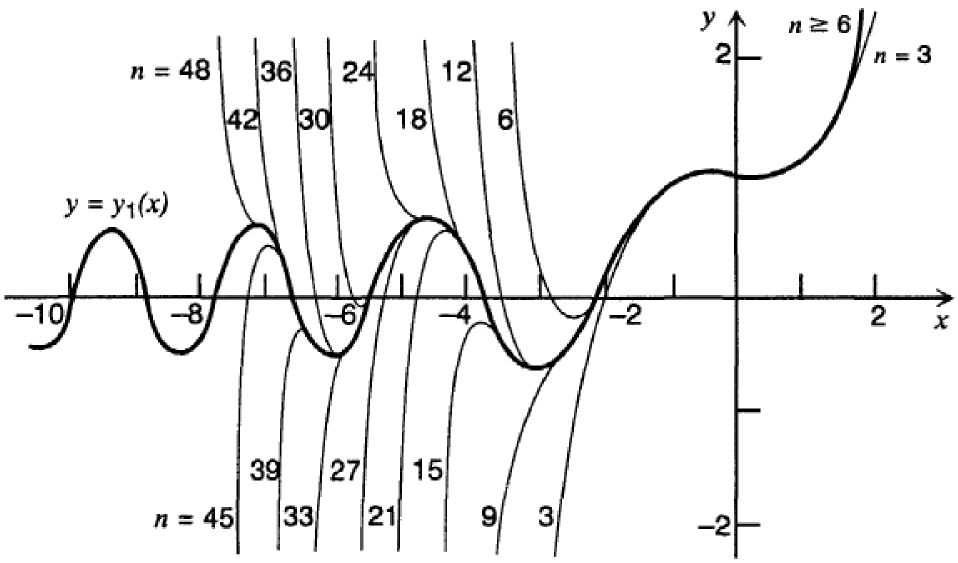


Figura 4.1.3 Aproximaciones polinomiales para la solución $y_1(x\ )$ de la ecuación de Airy. El valor de n es el grado del polinomio de aproximación.

Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 255.

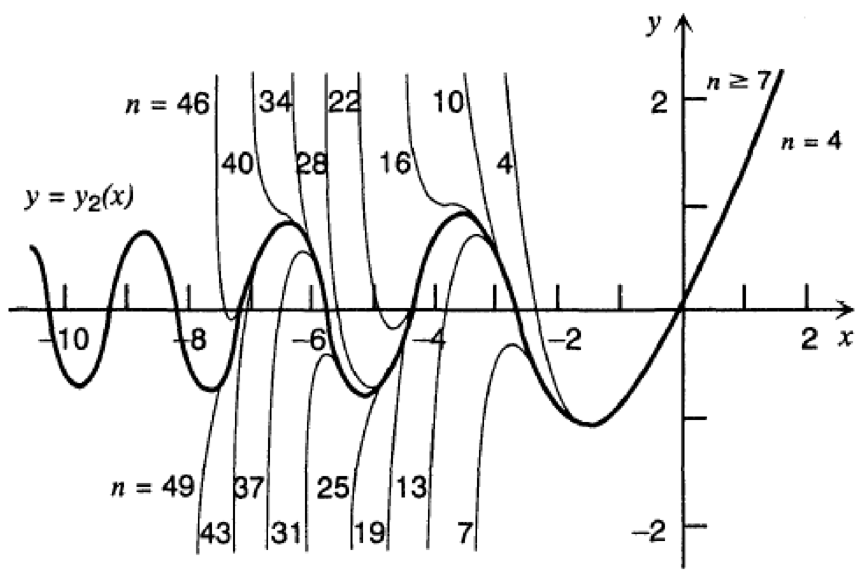


Figura 4.1.4 Aproximaciones polinomiales para la solución $y_2(x\ )$ de la ecuación de Airy. El valor de n es el grado del polinomio de aproximación.

Fuente: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición. Pág. 255.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 8, resuelva la ecuación diferencial dada por medio de una serie de potencias alrededor de un punto dado x_0. Halle la relación de recurrencia; encuentre también los cuatro primeros términos de cada una de dos soluciones linealmente independientes (a menos que la serie termine antes). Si es posible, encuentre el término general de cada solución.

1. $y'' - y = 0, \quad x_0 = 0$
2. $y'' - xy' - y = 0 \quad x_0 = 0$
3. $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1$
4. $y'' + k^2x^2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad k \, una \, constante$
5. $(1 - x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0$
6. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0$
7. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
8. $xy'' + y' + xy = 0, \quad x_0 = 1$

En cada uno de los problemas 9 a 11 encuentre los cuatro primeros términos diferentes de cero de la solución del problema con valor inicial dado.

9. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1;$
10. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3;$
11. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1\,;$

4.2 Soluciones en serie cerca de un punto ordinario parte II

En la sección anterior se consideró el problema de encontrar soluciones de

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{1}$$

En donde P, Q y R son polinomios, en la vecindad de un punto ordinario x_0. Si se supone que la ecuación (1) tiene una solución $y = \phi(x)$ y que ϕ tiene una serie de Taylor

$$y = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{2}$$

Que converge para $|x - x_0| < p,\ p > 0$, se encuentra que la a_n puede determinarse el sustituir directamente por la serie (2) y en la ecuación (1).
Supóngase entonces que existe una solución de la ecuación (1), de la forma (2). Al derivar (2) m veces e igualar x a x_0, se concluye que

$$\boldsymbol{m!\,a_m = \phi^{(m)}(x_0).}$$

De donde, para calcular la a_n de la serie (2) es necesario demostrar que es posible determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ a partir de la ecuación diferencial (1).
Para determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ y la a_n correspondiente, para $a_n = 2, 3, \ldots$, se regresa a la ecuación (1). Dado que ϕ es una solución de (1), se tiene

$$P(x)\phi''(x) + Q(x)\phi'(x) + R(x)\phi(x) = 0$$

Para el intervalo alrededor de x_0 para el que P no se anula es posible escribir esta ecuación en la forma

$$\phi''(x) = -p(x)\phi'(x) - q(x)\phi(x) \tag{3}$$

En donde $p(x) = Q(x)/P(x)$ y $q(x) = R(x)/P(x)$. Si se iguala x a x_0 en la ecuación (3) da

$$\phi''(x_0) = -p(x_0)\phi'(x_0) - q(x_0)\phi(x_0)$$

De donde, a_2 queda expresada por

$$2!a_2 = \phi''(x_0) = -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0 \tag{4}$$

Para determinar a_3 se deriva la ecuación (3) y, a continuación x se iguala a x_0, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} 3!a_3 = \phi'''(x_0) &= -\left[p\phi'' + (p' + q)\phi' + q'\phi\right]\Big|_{x=x_0} \\ &= -2!p(x_0)a_2 - [p'(x_0) + q(x_0)]a_1 - q'(x_0)a_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Si se sustituye a_2 por su expresión dada en la ecuación (4) se obtiene a_3 en términos de a_1 y a_0. Como P, Q y R son polinomios y $P(x_0) \neq 0$, todas las derivadas de p y q existen en x_0.

Lo que se necesita es suponer que las funciones p y q son analíticas en x_0; es decir, que tienen desarrollos en serie de Taylor que convergen a ellas en algún intervalo alrededor del punto x_0:

$$p(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + \cdots + p_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n, \tag{6}$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \cdots + q_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n. \tag{7}$$

Con esta idea en mente puede generalizarse la definición de punto ordinario y de punto singular de la ecuación (1) como sigue: si las funciones $p = Q/P$ y $q = R/P$ son analíticas en x_0, entonces se dice que el punto x_0 es un **punto ordinario** de la ecuación diferencial (1); de lo contrario, es un **punto singular**. (1)

Teorema 4.2.1

Si x_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial (1)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

Es decir, si $p = QP$ y $q = R/P$ son analíticas en x_0. entonces la solución general de la ecuación (1) es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \tag{8}$$

En donde a_0 y a_1 son arbitrarias y y_1 y y_2, son soluciones en serie linealmente independientes, analíticas en x_0. Además el radio de convergencia de cada una de las soluciones en serie y_1 y y_2 es por lo menos tan grande como el mínimo de los radios de convergencia de las series para p y q. Los coeficientes de las soluciones en serie se determinan al sustituir por la serie (2) y en la ecuación (1).

Ejemplo 1.

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor de $(1+x^2)^{-1}$ alrededor de $x=0$? Una manera de proceder es hallar la serie de Taylor en cuestión, a saber,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots .$$

Entonces es posible verificar por la prueba de la razón que $p = 1$. Otro enfoque es observar que los ceros de $1 + x^2$ son $x = \pm i$. Dado que la distancia de 0 a i o a $-i$ en el plano complejo es uno el radio de convergencia de la serie de potencias alrededor de $x = 0$ es uno.

Ejemplo 2.

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor para $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ alrededor de $x = 0$? ¿Y alrededor de $x = 1$?
En primer lugar, nótese que

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Tiene las soluciones $x = 1 \pm i$. La distancia de $x = 0$ a $x = 1 + i$ o $x = 1 - i$ en el plano complejo es $\sqrt{2}$; de donde, el radio de convergencia del desarrollo en serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alrededor de $x = 0$ es $\sqrt{2}$.
La distancia de $x = 1$ a $x = 1 + i$ o $x = 1 - i$ es 1; por tanto, el radio de convergencia del desarrollo $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n$ alrededor de $x = 1$ es 1.

Ejemplo 3.

Determinar una cota inferior para el radio de convergencia de las soluciones en serie de la ecuación diferencial

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0 \tag{9}$$

Alrededor del punto $x = 0$; alrededor del punto $x = -\frac{1}{2}$.

