LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN EL TORO $\mathbb{T}^n$ Y ESPACIOS DE GEVREY

Elsy Margarita Guevara Cantero

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA
2022

LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN EL TORO $\mathbb{T}^n$ Y ESPACIOS DE GEVREY

Elsy Margarita Guevara Cantero

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de

Matemático

Asesor:

Dr. Carlos Alberto Banquet Brango

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA

2022

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Los jurados abajo firmantes certifican que han leído y que aprueban el trabajo de grado titulado: **LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN EL TORO $\mathbb{T}^n$ Y ESPACIOS DE GEVREY**, el cual es presentado por la estudiante **Elsy Margarita Guevara Cantero**.

Fecha: Febrero de 2022

Asesor: ____________________
Dr. Carlos Alberto Banquet Brango

Jurado: ____________________
M. Sc. Jimmy Herlín Lloreda Zúñiga

Carlos A Reales M

Jurado: ____________________
Dr. Carlos Alberto Reales Martínez

A mis padres
Ilse y Frey
Y a mis abuelos

Resumen

En el presente trabajo hacemos uso del ánalisis de Fourier en $\mathbb{T}^n$ para entender la definición de los espacios de Gevrey periódicos, y mostramos algunas de las propiedades más importante que tienen estos espacios. También probamos ciertas propiedades de las funciones periódicas de prueba, de las distribuciones periódicas y de la transformada de Fourier periódica.

Palabras claves: Funciones periódicas de prueba, distribuciones periódicas, espacios de Gevrey periódicos.

Abstract

In this work, Fourier analysis on $\mathbb{T}^n$ is used to understand the definition of periodic Gevrey spaces, and we show some of the most important properties that these spaces have. We also prove certain properties of the periodic functions of proof, of the periodic distributions and of the transform of periodic Fourier.

Keywords: Periodic test functions, periodic distributions, periodic Gevrey spaces.

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a Dios por ser mi guía durante toda mi carrera, por los buenos y malos momentos en los cuales con su infinita misericordia me mostraba el sendero para continuar, a mis padres Ilse Cantero y Frey Guevara y mis hermanos Miguel Angel y Miguel José, pues ellos han sido la motivación para alcanzar este sueño, a mis compañeros de estudio, especialmente a mis amigos y colegas Luisa, Mary, Kely, Jean y Reinel, por la amistad brindada a lo largo de estos años y sacar cada día en mi rostro una sonrisa, a la Universidad de Córdoba por brindarme una formación académica de calidad, a mi asesor Carlos Alberto Banquet Brango por todo su valioso tiempo, comentarios y sugerencias que me ayudaron en todo el desarrollo de este trabajo, a los docentes del Departamento de Matemáticas y Estadística, por haberme mostrado cuanta belleza hay en las matemáticas.

Montería, Colombia Elsy Margarita Guevara Cantero

Febrero de 2022

Índice general

Tabla de Notaciones

$L^p(\mu)$	$\{f : \int_X \lvert f\rvert^p d\mu < \infty\}$ espacios de las funciones medibles
$(X, \mathcal{A}, \mu)$	Espacio μ-medible X
$L^1(G)$	Álgebra de Banach
$\lvert \cdot \rvert$	Norma compleja o valor absoluto
$\lVert\cdot\rVert_X$	Norma sobre el espacio vectorial X
$\hat{f}, f^\wedge$	La transformada de Fourier de la función f
$f * g$	La convolución de f y g
$\bar{f}$	Conjugado de f
$(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})^n$	Conjunto de los multi-índices
$F_N(x)$	Núcleo de Fejér
$D_N(x)$	Núcleo de Dirichlet
$\mathscr{P}$	Espacio de las funciones periódicas de prueba
$\mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$	Espacio de las sucesiones complejas rápidamente decrecientes
$\mathscr{P}'$	Espacio de las distribuciones periódicas
$\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$	Espacio de las sucesiones complejas con crecimiento polinómico
$H^s_{per}([-\pi, \pi])$	Espacio de Sobolev periódico de orden s
$\lVert\cdot\rVert_s$	Norma en $H^s_{per}([-\pi, \pi])$
C_{per}	Espacio de funciones periódicas.

Introducción

El análisis de Fourier es de gran importancia en las matemáticas, se encarga del estudio de las series e integrales de Fourier. En esta monografía el interés se centra en las funciones periódicas, para ello estudiamos el toro $\mathbb{T}^n$, las funciones periódicas de prueba y las distribuciones periódicas. Además, se hace uso de los coeficientes de Fourier a lo largo de este trabajo para entender la definición de los espacios de Gevrey periódicos. Estos espacios fuerón creados por el matemático Frances Maurice-Joseph Gevrey, y aparecierón por primera vez en la obra de Foias y Teman en la ecuación de Navier-Stokes donde se utilizarón para buscar una solución a dicha ecuación, dando a conocer en 1918 lo que hoy en día se llama clases de Gevrey $G^{\sigma,s}(\mathbb{R}^d)$.

En el primer Capítulo, se enuncian definiciones y teoremas que resultan ser necesarios en el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 2, se hace un estudio de los coeficientes de Fourier en el toro $\mathbb{T}^n$ y se muestran algunas de las propiedades más importantes. Seguidamente, en el Capítulo 3, se presentan las funciones periódicas de prueba y las distribuciones periódicas. Se enuncian definiciones y se demuestran las operaciones básicas entre estas funciones. Finalmente, en el Capítulo 4, se da la definición de los espacios de Gevrey periódicos, y mostramos algunas propiedades periódicas en estos espacios.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y se enuncian algunos teoremas que serán usados en algunos resultados más adelante. El tema principal de este capítulo es el toro $\mathbb{T}^n$ donde n denota la dimensión, es decir, un entero positivo fijo. Algunos resultados de este capítulo se presentan sin demostración por ser temas clásicos del análisis matemático.

1.1. Conceptos de álgebra

A continuación se enuncian algunas definiciones de álgebra abstracta, cualquier otro concepto relacionado a este tema puede consultarse en [3].

Definición 1.1.1. Una **operación binaria $*$ en un conjunto S**, es una función

$$* : S \times S \longrightarrow S.$$

A cada par ordenado $(a, b) \in S \times S$, se le asigna un único elemento de S, $*(a, b)$.

Definición 1.1.2. Un **grupo** es un conjunto no vacío G dotado de una operación binaria, tal que se satisfacen los siguientes axiomas:

i) La operación definida en G es asociativa.

ii) Existe un elemento identidad $e \in G$ para la operación definida en G.

iii) Cada elemento $g \in G$ tiene elemento inverso g^{-1} en G respecto a la operación definida en G.

Definición 1.1.3 (Subgrupo normal)**.** Sean G un grupo y N un subgrupo de G. Decimos que N es un **subgrupo normal** de G si para todo $g \in G$

$$gNg^{-1} = \{gng^{-1} : n \in N\} \subseteq N.$$

Escribiremos $N \lhd G$ si N es subgrupo normal de G.

Definición 1.1.4 (El grupo cociente)**.** Suponga que $N \lhd G$. El **grupo cociente** (o grupo factor) G/N es el conjunto de todas las clases laterales izquierdas bajo la operación

$$(aN)(bN) = (ab)N, \quad \forall a, b \in G.$$

$\star$ Con notación aditiva esta operación entre clases laterales está dada por

$$(a + H) + (b + H) = (a + b) + H, \quad \forall a, b \in G.$$

1.2. El toro n-dimensional

Denotaremos al toro n-dimensional por $\mathbb{T}^n$, el cual puede ser definido de la siguiente manera. Considere la relación $\sim$ en $\mathbb{R}^n$, la cual se define de la siguiente forma: para $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \sim y \quad \text{si y solo si} \quad x - y \in \mathbb{Z}^n.$$

Nótese que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^n$. En efecto;

- Si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $x \sim x$ puesto que $x - x = 0$ y $0 \in \mathbb{Z}^n$.

- Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ donde $x \sim y$, entonces existe $j \in \mathbb{Z}^n$ tal que $x - y = j$, luego $y - x = -j$. Como $-j \in \mathbb{Z}^n$, tenemos que $y \sim x$.