Una vez más, P, Q y R son polinomios y los ceros de P están en x=±i. La distancia en el plano complejo de 0 a $\pm i$ es 1 y de $-\frac{1}{2}$ a $\pm i$ es $\sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{5}/2$. De donde, en el primer caso la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge por lo menos para $|x| < 1$, y en el segundo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x+\frac{1}{2}\right)^n$ converge por lo menos para $\left|x+\frac{1}{2}\right| < \sqrt{5}/2$.

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 4, determine $\phi''(x_0), \phi'''(x_0)$ y $\phi^{IV}(x_0)$ para el punto x_0 dado si $y = \phi(x)$ es una solución del problema con valor inicial que se da.

1. $y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' + (sen\, x)y' + (cos\, x)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
3. $x^2y'' + (1+x)y' + 3(ln\, x)y = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$
4. $y'' + x^2y' + (senx)y = 0; \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1$

En cada uno de los problemas 5 a 8, determinen una cota inferior para el radio de convergencia de las soluciones serie alrededor de cada punto que se da, x_0 para la ecuación diferencial dada.

5. $y'' + 4y' + 6xy = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4$
6. $(x^2 — 2x — 3)y'' + xy' + 4y = 0; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -4, \quad x_0 = 0$
7. $(1 + x^3)y'' + 4xy' + y = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2$
8. $xy'' + y = 0; \quad x_0 = 1$

Ejercicios propuestos para el tercer quiz.

1. Halle la solución de la ecuación diferencial dada.
   a. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$
   b. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$
2. Aplique el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial dada. A continuación, compruebe la respuesta mediante la aplicación del método de los coeficientes indeterminados.
   13. $4y'' - 4y' + y = 16e^{x/2}$
   14. $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$
3. Exprese el número complejo dado en la forma

$$R(cos\ \theta + i\ sen\ \theta) - Re^{i\theta}$$

   Observe que $e^{i(\theta+2m\pi)} = e^{i\theta}$ si m es un entero.
   17. $\sqrt{3} - i$
   18. $-1 + \sqrt{3i}$
4. Determine una forma adecuada para y(x), si ha de aplicarse el método de los coeficientes indeterminados. No evalué las constantes.

$$y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = e^x + sen\ x$$

5. Aplique el método de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación diferencial dada.
   9. $y''' + y' - \tan x\,, \qquad 0 < x < \pi/2$
   10. $y''' - y' = x$

Semana 14

Temas

- Definición de la transformada de Laplace.
- Solución de problemas con valor inicial.

Objetivos

- Conocer y entender los conceptos básicos de la transformada de Laplace.
- Estudiar las soluciones de problemas con valor inicial.

Actividades

- Socializar los conceptos de la transformada de Laplace.
- Solución de problemas de la transformada de la place con valor inicial.
- Taller número 3, sobre los temas de las semanas 13 y 14. El estudiante contara con 1 hora para resolver los ejercicios propuestos por el profesor.

Recursos

- **Videos**

1. **Título:** Solución de una ecuación diferencial usando la transformada de Laplace parte 1

   Descripción: Aplicación de la transformada de Laplace: Método general para resolver una ecuación diferencial con valores iniciales mediante el uso de la transformada de Laplace.

   Link: https://www.youtube.com/watch?v=BbnqJZICojM

- **PDF**

1. **Título:** capitulo-7.pdf

   Descripción: Definición de la transformada de Laplace. Pág. 2 - 11.

   Link: https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-7.pdf

- **Libros**

1. **Título:** Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, 4ta edición.

   Autor: William E. Boyce; Richard C. DiPrima

   Descripción: Conceptos básicos, ejercicios resueltos y problemas sobre la transformada de Laplace. Páginas 309 - 327.

2. **Título:** Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.

   Descripción: Teoría preliminar de la transformada de Laplace. Páginas 296 – 354.

   Autor: Dennis G. Zill.

Unidad 5

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Introducción

Muchos problemas prácticos en la ingeniería comprenden sistemas mecánicos o eléctricos que reciben la acción de términos de fuerza discontinuos o de impulso. Otro método que se adapta especialmente bien a estos problemas, aunque su utilidad es mucho más general, se basa en la transformada de Laplace. En este capítulo se describe como se aplica este importante método, haciendo resaltar los problemas comunes que surgen en las aplicaciones de ingeniería.

5.1 Definición de la transformada de Laplace

Entre los instrumentos que resultan muy útiles al resolver ecuaciones diferenciales lineales se encuentran las **transformadas integrales**. Una transformada integral es una relación de la forma

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t)\, dt \tag{1}$$

En donde una función dada f se transforma en otra función F por medio de una integral. Se dice que la función F es la transformada de f y la función K se llama kernel (núcleo en alemán) de la transformación. La idea general es aplicar la relación (1) a fin de transformar un problema para f en un problema más sencillo para F, resolver este problema más simple y luego recuperar la función deseada f a partir de su transformada F. Al hacer una elección apropiada del kernel K y de los límites de integración α y β, a menudo es posible simplificar de manera sustancial un problema que incluya una ecuación diferencial lineal. Varias transformaciones integrales se aplican con amplitud, y cada una es adecuada para resolver ciertos tipos de problemas.

En este capítulo se analizan las propiedades y algunas de las aplicaciones de la transformada de Laplace. Esta transformada se define como sigue: sea $f(t)$ dada para $i > 0$ y supóngase que f satisface ciertas condiciones que se dan un poco después; entonces, la transformada de Laplace de f, que se denotara par

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt. \tag{2}$$

En esta transformada se usa el kernel $K(s,t) = e^{-st}$ y, por consiguiente, se asocia de modo natural a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La transformada de Laplace es particularmente valiosa en análisis de circuitos, en donde son comunes términos de fuerza discontinuos o de impulso, pero también es importante en otras aplicaciones.

En virtud de que la transformada de Laplace se define ante una integral sobre el intervalo de cero al infinito, será de utilidad repasar primero algunos hechos básicos sobre esas integrales. En primer lugar, una integral sobre un intervalo no acotado se llama **integral impropia** y se define como un límite de integrales sobre intervalos finitos; por tanto,

$$\int_{a}^{\infty} f(t)\, dt = \lim_{A \to \infty} \int_{a}^{A} f(t)\, dt \tag{3}$$

En donde A es un número real positivo (1).

Ejemplo 1.

Sea $f(t) = e^{ct}, \ \ t \geq 0$, en donde c es una constante real diferente de cero; entonces,

$$\int_0^{\infty} \boldsymbol{e^{ct}dt} = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} \boldsymbol{e^{ct}dt} = \lim_{A\to\infty} \frac{\boldsymbol{e^{ct}}}{\boldsymbol{c}}\bigg|_0^A = \lim_{A\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{e^{cA}} - \mathbf{1}).$$

Se concluye que la integral impropia converge si $c < 0$ y diverge si $c > 0$. Si $c = 0$, entonces el integrando es la unidad y una vez más la integral diverge.

Ejemplo 2.

Sea $f(t) = 1/t, i \geq 1$; entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{t}} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{t}} = \lim_{A\to\infty} \boldsymbol{ln\ A}.$$

Como $\lim_{A\to\infty} 1n\ A = \infty$, la integral impropia diverge

Teorema 5.1.1

Si f es seccionalmente continua para $t \geq a, si\ \{f(t)\} \leq g(t)$ cuando $t \geq M$ para alguna constante positiva M y si $\int_M^{\infty} g(t)dt$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(t)dt$ también converge. Por otra parte, si $f(t) \geq g(t) \geq 0$ para $t \geq M$ y si $\int_M^{\infty} g(t)dt$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} f(t)dt$ también diverge.

Teorema 5.1.2

Supóngase que

1. f es seccionalmente continua sobre el intervalo $0 \leq t \leq A$ para cualquier A positiva.
2. $\{f(t)\} \leq Ke^{at}$ cuando $t \geq M$. En esta desigualdad, K, a y M son constantes reales, K y M son necesariamente positivas.

Entonces la transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$$

Definida en la ecuación (2), existe para $s > a$.

Ejemplo 3.

Sea $f(t) = 1, t \geq 0$; entonces

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$

Ejemplo 4.

Sea $f(t) = e^{at},\ t \geq 0$; entonces,

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{s-a}, \qquad s > a.$$

Ejemplo 5.

Sea $f(t) = sen\ at,\ t \geq 0$; entonces

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen} at\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} at\, dt, \qquad s > 0.$$

Dado que

$$F(s) = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-st} \operatorname{sen} at\, dt,$$

Después de integrar por partes se obtiene

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{A \to \infty} \left[-\frac{e^{-st} \cos at}{a} \bigg|_0^A - \frac{s}{a} \int_0^A e^{-st} \cos at\, dt \right] \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \int_0^\infty e^{-st} \cos at\, dt. \end{aligned}$$

Entonces una segunda integración por partes de

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} at\, dt \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s). \end{aligned}$$

De donde, al despejar $F(s)$ se tiene

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad s > 0.$$

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 3, trace la gráfica de la función dada. En cada caso, determinar si f es continua, seccionalmente continua o ninguna de las dos cosas, sobre el intervalo $0 \leq t \leq 3$.

1. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 6-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^2, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 3-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

4. Encuentre la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones
   a) t
   b) t^2
   c) t^n

   En donde *n* es un entero positivo.
5. Encuentre la transformada de Laplace de $f(t) = cos\ at$ en donde *a* es una constante real.

   Recuerde que $cosh\ bt = (e^{bt} + e^{-bt})/2$ y $senh\ bt = (e^{bt} - e^{-bt})/2$.

En cada uno de los problemas 6 a 9, halle la transformada de Laplace de la función dada; *a y b* son constantes reales.