- Si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ con $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen $m, p \in \mathbb{Z}^n$ tales que $x - y = m$ y $y - z = p$. Luego, $x - z = m + p \in \mathbb{Z}^n$. Así $x \sim z$.

De manera informal es posible identificar a $\mathbb{T}^n$ con el cubo $[0,1]^n$ con lados opuestos identificados. Esto significa que los puntos $(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)$ y $(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n)$ se identifican siempre que 0 y 1 aparezcan en la misma coordenada.
Adicionalmente, es posible definir el toro como $\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, el cual resulta ser un grupo aditivo. En efecto, sea $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ el conjunto de todas las clases laterales izquierdas bajo la operación

$$(a+\mathbb{Z}^n)+(b+\mathbb{Z}^n)=(a+b)+\mathbb{Z}^n, \quad \forall a,b\in\mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Suponga que $x\in(a+\mathbb{Z}^n)$ y $y\in(b+\mathbb{Z}^n)$. Entonces $x=a+m_1$, $y=b+m_2$ donde $m_1,m_2\in\mathbb{Z}^n$. Luego

$$\begin{aligned} x+y=a+m_1+b+m_2 &= a+b-\underbrace{b+m_1+b}_{m_3}+m_2 \quad (\mathbb{Z}^n \text{ es normal})\\ &= a+b+\underbrace{m_3+m_2}_{m_4}=(a+b)+m_4, \end{aligned}$$

con $m_3,m_4\in\mathbb{Z}^n$. Así, $x+y\in(a+b)+\mathbb{Z}^n$. Lo que muestra que la operación está bien definida. Veamos el resto de las propiedades:

- ⋆ *<u>Asociatividad</u>* : Sean $(a+\mathbb{Z}^n),(b+\mathbb{Z}^n),(c+\mathbb{Z}^n)\in\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ y teniendo en cuenta que se cumple la propiedad asociativa en $\mathbb{R}^n$ entonces

  $$(a+\mathbb{Z}^n)+[(b+\mathbb{Z}^n)+(c+\mathbb{Z}^n)]=(a+\mathbb{Z}^n)+[(b+c)+\mathbb{Z}^n]=(a+(b+c))+\mathbb{Z}^n=$$
  $$((a+b)+c)+\mathbb{Z}^n=[(a+b)+\mathbb{Z}^n]+(c+\mathbb{Z}^n)=[(a+\mathbb{Z}^n)+(b+\mathbb{Z}^n)]+(c+\mathbb{Z}^n).$$

  De esta manera, $(a+\mathbb{Z}^n)+[(b+\mathbb{Z}^n)+(c+\mathbb{Z}^n)]=[(a+\mathbb{Z}^n)+(b+\mathbb{Z}^n)]+(c+\mathbb{Z}^n)$.

- ⋆ *<u>Elemento identidad</u>* : para todo $(a+\mathbb{Z}^n)\in\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ el elemento $(0+\mathbb{Z}^n)\in\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ satisface lo siguiente

  $$\begin{aligned}(a+\mathbb{Z}^n)+(0+\mathbb{Z}^n)&=(a+0)+\mathbb{Z}^n=a+\mathbb{Z}^n,\\ (0+\mathbb{Z}^n)+(a+\mathbb{Z}^n)&=(0+a)+\mathbb{Z}^n=a+\mathbb{Z}^n.\end{aligned}$$

  Por tanto, $(0+\mathbb{Z}^n)=\mathbb{Z}^n$ es el elemento identidad.

⋆ <u>*El inverso*</u> : Para todo $(x+\mathbb{Z}^n) \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ el elemento $(-x+\mathbb{Z}^n) \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ satisface lo siguiente

$$(x+\mathbb{Z}^n)+(-x+\mathbb{Z}^n)=(x+(-x))+\mathbb{Z}^n=0+\mathbb{Z}^n,$$
$$(-x+\mathbb{Z}^n)+(x+\mathbb{Z}^n)=(-x+x)+\mathbb{Z}^n=0+\mathbb{Z}^n.$$

Así, todo $(x+\mathbb{Z}^n) \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ tiene un elemento inverso $(-x+\mathbb{Z}^n) \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Por lo tanto, $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ es un grupo aditivo bajo la operación dada.

Definición 1.2.1. Las funciones definidas sobre $\mathbb{T}^n$ son funciones $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ que satisfacen

$$f(x+m)=f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ y } m \in \mathbb{Z}^n.$$

Estas funciones son 1-periódicas en cada una de sus componentes.

Por último, la medida de Haar sobre $\mathbb{T}^n$ es la restricción de la medida de Lebesgue al conjunto $[0,1]^n$. Esta medida todavía se denota por dx, mientras que la medida a un conjunto $A \subseteq \mathbb{T}^n$ se denota por $|A|$. La invariancia de traslación de la medida de Lebesgue y la periodicidad de las funciones en $\mathbb{T}^n$ implican que para todas las funciones integrables f en $\mathbb{T}^n$, se tiene

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)dx=\int_{[-1/2,1/2]^n} f(x)dx=\int_{[a_1,1+a_1]\times\cdots\times[a_n,1+a_n]} f(x)dx, \tag{1.2}$$

para cualquier números reales $a_1,a_2,\ldots,a_n$. En vista de la periocidad, la integración por partes no pruduce términos de frontera. Dadas las funciones f y g continuamente diferenciables en $\mathbb{T}^n$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}^n} \partial_j f(x)g(x)dx=-\int_{\mathbb{T}^n} \partial_j g(x)f(x)dx.$$

1.3. Resultados de análisis en $\mathbb{R}^n$

En esta sección introduciremos una serie de resultados clásicos de análisis que serán de gran utilidad en el desarrollo del trabajo. Con el fin de no extendernos demasiado, no se incluyen las demostraciones de los teoremas; sin embargo, incluiremos las referencias donde se puede consultar cualquier demostración.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Fubini)**.** Sean $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ y $\{Y, \mathcal{B}, \nu\}$ dos espacios de medidas completas, y considere

$$(X \times Y) \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \quad \text{integrable en } (X \times Y).$$

Entonces

$$X \ni x \longmapsto f(x, y) \text{ es } \mu\text{-integrable en } X \text{ para } \nu\text{-casi toda } y \in Y,$$
$$Y \ni y \longmapsto f(x, y) \text{ es } \nu\text{-integrable en } Y \text{ para } \mu\text{-casi toda } x \in X.$$

Más aún,

$$\begin{aligned} X \ni x &\longmapsto \int_Y f(x, y) d\nu \ \text{ es } \mu\text{-integrable en } X, \\ Y \ni y &\longmapsto \int_X f(x, y) d\mu \ \text{ es } \nu\text{-integrable en } Y, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{(X \times Y)} f(x, y) d(\mu \times \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu \right) d\nu. \end{aligned}$$

Demostración. Véase [2 , página 147]. □

Teorema 1.3.2 (Teorema de cambio de variable)**.** Sean Ω_1 y Ω_2 conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Suponga que $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ es una biyección de clase C^1 cuya inversa también es de clase C^1. Asuma que f es una función Lebesgue medible en Ω_2. Entonces $f \circ \Phi$ es Lebesgue medible en Ω_1 y

$$\int_{\Omega_2} f(y) dy = \int_{\Omega_1} f(\Phi(x)) |J(x)| dx,$$

donde $|J|$ denota el Jacobiano. Esta fórmula es válida en dos sentidos: si $f \geq 0$, entonces es verdadera. En general, $f \in L^1(\Omega_2)$ si y sólo si $f \circ \Phi |J| \in L^1(\Omega_1)$, y entonces la fórmula es válida.