6. $\cosh bt$
7. $\operatorname{senh} bt$
8. $\mathrm{e}^{\mathrm{et}} \cosh bt$
9. $\mathrm{e}^{\mathrm{et}} \operatorname{senh} bt$

En cada uno de los problemas 10 a 13, determine si la integral dada converge o diverge.

10. $\int_0^\infty (t^2+1)^{-1} dt$
11. $\int_0^\infty te^{-t} dt$
12. $\int_1^\infty t^{-2} e^t dt$
13. $\int_0^\infty e^{-t} \cos t \, dt$

5.2 Solución de problemas con valor inicial

En esta sección se muestra cómo se puede aplicar la transformada de Laplace para resolver problemas con valor inicial para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La utilidad de la transformada de Laplace a este respecto radica principalmente en el hecho de que la transformada de f está relacionada de una manera sencilla con la transformada de f. La relación se expresa en el siguiente teorema. (1)

Teorema 5.2.1

Supóngase que f es continua y que f' es seccionalmente continua sobre cualquier intervalo $0 \leq t \leq A$. Supóngase además que existen las constantes K, a y M tales que $\{f(t) \leq Ke^{at}$ para $t > M$. Entonces, $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > a$ y además

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Para probar este teorema, se considerará la siguiente integral

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt$$

Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ denotan los puntos en el intervalo $0 \leq t \leq A$ en donde f' es discontinua, se obtiene

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t) dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f'(t) dt$$

Si se integra por partes cada término de la derecha se obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\int_0^A e^{-st} f'(t) dt} &= \boldsymbol{e^{-st} f(t) \Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t) \Big|_{t_n}^{A}} \\ &\boldsymbol{+S \left[\int_0^{t_1} e^{-st} f'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t) dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f'(t) dt \right]} \end{aligned}$$

Dado que f es continua, se cancelan las contribuciones de los términos integrados en $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Al combinar las integrales da

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f'(t)dt$$

Cuando $A \to \infty$, $e^{-st}f(A) \to 0$ siempre que $s > a$. De donde, para $s > a$

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0), \tag{1}$$

Con lo que se establece el teorema.

Si f' y f'' satisfacen las mismas condiciones impuestas sobre f y f', respectivamente, entonces se concluye que la transformada de Laplace de f'' también existe para $s > a$ y se expresa por

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2\mathscr{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0). \tag{2}$$

Corolario

Supóngase que las funciones $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ son continuas, y que $f^{(n)}$ es seccionalmente continua sobre cualquier intervalo $0 \leq t \leq A$. Supóngase además que existen las constantes K, a y M tales que $\{f(t)\} \leq Ke^{at}, \{f'(t)\} \leq Ke^{at}, \dots, \{f^{(n-1)}(t)\} \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$.
Entonces $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe para $s > a$ y se expresa por

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = \mathrm{s}^{\mathrm{n}}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{1}$$

A continuación se muestra cómo es posible aplicar la transformada de Laplace para resolver problemas con valor inicial. En primer lugar considérese la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0 \tag{3}$$

Y las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \tag{4}$$

Este problema simple se resuelve con facilidad. La ecuación característica es

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0 \tag{5}$$

Y, como consecuencia, la solución general de (3) es

$$y = c_1 e^{-1} + c_2 e^{2t} \tag{6}$$

Para satisfacer las condiciones iniciales (4) es necesario tener $c_1 + c_2 = 1$ y $-c_1 + 2c_2 = 0$; de donde, $c_1 = 2/3$ y $c_2 = 1/3$, de modo que la solucion del problema con valor inicial (3) y (4) es

$$\boldsymbol{y = \phi(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}} \tag{7}$$

Ahora se resolverá el problema dado por medio de la transformada de Laplace. Para hacerlo, se debe suponer que el problema tiene una solución $y = \phi(t)$. Entonces, si se toma la transformada de Laplace de la ecuación diferencial (3), se obtiene

$$\mathscr{L}\{y''\} - \mathscr{L}\{y'\} - 2\mathscr{L}\{y\} = 0, \tag{8}$$

En donde se aplicó la linealidad de la transformada para escribir la transformada de una suma como la suma de las transformadas por separado. Después de aplicar el corolario para expresar $\mathcal{L}\{y''\}$ y $\mathcal{L}\{y'\}$ en términos de $\mathcal{L}\{y\}$, se encuentra que la ecuación (8) toma la forma

$$\boldsymbol{s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0}$$

O bien,

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1-s)y(0) - y'(0) = 0, \tag{9}$$

En donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. Si se sustituyen $y(0)$ $y'(0)$ de la ecuación (9) para sus valores dados en las condiciones iniciales (4) y, a continuación, se despeja $Y(s)$, se obtiene

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \tag{10}$$

Por tanto, se ha obtenido una expresión para la transformada de Laplace $Y(s)$ de la solución $y = \phi(t)$ del problema con valor inicial dado.