Demostración. Véase Jones [4 , página 502]. □

Teorema 1.3.3 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue)**.** Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones complejas medibles sobre X, tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in X$. Si existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad (n = 1, 2, \ldots; x \in X),$$

entonces $f \in L^1(\mu)$, y además se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Demostración. Véase Rudin [5 , página 26]. □

1.4. Espacios de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert separable con producto interno complejo $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diremos que $E \subseteq H$ es ortonormal si $\langle f, g \rangle = 0$ para todo $f, g \in E$ con $f \neq g$ y $\langle f, f \rangle = 1$ para todo $f \in E$. Un sistema ortonormal completo es un subconjunto de H, el cual es ortonormal y tiene la propiedad de que el único vector ortonormal a todos sus elementos es el vector cero. A continuación demostraremos algunas propiedades básicas de los sistemas ortonormales.

Proposición 1.4.1. Sean H un espacio de Hilbert separable y $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ un sistema ortonormal en H. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo.

(2) Para todo $f \in H$ tenemos

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2.$$

(3) Para todo $f \in H$ tenemos

$$f = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq N} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

donde la serie converge en H.

Demostración. ($1 \Longrightarrow 2$) Sea $M = \{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ un sistema ortonormal completo en H, es decir, $H = \overline{\operatorname{gen} M}$. Luego, para cada $f \in H$ se tiene que $\langle f, \varphi_k \rangle \neq 0$ para $k \in L$, con $L \in \mathbb{Z}$ un conjunto contable (ver Lemma 3.5-3 Kreyszig 6), así

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 = \sum_{n\in L} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 .$$

Defina

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n. \tag{1.3}$$

Por Teorema 3.5-2 (c) Kreyszig [6], se tiene que la parte derecha de (1.3) converge. Ahora veamos que $f - g \in \overline{\operatorname{gen} M}$. En efecto, si $\varphi_j \in M$ entonces

$$\langle f - g, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle - \langle f, \varphi_j \rangle = 0.$$

Por otro lado, si $u \in \{\varphi_k : k \in \mathbb{Z} \setminus L\}$, entonces $\langle f, u \rangle = 0$. Luego

$$\langle f - g, u \rangle = \langle f, u \rangle - \sum_{k} \langle f, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, u \rangle = \langle f, u \rangle - 0 = 0.$$

Así $f = g$, pues $M^{\perp} = \{0\}$. De esta manera

$$\begin{aligned} \|f\|_H^2 = \langle f, f \rangle = \left\langle \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \right\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \overline{\langle f, \varphi_n \rangle} \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \\ = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \overline{\langle f, \varphi_n \rangle} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 .$$

($2 \Longrightarrow 1$) Suponga que M no es un sistema ortonormal completo. Luego existe $f_0 \in M^{\perp}$ con $f_0 \neq 0$ y $\langle f_0, \varphi_k \rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\|f_0\|^2 \neq 0$. Por tanto

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f_0, \varphi_k \rangle|^2 = 0 \neq \|f_0\|^2.$$

($3 \Longrightarrow 2$) Suponga que $f = \sum_k \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$, donde la serie converge en H. Luego, como los φ_k son ortogonales, entonces por teorema de Pitágoras se tiene

$$\|f\|_H^2 = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{|k|\leq N} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq N} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2.$$

Por lo tanto

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2.$$

($1 \implies 3$) Sean $f \in H$ y $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión ortonormal en H. Entonces existe $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tal que

$$f := \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq N} \alpha_k \varphi_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_k.$$

Luego por el Teorema 3.5-2 (b) Kreyszig [6], se tiene que $\alpha_k = \langle f, \varphi_k\rangle$, así

$$f = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq N} \langle f, \varphi_k\rangle \varphi_k. \tag{1.4}$$

Nuevamente por el Teorema 3.5-2 (c) Kreyszig [6], se sigue que la serie de la parte derecha de (1.4) converge en H.

Lo que termina la prueba de la proposición.

$\square$

A continuación introducimos la noción de identidad aproximada, una familia k_ε que satisface la siguiente propiedad: $k_\varepsilon * f \to f$ en $L^1(G)$, cuando $\varepsilon \to 0$. Cualquier otro concepto relacionado a este tema puede consultarse en [1].

Definición 1.4.1. Sea G un grupo topológico, una identidad aproximada (cuando $\varepsilon \to 0$) es una familia de funciones k_ε de $L^1(G)$ con las siguientes tres propiedades:

i) Existe una constante $c > 0$ tal que $\|k_\varepsilon\|_{L^1(G)} \leq c$ para todo $\varepsilon > 0$.

ii) $\int_G k_\varepsilon(x) d\lambda(x) = 1$, para todo $\varepsilon > 0$.

iii) Para cualquier vecindad V del elemento identidad e del grupo G tenemos $\int_{V^c} |k_\varepsilon(x)| d\lambda(x) \to 0,$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Teorema 1.4.2. Sea k_ε una identidad aproximada en un grupo G localmente compacto con medida Haar izquierda λ.

(1) Si $f \in L^p(G)$ para $1 \leq p < \infty$, entonces $\|k_\varepsilon * f - f\|_{L^p(G)} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

(2) Sea f una función en $L^\infty(G)$ que es uniformemente continua en un subconjunto K de G, en el sentido de que para todo $\delta > 0$ existe una vecindad V del elemento identidad tal que para todo $x \in K$ y $y \in V$ tenemos $|f(y^{-1}x) - f(x)| < \delta$. Entonces tenemos $\|k_\varepsilon * f - f\|_{L^\infty(K)} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. En particular, si f es

acotada y continua en un punto $x_0 \in G$, entonces $(k_\varepsilon * f)(x_0) \to f(x_0)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Demostración. Véase Grafakos [1, página 27]. $\square$

Definición 1.4.2. Sean X e Y espacios vectoriales normados, con norma $\|.\|_X$ y $\|.\|_Y$ respectivamente, tales que $X \subseteq Y$. Si el mapeo inclusión (función identidad)

$$i : X \to Y; \quad x \longmapsto x$$

es continuo, i.e. si existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \text{para cada } x \in X,$$

entonces se dice que X está incrustado continuamente en Y. Se escribe $X \hookrightarrow Y$.

Capítulo 2

Coeficientes de Fourier

En este capítulo demostraremos algunas propiedades básicas del ánalisis de Fourier sobre el toro $\mathbb{T}^n$. Estos resultados serán usados mas adelante para definir los espacios de Gevrey y para obtener algunas de sus propiedades.

2.1. Coeficientes de Fourier

Definición 2.1.1. Para una función de valor complejo $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ y $m \in \mathbb{Z}^n$, definimos

$$\widehat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i m \cdot x} dx.$$

A $\widehat{f}(m)$ lo llamaremos el m-ésimo coeficiente de Fourier de f. Para una medida de Borel $\mu \in \mathbb{T}^n$ y $m \in \mathbb{Z}^n$ la expresión

$$\widehat{\mu}(m) = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i m \cdot x} d\mu$$

será llamada el m-ésimo coeficiente de Fourier de μ.

La serie de Fourier de f en $x \in \mathbb{T}^n$ es la serie

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}.$$

La conjugada compleja de la función f será denotada por $\overline{f}$, se denota por $\tilde{f}$ a la función $\tilde{f}(x) = f(-x)$ y por $\tau^y(f)$ a la función $\tau^y(f)(x) = f(x-y)$ para todo $y \in \mathbb{T}^n$ fijo.

A continuación demostraremos algunas propiedades elementales de los coeficientes de Fourier.

Proposición 2.1.1. Sea f, g en $L^1(\mathbb{T}^n)$. Entonces para todo $m, k \in \mathbb{Z}^n,\ \lambda \in \mathbb{C};\ y \in \mathbb{T}^n$, y todos los multi-índices α tenemos.

1. $\widehat{f+g}(m) = \widehat{f}(m) + \widehat{g}(m)$.

2. $\widehat{\lambda f}(m) = \lambda \widehat{f}(m)$.

3. $\widehat{\bar{f}}(m) = \overline{\widehat{f}(-m)}$.

4. $\widehat{\tilde{f}}(m) = \widehat{f}(-m)$.

5. $\widehat{\tau^y(f)}(m) = \widehat{f}(m)e^{-2\pi i m\cdot y}$.

6. $(e^{2\pi i k(\cdot)}f)^\wedge(m) = \widehat{f}(m-k)$.

7. $\widehat{f}(0) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x)dx$.

8. $\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(m)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}$.

9. $\widehat{f*g}(m) = \widehat{f}(m)\widehat{g}(m)$.

10. $\widehat{\partial^\alpha f}(m) = (2\pi i m)^\alpha \widehat{f}(m)$.

Demostración. 1. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ y $m \in \mathbb{Z}^n$, por la linealidad de la integral, se obtiene

$$\begin{aligned}\widehat{f+g}(m) = \int_{\mathbb{T}^n}(f+g)(x)e^{-2\pi i m\cdot x}dx &= \int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-2\pi i m\cdot x}dx + \int\limits_{\mathbb{T}^n} g(x)e^{-2\pi i m\cdot x}dx \\ &= \widehat{f}(m) + \widehat{g}(m).\end{aligned}$$

2. Sean $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{Z}^n$, de nuevo por las propiedades de la integral se tiene

$$\widehat{\lambda f}(m) = \int_{\mathbb{T}^n} \lambda f(x)e^{-2\pi i m\cdot x}dx = \lambda \int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-2\pi i m\cdot x}dx = \lambda\widehat{f}(m).$$

3. Sean $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ y $m \in \mathbb{Z}^n$, entonces

$$\begin{aligned}\widehat{\bar{f}}(m) &= \int_{\mathbb{T}^n} \bar{f}(x) e^{-2\pi i m\cdot x} dx = \int_{\mathbb{T}^n} \overline{f(x)}\ \overline{e^{-2\pi i(-m)\cdot x}} dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \overline{f(x) e^{-2\pi i(-m)\cdot x}} dx = \overline{\int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i(-m)\cdot x} dx} \\ &= \overline{\int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i(-m)\cdot x} dx} = \overline{\widehat{f}(-m)}.\end{aligned}$$

4. Sea $m \in \mathbb{Z}^n$ y haciendo el cambio de variable $y = -x$, tenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{\tilde{f}}(m) &= \int_{\mathbb{T}^n} \tilde{f}(x) e^{-2\pi i m\cdot x} dx = \int_{\mathbb{T}^n} f(-x) e^{-2\pi i m\cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} f(y) e^{2\pi i m\cdot y} dy = \int_{\mathbb{T}^n} f(y) e^{-2\pi i(-m)\cdot y} dy = \widehat{f}(-m).\end{aligned}$$

5. Sean $y \in \mathbb{T}^n$, $m \in \mathbb{Z}^n$ y haciendo el cambio de variable $w = x - y$, entonces tenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned}\widehat{\tau^y(f)}(m) &= \int_{\mathbb{T}^n} [\tau^y(f)](x) e^{-2\pi i m\cdot x} dx = \int_{\mathbb{T}^n} f(x-y) e^{-2\pi i m\cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} f(w) e^{-2\pi i m\cdot(w+y)} dw = e^{-2\pi i m\cdot y} \int_{\mathbb{T}^n} f(w) e^{-2\pi i m\cdot w} dw \\ &= e^{-2\pi i m\cdot y}\ \widehat{f}(m).\end{aligned}$$

6. Sean $m, k \in \mathbb{Z}^n$, entonces

$$\begin{aligned}(e^{2\pi i k(\cdot)} f)^\wedge(m) &= \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i k(x)} f(x) e^{-2\pi i m\cdot x} dx = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i m\cdot x + 2\pi i k\cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i(m-k)\cdot x} dx = \widehat{f}(m-k).\end{aligned}$$

7. Sea $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ y como $0 \in \mathbb{Z}^n$, tenemos el siguiente resultado

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i 0\cdot x} dx = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) dx.$$

8. Noté que

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(m)| &= \left|\int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i m\cdot x} dx\right| \leq \int_{\mathbb{T}^n} |f(x) e^{-2\pi i m\cdot x}| dx = \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)||e^{-2\pi i m\cdot x}| dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}.\end{aligned}$$

De esta manera $|\widehat{f}(m)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$ y por tanto

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(m)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}.$$

9. Sean $g \in \mathbb{T}^n$ y $m \in \mathbb{Z}^n$, luego por el Teorema de Fubini y haciendo la sustitución $w = x - y$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(m) &= \int_{\mathbb{T}^n} (f * g)(x) e^{-2\pi i m \cdot x} dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \left(\int_{\mathbb{T}^n} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-2\pi i m \cdot x} dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} g(y) e^{-2\pi i m \cdot y} \left(\int_{\mathbb{T}^n} f(x-y) e^{-2\pi i m \cdot (x-y)} dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} g(y) e^{-2\pi i m \cdot y} \left(\int_{\mathbb{T}^n} f(w) e^{-2\pi i m \cdot w} dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} g(y) e^{-2\pi i m \cdot y} \widehat{f}(m) dy \\
&= \widehat{f}(m) \widehat{g}(m).
\end{aligned}$$

10. Sean $m \in \mathbb{Z}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, α un multi-índice y $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, aquí los α_j son enteros no negativos. Usando integración por partes, se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial x_k f}(m) &= \int_{\mathbb{T}^n} \partial x_k f(x) e^{-2\pi i m \cdot x} dx = - \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \partial x_k \left(e^{-2\pi i m \cdot x} \right) dx \\
&= (2\pi i m_k \cdot x_k) \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i m \cdot x} dx = (2\pi i m_k \cdot x_k) \widehat{f}(m).
\end{aligned}$$

Ahora, usando el resultado anterior de forma reiterada, se obtiene

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\alpha f}(m) &= \int_{\mathbb{T}^n} [\partial^\alpha f](x) e^{-2\pi i m \cdot x} dx = \int_{\mathbb{T}^n} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f(x) e^{-2\pi i m \cdot x} dx \\
&= (2\pi i m_1 x_1)^{\alpha_1} \cdots (2\pi i m_n x_n)^{\alpha_n} \widehat{f}(m) = (2\pi i m x)^\alpha \widehat{f}(m).
\end{aligned}$$

□

Observación 1. Los coeficientes de Fourier tienen la siguiente propiedad. Para funciones f_1 en $\mathbb{T}^{n_1}$ y f_2 en $\mathbb{T}^{n_2}$ la función tensorial

$$(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$$

es una función periódica en $\mathbb{T}^{n_1+n_2}$, cuyos coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned}
\widehat{f_1 \otimes f_2}(m_1, m_2) &= \int_{\mathbb{T}^{n_1+n_2}} f_1 \otimes f_2(x_1, x_2) e^{-2\pi i (m_1, m_2)\cdot(x_1, x_2)} dx_1 \cdot \ dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n_1+n_2}} f_1(x_1) f(x_2) e^{-2\pi i m_1 \cdot x_1} \ e^{-2\pi i m_2 \cdot x_2} dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n_1}} f_1(x_1) e^{-2\pi i m_1 \cdot x_1} dx_1 \int_{\mathbb{T}^{n_2}} f_2(x_2) e^{-2\pi i m_2 \cdot x_2} dx_2 \\
&= \widehat{f_1}(m_1) \widehat{f_2}(m_2),
\end{aligned}$$

para todo $m_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}$ y $m_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}$.

Definición 2.1.2. Un polinomio trigonométrico en $\mathbb{T}^n$ es una función de la forma

$$P(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i m \cdot x},$$

donde $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ es una sucesión en $\mathbb{Z}^n$, para la cual existe un número natural N tal que $a_m = 0$, para todo $|m| \geq N$. El grado de P es el mayor número $|q_1|+|q_2|+\cdots+|q_n|$ tal que $a_q \neq 0$, donde $q = (q_1, \ldots, q_n)$.

Observación 2. Debido a la ortonormalidad de las exponenciales en (2.6), para todo $m \in \mathbb{Z}^n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(m) = \int_{\mathbb{T}^n} P(x) e^{-2\pi i m \cdot x} dx &= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i k \cdot x} e^{-2\pi i m \cdot x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i k \cdot x} e^{-2\pi i m \cdot x} dx \\
&= a_m.
\end{aligned}$$

Por tanto $\widehat{P}(m) = a_m$.