Se puede hacer esto con mayor facilidad al desarrollar en fracciones parciales el segundo miembro de (11). De este modo, se escribe

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+1} = \frac{a(s+1)+b(s-2)}{(s-2)(s+1)}. \tag{11}$$

Entonces, si se igualan los numeradores de los miembros segundo y cuarto de (11) se obtiene

$$s - 1 = a(s+1) + b(s-2),$$

Ecuación que debe cumplirse para toda s. En particular, si se hace $s = 2$, entonces se deduce que $a = 1/3$. De manera semejante, si se hace $s = -1$, entonces se encuentra que $b = 2/3$. Al sustituir estos valores de a y b, respectivamente, se tiene

$$Y(s) = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1} \tag{12}$$

Por último, se concluye que $\frac{1}{3}e^{2t}$ tiene la transformada $\frac{1}{3}(s-2)^{-1}$; de modo semejante, $\frac{2}{3}e^{-t}$ tiene la transformada $\frac{2}{3}(s+1)^{-1}$.

De donde, por la linealidad de la transformada de Laplace,

$$y = \phi(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

Tiene la transformada (12). Por supuesto, esta es la misma solución que se obtuvo antes de diferente manera.

Tabla 5.2.1 *Algunas transformadas elementales de Laplace (1)*

[19]

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \qquad s > 0$
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \qquad s > a$
3. t^n, $n =$ entero positivo	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0$
4. t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \qquad s > 0$
5. sen at	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
6. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
7. senh at	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > \lvert a \rvert$
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \qquad s > \lvert a \rvert$
9. e^{at} sen bt	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \qquad s > a$
10. $e^{at} \cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \qquad s > a$

[19] También existen tablas más grandes.

Ejemplo 1.

Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + y = sen\ 2t \tag{13}$$

Que satisfaga las condiciones iniciales

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1 \tag{14}$$

Se supone que este problema con valor inicial tiene una solución $y = \phi(t)$ que con sus dos primeras derivadas satisface las condiciones del corolario del teorema 5.2.1. Entonces, si se toma la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, se tiene

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 2/(s^2 + 4)$$

En donde se obtuvo la transformada de $sen\ 2t$ del renglón 5 de la tabla 5.2.1. Al sustituir $y(0)$ $y'(0)$ por sus valores dados en las condiciones iniciales y despejar $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{2s^2 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \tag{15}$$

Si se aplican fracciones parciales, es posible escribir *Y(s)* en la forma

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4} = \frac{(as + b)(s^2 + 4) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \tag{16}$$

Al desarrollar el numerador del segundo miembro de la ecuación (16) e igualarlo al numerador de la (15) se encuentra que

$$2s^3 + s^2 + 8s^4 - 6 = (a + c)s^3 + (b + d)s^2 + (4a + c)s + (4b^4 - d)$$

Para toda s. Entonces, si se comparan los coeficientes de potencias iguales de s, se tiene

$$a + c = 2, \qquad b + d = 1,$$

$$4a + c = 8, \qquad 4b + d = 6.$$

Como consecuencia, $a = 2, c = 0, b = \frac{5}{3}$ y $d = -\frac{2}{3}$, de lo cual se deduce que

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{5/3}{s^2+1} - \frac{2/3}{s^2+4}. \tag{17}$$

Con base en los renglones 5 y 6 de la tabla 5.2.1, la solución del problema con valor inicial dado es

$$y = \phi(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\,sen\,t - \frac{1}{3}\,sen\,2t. \tag{18}$$

Ejemplo 2.

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y^{\mathrm{IV}} - y = 0 \tag{19}$$

Que satisfaga las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \qquad y''(0) = 0, \qquad y'''(0) = 0 \tag{20}$$

En este problema es necesario suponer que la solución $y = \phi(t)$ satisface las condiciones del corolario del teorema 5.2.1, para $n = 4$. La transformada de Laplace de la ecuación diferencial (19) es

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - 7(s) = 0.$$

En consecuencia, si se aplican las condiciones iniciales (20) y se despeja $Y(s)$, se tiene

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4-1} \tag{21}$$

El desarrollo en fracciones parciales de $Y(s)$ es

$$Y(s) = \frac{as+b}{s^2-1} + \frac{cs+d}{s^2+1}$$

Y se concluye que

$$(as + b)(s^2 + 1) + (cs + d)(s^2 - 1) = s^2 \tag{22}$$

Para toda s. Al hacer $s = 1$ y $s = -1$, respectivamente, en la ecuacion (22), se obtienen el par de ecuaciones

$$2(a + b) = 1, \qquad 2(-a + b) = 1,$$

Y, por lo tanto, $a = 0$ y $b = \frac{1}{2}$ Si en la ecuación (22) se hace $s = 0$, entonces $b - d = 0$, de modo que $d = \frac{1}{2}$ por último, al igualar los coeficientes de los términos cuadráticos de cada miembro de la ecuación (22), se encuentra que $a + c = 0$, de modo que $c = 0$. Por tanto,

$$Y(s) = \frac{1/2}{s^2 - 1} + \frac{1/2}{s^2 + 1} \tag{23}$$

Y de los renglones 4 y 5 de la tabla 5.2.1, la solución del problema con valor inicial (19), (20) es

$$y = \phi(t) = \frac{senh\ t + sen\ t}{2} \tag{24}$$

(1)

Problemas

En cada uno de los problemas 1 a 5 encuentre la transformada inversa de Laplace de la función dada.