2.2. Núcleos de Dirichlet y Fejér

Definición 2.2.1. El núcleo de Dirichlet en $\mathbb{T}^n$ es la función

$$D_N(x) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ |m| \leq N}} e^{2\pi i m \cdot x}.$$

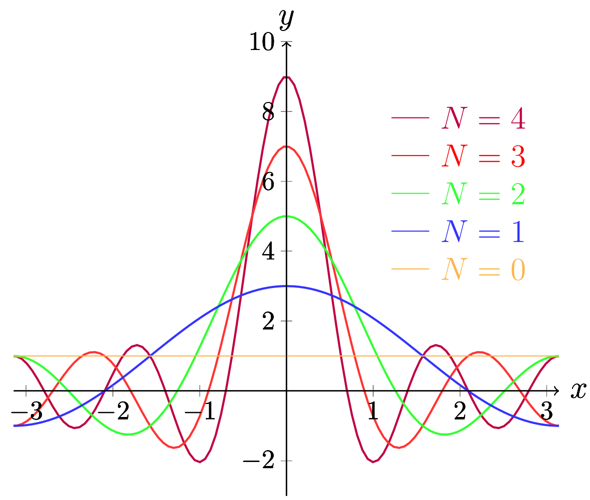

Figura 2.1: Imagen de los núcleos de Dirichlet D_0 hasta D_4.

Definición 2.2.2. Sea $0 \leq R < \infty$. El núcleo de Dirichlet cuadrado en $\mathbb{T}^n$ es la función

$$D_R^n(x) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ |m_j| \leq R}} e^{2\pi i m \cdot x}.$$

El núcleo de Dirichlet circular (o esférico) en $\mathbb{T}^n$ es la función

$$\mathring{D}_R^n(x) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ |m| \leq R}} e^{2\pi i m \cdot x}.$$

En la dimensión $n = 1$ estas funciones coinciden y son denotadas por

$$D_R(x) = D_R^1(x) = \mathring{D}_R^1(x).$$

Esta función es llamada núcleo de Dirichlet y coincide con

$$D_N(x) = \sum_{|m| \leq N} e^{2\pi i m \cdot x}$$

cuándo $N \leq R < N + 1$ y $N \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Ver figura 2.1.

Observación 3. Los núcleos de Dirichlet cuadrados y los circulares (o esféricos) son polinomios trigonométricos. El núcleo de Dirichlet cuadrado en $\mathbb{T}^n$ es igual a un producto de los núcleos de Dirichlet unidimensionales, es decir,

$$D_R^n(x_1, \ldots, x_n) = D_R(x_1) \cdots D_R(x_n).$$

Dos formas equivalentes para escribir el núcleo de Dirichlet D_N es de la siguiente manera:

$$D_N(x) = \sum_{|m| \leq N} e^{2\pi i m \cdot x} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}, \quad \text{para } x \in [0,1]. \tag{2.1}$$

Verificamos la validez de (2.1) como sigue: defina $a := \left(e^{2\pi i x}\right)$, usando propiedades de la serie geométrica se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{|m| \leq N} e^{2\pi i m \cdot x} &= \sum_{|m| \leq N} \left(e^{2\pi i x}\right)^m = \sum_{|m| \leq N} a^m = \frac{a^{-N} - a^{N+1}}{1-a} \\
&= \frac{e^{-2\pi i N x} - e^{2\pi i (N+1) x}}{1 - e^{2\pi i x}} = e^{-2\pi i N x} \frac{e^{2\pi i (2N+1)} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} \\
&= \frac{e^{2\pi i (N+1) x} - e^{-2\pi i N x}}{e^{\pi i x}\left(e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}\right)} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}.
\end{aligned}$$

Las medias aritméticas del núcleo de Dirichlet en dimensión $n = 1$, se consideran como sigue:

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}[D_0(x) + D_1(x) + D_2(x) + \cdots + D_N(x)]. \tag{2.2}$$

A continuación tenemos la siguiente identidad con respecto al núcleo F_N.

Proposición 2.2.1. Para cada entero no negativo N, la siguiente identidad se cumple

$$F_N(x) = \sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e^{2\pi i j x} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}\right)^2, \tag{2.3}$$

para todo $x \in \mathbb{T}^1$. Por lo tanto, $\widehat{F_N}(m) = 1 - \frac{|m|}{N+1}$ si $|m| \leq N$ y es cero en caso contrario.

Demostración. Por la expresión (2.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} D_k(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \sum_{|j| \leq k} e^{2\pi i j x} \\
&= \sum_{|j| \leq N} \frac{\#\{k \in \mathbb{Z} : |j| \leq k \leq N\}}{N+1} e^{2\pi i j x} \\
&= \sum_{|j| \leq N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e^{2\pi i j x}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, queremos demostrar la segunda igualdad de (2.3), para esto usaremos la identidad de la serie geométrica, a saber

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} \quad \text{para todo} \ \ r \neq 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i j x} = \frac{e^{2\pi i (N+1)x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} &= \frac{e^{\pi i (N+1)x}}{e^{\pi i x}} \; \frac{e^{\pi i (N+1)x} - e^{-\pi i (N+1)x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \\ &= e^{\pi i N x} \; \frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}.\end{aligned}$$

De aquí, se sigue que

$$\sum_{j=1}^{N} |j| e^{2\pi i j x} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx} \left(e^{i\pi N x} \frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)} \right). \tag{2.4}$$

Similarmente tenemos que

$$\sum_{j=-N}^{1} |j| e^{2\pi i j x} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx} \left(e^{-i\pi N x} \frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)} \right). \tag{2.5}$$

Sumando (2.4) y (2.5) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{|j| \leq N} |j| e^{2\pi i j x} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx} \left(e^{i\pi N x} \frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)} \right) - \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx} \left(e^{-i\pi N x} \frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2i} \left[\frac{d}{dx} \left((e^{i\pi N x} - e^{-i\pi N x}) \; \frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(\pi N x) \sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)} \right).\end{aligned}$$

Multiplicando $-\frac{1}{N+1}$ a ambos lados de la expresión anterior y sumando $D_N(x)$, se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{|j| \leq N} -\frac{|j|}{N+1} e^{2\pi i j x} + D_N(x) &= -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(\pi N x) \sin(\pi(N+1)x)}{(N+1) \sin(\pi x)} \right) + D_N(x) \\ \sum_{|j| \leq N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1} \right) e^{2\pi i j x} &= \sum_{|j| \leq N} e^{2\pi i j x} - \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(\pi N x) \sin(\pi(N+1)x)}{(N+1) \sin(\pi x)} \right),\end{aligned}$$

de esta manera

$$\sum_{|j| \leq N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1} \right) e^{2\pi i j x} = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(\pi N x) \sin(\pi(N+1)x)}{(N+1) \sin(\pi x)} \right).$$

Ahora, haciendo la derivada en la expresión anterior se tiene

$$\frac{(N+1)\sin(\pi x)\left[\sin(\pi(N+1)x)\cos(\pi Nx)+\cos(\pi(N+1)x)\sin(\pi Nx)\right]}{(N+1)\sin^2(\pi x)}$$
$$-\frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{dx}\left[\sin(\pi Nx)\sin(\pi(N+1)x)\right]\sin(\pi x)-\pi\sin(\pi Nx)\sin(\pi(N+1)x)\cos(\pi x)}{(N+1)\sin^2(\pi x)}$$
$$=\frac{\sin(\pi(N+1)x)\cos(\pi Nx)\sin(\pi x)+\sin(\pi(N+1)x)\sin(\pi Nx)\cos(\pi x)}{(N+1)\sin^2(\pi x)}.$$

De lo anterior tomando las identidades del seno y coseno, y cancelando los términos semejantes obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{2e^{2\pi i(N+1)x}-4+2e^{-2\pi i(N+1)x}}{8i^2(N+1)\sin^2(\pi x)} &= \frac{e^{2\pi i(N+1)x}-2+e^{-2\pi i(N+1)x}}{4i^2(N+1)\sin^2(\pi x)}\\ &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{e^{\pi i(N+1)x}-e^{-\pi i(N+1)x}}{2i\sin(\pi x)}\right)^2\\ &= \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2(\pi(N+1)x)}{\sin^2(\pi x)}\\ &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}\right)^2.\end{aligned}$$

Así

$$\sum_{j=-N}^{N}\left(1-\frac{|j|}{N+1}\right)e^{2\pi ijx}=\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}\right)^2.$$

□

Definición 2.2.3. Sea N un entero no negativo. La función F_N en $\mathbb{T}^1$ dada por

$$F_N(x)=\sum_{j=-N}^{N}\left(1-\frac{|j|}{N+1}\right)e^{2\pi ijx}=\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}\right)^2,$$

es llamada **el núcleo de Fejér**.

Definición 2.2.4. El núcleo de Fejer F_N^n en $\mathbb{T}^n$ se define como el producto 1-dimensional de los núcleos de Fejér, o como el promedio del producto de los núcleos de Dirichlet en cada variable, más precisamente, $F_N^1(x)=F_N(x)$ y

$$\begin{aligned}F_N^n(x_1,\ldots,x_n) &= \prod_{j=1}^{n}F_N(x_j)\\ &= \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}D_k(x_j)\right)\\ &= \frac{1}{(N+1)^n}\sum_{k_1=0}^{N}\cdots\sum_{k_n=0}^{N}D_{k_1}(x_1)\cdots D_{k_n}(x_n).\end{aligned}$$

Note que F_N^n es un polinomio trigonométrico de grado nN.

Observación 4. Usando las identidades para F_N en (2.2.4), podemos escribir para todo $N \geq 0$

$$\begin{aligned} F_N^n(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ |m_j| \leq N}} \left(1 - \frac{|m_1|}{N+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|m_n|}{N+1}\right) e^{2\pi i m \cdot x} \\ &= \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\sin(\pi(N+1)x_j)}{\sin(\pi x_j)}\right)^2, \end{aligned}$$

Por tanto $F_N \geq 0$.

Proposición 2.2.2. La familia de los núcleos de Fejér $\{F_N^n\}_{N=0}^{\infty}$ es una identidad aproximada en $\mathbb{T}^n$.

Demostración. Como $F_N^n \geq 0$ entonces

$$\|F_N^n\|_{L^1} = \int_{\mathbb{T}^n} |F_N^n|\, dx = \int_{\mathbb{T}^n} F_N^n\ dx.$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} F_N^n\ dx &= \int_{\mathbb{T}^n} \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{\sin(\pi(N+1)x_j)}{\sin(\pi x_j)}\right]^2 dx_j \\ &= \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^{n} \int_0^1 \left[\frac{\sin(\pi(N+1)x_j)}{\sin(\pi x_j)}\right]^2 dx_j \\ &= \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^{n} (N+1)^n = 1. \end{aligned}$$

De tal forma que se mantienen las propiedades (i) y (ii) de las identidades aproximadas de acuerdo a la Definición (1.4.1). Queda por probar la propiedad (iii) de esta Definición, donde utilizamos la identidad de la observación (4). Ahora, para $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ tenemos que $1 \leq \frac{|t|}{|\sin t|} \leq \frac{\pi}{2}$. De esta manera,

$$F_N(x) \leq \frac{1}{N+1} \min\left(\frac{(N+1)|\pi x|}{|\sin(\pi x)|}, \frac{1}{|\sin(\pi x)|}\right)^2 \leq \frac{1}{N+1}\frac{\pi^2}{4} \min\left(N+1, \frac{1}{|\pi x|}\right)^2$$

donde $|x| \leq \frac{1}{2}$. Luego, para $\delta > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} F_N(x) dx &\leq \frac{1}{N+1}\frac{\pi^2}{4} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{dx}{|\pi\delta|^2} \\ &\leq \frac{\pi^2}{4(N+1)} \frac{1}{|\pi\delta|^2} \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} dx \\ &\leq \frac{1}{4\delta^2} \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \to 0, \text{ cuando } N \to \infty. \end{aligned}$$

En dimensiones superiores, dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ con $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \geq \delta$, existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $|x_j| \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\substack{m\in\mathbb{T}^n\\|x|\geq\delta}} F_N^n(x)dx &= \int_{\substack{m\in\mathbb{T}^n\\|x|\geq\delta}} \prod_{j=1}^n F_N(x_j)dx \\
&= \prod_{j=1}^n \int_{|x_j|\geq\frac{\delta}{\sqrt{n}}} F_N(x_j)dx_j \prod_{k\neq j} \int_{\mathbb{T}^1} F_N(x_k)dx_k \\
&\leq \frac{n}{4(\delta/\sqrt{n})^2} \frac{1}{N+1} \to 0, \text{ cuando } N \to \infty.
\end{aligned}$$

Lo que prueba la afirmación. □

Proposición 2.2.3. El conjunto de polinomios trigonométricos es denso en $L^p(\mathbb{T}^n)$ para $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ para $1 \leq p < \infty$. Veamos que $F_N^n * f$ es un polinomio trigonométrico

$$\begin{aligned}
(F_N^n * f)(x) &= \int_{\mathbb{T}^n} F_N^n(x-y)f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} F_N^n(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} f(y) \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\|m_j|\leq N}} \left(1 - \frac{|m_1|}{N+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|m_n|}{N+1}\right) e^{2\pi i m\cdot(x-y)}dy \\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\|m_j|\leq N}} \left(1 - \frac{|m_1|}{N+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|m_n|}{N+1}\right) \hat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}.
\end{aligned}$$

Luego por el teorema (1.4.2) parte (1), se sigue que

$$\|F_N^n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \to 0, \text{ cuando } N \to \infty.$$

Por lo tanto, el conjunto de los polinomios trigonométricos es denso en $L^p(\mathbb{T}^n)$. □

Proposición 2.2.4. (Teorema de aproximación de Weierstrass para polinomios trigonométricos) Cada función continua en el toro es un límite uniforme de polinomios trigonométricos.

Demostración. Sea f una función continua en el compacto $\mathbb{T}^n$, luego por el teorema (1.4.2) parte (2) tenemos que

$$(F_N^n * f) \xrightarrow{U} f \text{ cuando } N \to \infty,$$

donde $F_N^n * f$ es un polinomio trigonométrico. Por lo tanto, toda función continua en $\mathbb{T}^n$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios trigonométricos. $\square$

2.3. Sumas parciales e inversión de Fourier

Definición 2.3.1. Sean $R \geq 0$ y $N \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. La expresión

$$(f * D_R^n)(x) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ |m_j| \leq N}} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}$$

se denominan sumas parciales cuadradas de la serie de Fourier de f. Entonces la expresión

$$(f * \mathring{D}_R^n)(x) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ |m| \leq R}} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x},$$

son llamadas sumas parciales circulares (o esféricas) de la serie de Fourier de f. Por otra parte, la expresión

$$(f * F_N^n)(x) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ |m_j| \leq R}} \left(1 - \frac{|m_1|}{N+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|m_n|}{N+1}\right) \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x},$$

son las medias cuadradas de Cesàro (o de Fejér) de f.

Finalmente, para $R \geq 0$ la expresión

$$(f * \mathring{F}_R^n)(x) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ |m_j| \leq R}} \left(1 - \frac{|m|}{R}\right) \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}$$

se denominan las medias circulares de Cesàro (o de Fejér) de f.

Proposición 2.3.1. Si $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ satisfacen $\widehat{f}(m) = \widehat{g}(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, entonces $f = g$ a.e..

Demostración. Por linealidad asumamos que $g = 0$. Si $\widehat{f}(m) = \widehat{g}(m) = 0$, para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, entonces por la definición (2.3.1) se tiene que $F_N^n * f = 0$, para todo $N \in \mathbb{Z}^+$. Por la proposición (2.2.2) la sucesión $\{F_N^n\}_{n \in \mathbb{Z}^n}$ es una identidad aproximada cuando $N \to \infty$. Por tanto

$$\|f - F_N^n * f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \to 0 \quad \text{cuando,} \ N \to \infty.$$

De esta manera $\|f\|_{L^1} = 0$, lo que implica que $f = 0$ a. e. , luego $f = g$ a.e. $\square$

Proposición 2.3.2 (**Inversión de Fourier**). Suponga que $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ y que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(m)| < \infty,$$

entonces

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}$$

y por tanto f es casi en todas partes igual a una función continua.