1. $\frac{3}{s^2+4}$

2. $\frac{4}{(s-1)^3}$

3. $\frac{2}{s^2+3s-4}$

4. $\frac{2s+2}{s^2+2s+5}$

5. $\frac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$

En cada uno de los problemas 6 a 10 aplique la transformada de Laplace para resolver el problema con valor inicial dado.

6. $y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
7. $y'' - 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
8. $y'' + 2y' + 5y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
9. $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0; \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 0, \; y'''(0) = 1$
10. $y^{iv} - y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 1, \; y'''(0) = 0$

Ejercicios propuestos para el tercer taller.

1. Resuelva la ecuación diferencial dada por medio de una serie de potencias alrededor de un punto dado x_0. Halle la relación de recurrencia; encuentre también los cuatro primeros términos de cada una de dos soluciones linealmente independientes (a menos que la serie termine antes). Si es posible, encuentre el término general de cada solución.
   a. $y'' - xy' - y = 0 \quad x_0 = 0$
   b. $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1$
2. Determine $\phi''(x_0), \phi'''(x_0)$ y $\phi^{IV}(x_0)$ para el punto x_0 dado si $y = \phi(x)$ es una solución del problema con valor inicial que se da.
   a. $y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
   b. $y'' + (sen\, x)y' + (cos\, x)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
3. Encuentre la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones
   a. t
   b. t^2
   c. t^n

   En donde *n* es un entero positivo.
4. Encuentre la transformada inversa de Laplace de la función dada.
   a. $\frac{3}{s^2+4}$

   b. $\frac{4}{(s-1)^3}$

   c. $\frac{2}{s^2+3s-4}$

5. Aplique la transformada de Laplace para resolver el problema con valor inicial dado.
   a. $y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
   b. $y'' + 2y' + 5y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$

Semana 15

Actividades

- Examen parcial número 3, sobre los temas de las semanas 11 a 14. El estudiante deberá resolver los ejercicios propuestos por el profesor.

Ejercicios propuestos para el tercer parcial.

1. Determine una forma adecuada para *Y(x)* si ha de aplicarse el método de los coeficientes indeterminados. No evalué las constantes.
   a. $y'' + 3y' = 2x^4 + x^2e^{-3x} + sen\ 3x$
   b. $y'' + y = x(1 + sen\ x)$
2. Compruebe que las funciones dadas y_1 y y_2 satisfacen la ecuación homogénea correspondiente; entonces encuentre una solución particular de la ecuación no homogénea dada.
   a. $x^2y'' - 2y = 3x^2 - 1, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^{-1}$
   b. $xy'' - (1 + x)y' + y = x^2e^{2x}, \quad x > 0; \quad y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^x$

3. Compruebe que las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial y determine su wronskiano.
   a. $y''' + y' = 0; \quad 1, \quad cos\ x, \quad sen\ x$
   b. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = 0; \quad 1, \quad x, \quad e^{-x}, \quad xe^{-x}$

4. Determine una forma adecuada para y(x), si ha de aplicarse el método de los coeficientes indeterminados. No evalué las constantes.
   a. $y''' - 2y'' + y' = x^3 + 2e^x$
   b. $y''' - y' = xe^{-x} + 2\ cos\ x$
   c. $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = e^x + sen\ x$
5. Determine una cota inferior para el radio de convergencia de las soluciones serie alrededor de cada punto que se da, x_0 para la ecuación diferencial dada.
   a. $y'' + 4y' + 6xy = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4$
   b. $(x^2 — 2x — 3)y'' + xy' + 4y = 0; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -4, \quad x_0 = 0$
6. Halle la transformada de Laplace de la función dada; *a y b* son constantes reales.
   a. $\mathrm{e}^{\mathrm{et}} \cosh bt$
   b. $\mathrm{e}^{\mathrm{et}} \operatorname{senh} bt$
7. Aplique la transformada de Laplace para resolver el problema con valor inicial dado.
   a. $y^{iv} - y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 0$
   b. $y^{iv} - y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 0$

Conclusiones.

La monografía de ecuaciones diferenciales elaborada es importante en el fortalecimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes de ecuaciones diferenciales, haciendo énfasis en el dominio de lo básico y medio del contenido que de esta área, logrando con esto mejorar la comprensión de los temas tratados.

El modulo se dividido por unidades y estas en capítulos referentes al área de ecuaciones diferenciales construidos con el fin de afianzar los conocimientos del estudiante e incentivar el dominio en esta área, ya que con este material los estudiantes pueden adquirir nuevos conocimientos debido a que el modulo posee ejercicios resueltos y problemas propuestos al final de cada capítulo, con el fin de que los estudiantes puedan autoevaluarse, para así potenciar su nivel de aprendizaje en el área de ecuaciones diferenciales.