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, y suponga que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \left|\hat{f}(m)\right| < \infty.$$

Noté que

$$\left|\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}\right| \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \left|\hat{f}(m)\right| \left|e^{2\pi i m\cdot x}\right| \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \left|\hat{f}(m)\right| < \infty.$$

Así podemos definir una función g de la siguiente forma

$$g(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}, \quad \forall x \in \mathbb{T}^n.$$

Además, por T.C.D. Lebesgue se sigue que $\hat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot(x-x_0)} \longrightarrow 0$, cuando $x \to x_0$. Luego

$$|g(x) - g(x_0)| = \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot(x-x_0)}\right| \longrightarrow 0, \text{ cuando } x \to x_0.$$

Es decir, g es continua en x_0. Por último, nótese que

$$\begin{aligned}
\hat{g}(k) &= \int_{\mathbb{T}^n} g(x)e^{-2\pi i k\cdot x} \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}\ e^{-2\pi i k\cdot x}dx \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m) \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i m\cdot x}\ e^{-2\pi i k\cdot x}dx \\
&= \hat{f}(k)
\end{aligned}$$

De esta manera tenemos que $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$ y como $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$, entonces por la proposición (2.3.1) implica que $f = g$ a.e. Como g es continua, se tiene el resultado deseado. $\square$

Consideraremos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T}^n)$ con producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Sea $\{\varphi_m\}$ la sucesión de funciones $\xi \mapsto e^{2\pi i m\cdot\xi}$ indexada por $m \in \mathbb{Z}^n$. La ortonormalidad de la sucesión $\{\varphi_m\}$ es una consecuencia de la siguiente identidad:

$$\int_{[0,1]^n} e^{2\pi i m\cdot x}\ \overline{e^{2\pi i k\cdot x}}dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m = k \\ 0 & \text{si } m \neq k. \end{cases} \tag{2.6}$$

Así $\langle f, \varphi_m\rangle = \hat{f}(m)$, para todo $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$.

Proposición 2.3.3. Los siguientes enunciados son válidos para $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n)$:

(1) (Identidad de Plancherel)

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m)|^2.$$

(2) La función $f(t)$ es igual en casi todas partes (a.e.) al límite en $L^2(\mathbb{T}^n)$ de la sucesión

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{|m|\leq M} \hat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot t}.$$

(3) (Relación de Parseval)

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)\overline{\hat{g}(m)}.$$

(4) El mapeo $f \mapsto \{\hat{f}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ es una isometría de $L^2(\mathbb{T}^n)$ sobre $l^2(\mathbb{Z}^n)$.

(5) Para todo $k \in \mathbb{Z}^n$ tenemos

$$\widehat{fg}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)\hat{g}(k-m) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k-m)\hat{g}(m).$$

Demostración. 1. Sea $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, como $\langle f, \varphi_m\rangle = \hat{f}(m)$, para $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ y $\{\varphi_m\}$ una sucesión ortonormal. Entonces por la proposición (1.4.1) tenemos que

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m)|^2.$$

2. Sea $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ y suponga que $\{\varphi_m\}$ es una sucesión ortonormal. Entonces, por definición de los coeficientes de Fourier, se tiene

$$\langle f, \varphi_m \rangle = \langle f, e^{2\pi i m\cdot t} \rangle = \hat{f}(m), \quad \text{para } f \in L^2(\mathbb{T}^n).$$

Luego usando la proposición (1.4.1) obtenemos que

$$f(t) = \lim_{M\to\infty} \sum_{|m|\leq M} \hat{f}(m) e^{2\pi i m\cdot t}.$$

3. Sean $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n)$, sustituyendo $f+g$ en (1) y usando polarización tenemos

$$\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 + 2\mathrm{Re}\langle f|g\rangle = \|f+g\|_{L^2}^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m) + \hat{g}(m)|^2$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m)|^2 + \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\hat{g}(m)|^2 + 2\mathrm{Re} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)\overline{\hat{g}(m)}.$$

Por la identidad de Plancherel la anterior expresión se reduce a

$$2\mathrm{Re}\langle f, g\rangle = 2\mathrm{Re} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)\overline{\hat{g}(m)}.$$

Es decir

$$\mathrm{Re}\langle f, g\rangle = \mathrm{Re} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)\overline{\hat{g}(m)}. \tag{2.7}$$

De manera similar, sustituyendo $f+ig$ en (1) y resolviendo este producto interior, obtenemos

$$\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 + 2\mathrm{Im}\langle f, g\rangle = \|f+g\|_{L^2}^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m) + \hat{g}(m)|^2$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m)|^2 + \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\hat{g}(m)|^2 + 2\mathrm{Im} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)\overline{\hat{g}(m)}.$$

Usando la identidad de Plancherel y cancelando los términos semejantes, tenemos

$$\mathrm{Im}\langle f, g\rangle = \mathrm{Im} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)\overline{\hat{g}(m)}. \tag{2.8}$$

De (2.7) y (2.8) concluimos que

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(t)\overline{g(t)}dt = \langle f, g\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)\overline{\hat{g}(m)}.$$

4. Debemos mostrar que el mapeo es biyectivo y preserva la norma, esto último es inmediato de la relación de Parseval, haciendo $g = f$. Para la biyectividad se tiene lo siguiente:

   $\star$ <u>*Inyectivo*</u>: Si $\hat{f}(m) = 0$ para cada $m \in \mathbb{Z}^n$, entonces por la proposición (2.3.1) tenemos que $f = 0$ a.e. Por tanto, $f \mapsto \{\hat{f}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ es una isometría inyectiva de $L^2(\mathbb{T}^n)$ sobre l^2.

   $\star$ <u>*Sobreyectivo*</u>: Sea $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ una sucesión de números complejos tal que $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n} \in l^2(\mathbb{Z}^n)$. Defina

   $$f_N(t) := \sum_{|m|\leq N} a_m e^{2\pi i m\cdot t},$$

   Observe que f_N es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{T}^n)$, es decir

   $$\begin{aligned}\|f_N - f_M\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{T}^n} |f_N(t) - f_M(t)|^2 \, dt \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{M<|m|\leq N} a_m e^{2\pi i m\cdot t} \right| dt \to 0\end{aligned}$$

   cuando $M, N \to \infty$. Por tanto existe $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que $\lim_{N\to\infty} f_N = f$. Además

   $$\hat{f}(k) = \langle f, \varphi_k \rangle = \left\langle \lim_{N\to\infty} \sum_{|m|\leq N} a_m e^{2\pi i m\cdot t}, \varphi_k \right\rangle = a_k$$

   Por lo tanto, $\hat{f}(m) = a_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$. Lo que termina la prueba.

5. Sean $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n)$ y $m, k \in \mathbb{Z}^n$. Luego por (3) y la proposición (2.1.1), inciso (6) y (3) tenemos lo siguiente

   $$\begin{aligned}\widehat{fg}(k) &= \int_{\mathbb{T}^n} (fg)(x) e^{-2\pi i k\cdot x} dx = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\overline{\overline{g(x)}}\ \overline{e^{2\pi i k\cdot x}} dx \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m) \overline{\widehat{\overline{g} e^{2\pi i k\cdot x}}(m)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m) \overline{\widehat{\overline{g}}(m-k)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)\hat{g}(k-m).\end{aligned}$$

   Lo que termina la prueba de la proposición. □

Proposición 2.3.4. (Lema de Riemann-Lebesgue) Dada una función f en $L^1(\mathbb{T}^n)$, tenemos que $\left|\hat{f}(m)\right| \to 0$ cuando $|m| \to \infty$.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$. Sea P un polinomio trigonométrico tal que $\|f - P\|_{L^1} < \epsilon$. Ahora bien, si $|m| >$ grado(P) entonces $\hat{P}(m) = 0$, pues

$$\widehat{P}(m) = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i k\cdot x} - e^{2\pi i m\cdot x}\ dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i k\cdot x} - e^{2\pi i m\cdot x}\ dx = a_m = 0.$$

Así

$$\left|\hat{f}(m)\right| = \left|\hat{f}(m) - \widehat{P}(m)\right| = \left|\int_{\mathbb{T}^n} (f(x) - P(x)) e^{-2\pi i m\cdot x} dx\right| \leq \|f - P\|_{L^1} \leq \epsilon.$$

Por lo tanto $\left|\hat{f}(m)\right| \to 0$ cuando $|m| \to \infty$. $\square$

Capítulo 3

Funciones periódicas de prueba

En este capítulo se hace el estudio de las funciones periódicas de prueba y de las distribuciones periódicas, se extenderán las propiedades que ya se tienen para la transfomada de Fourier a este tipo de funciones. Esta parte es esencial para definir los espacios de Gevrey periódicos en el próximo capítulo.