Por eso concluimos que el desarrollo de la monografía de ecuaciones diferenciales es un recurso de gran importancia dentro del marco académico ya que permite subsanar y contrarrestar deficiencias en dicha área de la facultad de ingeniería de sistemas.

Bibliografía

1. [aut. libro] William E. Boyce y Richard C. DiPrima. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* México, D.F. : EDITORIAL UMUSA, S.A., 2000, pág. 758.

2. Scribd. *Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden.* [En línea] https://es.scribd.com/doc/9112757/Ecuaciones-Diferenciales-de-Primer-Orden.

3. Zill, D. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones.* s.l. : Grupo editorial Iberoamerica, 1997.

4. BRAUN, M. *Ecuaciones Diferenciales y sus aplicaciones.* s.l. : Grupo Editorial Iberoamérica, 1983.

5. BOYCE, W, y Di Prima, R. *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera.* México D.F. : Editorial Limusa, 1989.

6. ASMAR, A., ARISTIZABAL, H., MONTES, R. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones.* Medellin : Universidad Nacional, Sede Medellín., 2000.

7. Transformada de Laplace.ppt. *11_Transformada_de_Laplace.* [En línea] http://www.dmae.upm.es/WebpersonalBartolo/VariableCompleja/VCParteI/11_Transformada_de_Laplace.ppt..

8. *tema01.dvi - tema01.pdf.* [En línea] http://personal.us.es/niejimjim/tema01.pdf.

9. *suarezsema.pdf.* [En línea] http://personal.us.es/suarez/ficheros/suarezsema.pdf.

10. *S04_C12.pdf.* [En línea] http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/MetodosMatematicos2/2008B/S04_C12.pdf.

11. *presen11-1x2.pdf.* [En línea] http://www.ehu.eus/izaballa/Ecu_Dif/Transparencias/presen11-1x2.pdf.

12. Monografias. *Ecuaciones diferenciales de segundo orden - Monografias.com.* [En línea] http://www.monografias.com/trabajos97/ecuaciones-diferenciales-segundo-orden/ecuaciones-diferenciales-segundo-orden.shtml.

13. *Microsoft Word - Portada2 - Trabajo Ec Diferenciales en Ingenieria.pdf.* [En línea] http://campus.usal.es/~modelosmatematicos/ModelosMatematicos/index_files/Trabajo%20Ec%20Diferenciales%20en%20Ingenieria.pdf.

14. matematicas.univalle.edu.co. *cap05.pdf.* [En línea] http://matematicas.univalle.edu.co/~jarango/Books/curso/cap05.pdf.

15. *lec11.pdf.* [En línea] http://www.ehu.eus/izaballa/Ecu_Dif/Apuntes/lec11.pdf.

16. *Laplace.pdf.* [En línea] http://andres.unizar.es/~emf/Docencia/MPQ/Laplace.pdf.

17. http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu. *Differential Equations.* [En línea] http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/diff.html.

18. http://ecuaciondiferencialejerciciosresueltos.com. *Ecuacion diferencial homogenea de primer orden ejerciciosEcuacion Diferencial Ejercicios Resueltos.* [En línea] http://ecuaciondiferencialejerciciosresueltos.com/ecuacion-diferencial-homogenea-de-primer-orden-2.

19. *EDDP.pdf.* [En línea] http://www.dynamics.unam.edu/NotasVarias/EDDP.pdf.

20. *Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, por WikiMatematica.org.* [En línea] http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Ecuaciones_lineales_homogéneas_con_coeficientes_constantes.

21. *Ecuaciones exactas por factor integrante,lineales,bernoulli.* [En línea] http://es.slideshare.net/lightknight07/ecuaciones-exactas-por-factor-integrantelinealesbernoulli.

22. *Ecuaciones diferenciales exactas y por factor integrante.* [En línea] http://es.slideshare.net/Flightshox/ecuaciones-diferenciales-exactas-7156745.

23. *ECUACIONES DIFERENCIALES E SEGUNDO ORDEN Y DE ORDEN N - tema 5.pdf.* [En línea] http://ocw.unican.es/ensenanzas-tecnicas/ampliacion-de-matematicas/materiales/tema%205.pdf.

24. *Ecuaciones - Ecuaciones-Cap2.pdf.* [En línea] http://microe.udea.edu.co/~alince/recursos/ecuaciones/libro/Ecuaciones-Cap2.pdf.

25. *Diferencias entre las ecuaciones lineales y no lineales | eHow en Español.* [En línea] http://www.ehowenespanol.com/diferencias-ecuaciones-lineales-lineales-sobre_345127/.

26. *capitulo-4.pdf.* [En línea] https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-4.pdf.

27. *capitulo-3.pdf.* [En línea] https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/capitulo-3.pdf.