3.1. Funciones periódicas de prueba

Definición 3.1.1. Sea

$$\mathscr{P} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ es } 2\pi\text{-periódica en cada variable}\}.$$

Los elementos de $\mathscr{P}$ son llamados **funciones periódicas de prueba**.

Definición 3.1.2. Decimos que una sucesión $(u_j)_{j=1}^\infty \longrightarrow u$ cuando $j \to \infty$, si para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha u_j \xrightarrow{U} \partial^\alpha u \quad \text{en } \mathbb{R}^n.$$

La convergencia secuencial es suficiente para describir propiedades topológicas en espacios métricos, pero no en espacios topológicos generales. Además, definimos para cada $N \in \mathbb{N}$

$$\|u\|_{C^N} = \sum_{|\alpha| \le N} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}.$$

Teorema 3.1.1. ($\mathscr{P}$ como un espacio métrico.) Si $u, v \in \mathscr{P}$, define

$$d(u,v) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\|u-v\|_{C^N}}{1+\|u-v\|_{C^N}}.$$

Entonces $(\mathscr{P}, d)$ es un espacio métrico. Más aún, $u_j \to u$ en $(\mathscr{P}, d)$ si y solo si para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\|\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u\|_{L^\infty} \to 0.$$

Demostración. Sean $u, v \in \mathscr{P}$ y $N \in \mathbb{N}$.

i) Para todo $N \in \mathbb{N}$

$$0 \leq d(u,v) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\|u-v\|_{C^N}}{1+\|u-v\|_{C^N}} \leq \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} = 2.$$

Pues, $0 \leq 1 \Rightarrow \|u-v\|_{C^N} \leq 1 + \|u-v\|_{C^N}$ de esta manera

$$0 \leq \frac{\|u-v\|_{C^N}}{1+\|u-v\|_{C^N}} \leq 1, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Así $d(u,v)$ es finita y no-negativa.

ii) Si $d(u,v) = 0$, entonces $\|u-v\|_{C^N} = 0$ para todo N, y el caso $N = 0$ implica que $u = v$.

iii) Si $u, v \in \mathscr{P}$ entonces

$$d(u,v) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\|u-v\|_{C^N}}{1+\|u-v\|_{C^N}} = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\|v-u\|_{C^N}}{1+\|v-u\|_{C^N}} = d(v,u).$$

iv) Sean $w, u, v \in \mathscr{P}$, por desigualdad triangular tenemos

$$\|u-v\|_{C^N} \leq \|u-w\|_{C^N} + \|w-v\|_{C^N},$$

luego, tomando inverso en ambos lados de la desigualdad y sumando 1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|u-v\|_{C^N}} + 1 &\geq \frac{1}{\|u-w\|_{C^N} + \|w-v\|_{C^N}} + 1 \\
\frac{1+\|u-v\|_{C^N}}{\|u-v\|_{C^N}} &\geq \frac{1+\|u-w\|_{C^N} + \|w-v\|_{C^N}}{\|u-w\|_{C^N} + \|w-v\|_{C^N}}
\end{aligned}$$

invirtiendo la desigualdad anterior

$$\begin{aligned}
\frac{\|u-v\|_{C^N}}{1+\|u-v\|_{C^N}} &\leq \frac{\|u-w\|_{C^N}+\|w-v\|_{C^N}}{1+\|u-w\|_{C^N}+\|w-v\|_{C^N}} \\
&= \frac{\|u-w\|_{C^N}}{1+\|u-w\|_{C^N}+\|w-v\|_{C^N}} + \frac{\|w-v\|_{C^N}}{1+\|u-w\|_{C^N}+\|w-v\|_{C^N}} \\
&\leq \frac{\|u-w\|_{C^N}}{1+\|u-w\|_{C^N}} + \frac{\|w-v\|_{C^N}}{1+\|w-v\|_{C^N}}.
\end{aligned}$$

De esta manera obtenemos

$$\frac{\|u-v\|_{C^N}}{1+\|u-v\|_{C^N}} \leq \frac{\|u-w\|_{C^N}}{1+\|u-w\|_{C^N}} + \frac{\|w-v\|_{C^N}}{1+\|w-v\|_{C^N}}. \tag{3.1}$$

Ahora, multiplicando la serie $\sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N}$ a ambos lados de (3.1) entonces

$$\sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N}\frac{\|u-v\|_{C^N}}{1+\|u-v\|_{C^N}} \leq \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N}\frac{\|u-w\|_{C^N}}{1+\|u-w\|_{C^N}} + \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N}\frac{\|w-v\|_{C^N}}{1+\|w-v\|_{C^N}},$$

es decir; $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$.

De $i)$, $ii)$, $iii)$ y $iv)$ se prueba que $(\mathscr{P}, d)$ es un espacio métrico.

Ahora bién, sea (u_j) una sucesión de $\mathscr{P}$. Si $u_j \to u$ cuando $j \to \infty$ en $(\mathscr{P}, d)$, entonces para todo M entero no negativo, se tiene

$$0 \leq 2^{-M}\frac{\|u_j-u\|_{C^M}}{1+\|u_j-u\|_{C^M}} \leq \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N}\frac{\|u_j-u\|_{C^N}}{1+\|u_j-u\|_{C^N}} \to 0, \text{ cuando } j \to \infty.$$

Lo que implica

$$\frac{\|u_j-u\|_{C^M}}{1+\|u_j-u\|_{C^M}} \to 0, \text{ cuando } j \to \infty \text{ para todo } M.$$

Por tanto, $\|u_j - u\|_{C^M} \leq 1$ para j suficientemente grande, y obtenemos que $\|u_j - u\|_{C^M} \to 0$, para todo M. Así, $\|\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u\|_{L^\infty} \to 0$ cuando $j \to \infty$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Reciprocamente, supongamos que $\|\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u\|_{L^\infty} \to 0$ cuando $j \to \infty$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Entonces, para todo M

$$\|u_j - u\|_{C^M} \to 0, \text{ cuando } j \to \infty.$$

Esto implica que

$$\frac{\|u_j-u\|_{C^M}}{1+\|u_j-u\|_{C^M}} \to 0, \text{ cuando } j \to \infty \text{ para todo } M. \tag{3.2}$$

Elija N_0 tal que
$$\sum_{N=N_0+1}^{\infty} 2^{-N} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$
Luego, usando (3.2) se puede escoger j_0 tal que si $j \geq j_0$, se tiene
$$\sum_{N=0}^{N_0} 2^{-N} \frac{\|u_j - u\|_{C^N}}{1 + \|u_j - u\|_{C^N}} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$
De esta manera
$$\begin{aligned} d(u_j, u) &= \sum_{N=0}^{N_0} 2^{-N} \frac{\|u_j - u\|_{C^N}}{1 + \|u_j - u\|_{C^N}} + \sum_{N=N_0+1}^{\infty} 2^{-N} \frac{\|u_j - u\|_{C^N}}{1 + \|u_j - u\|_{C^N}} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{N=N_0+1}^{\infty} 2^{-N} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad \text{para } j \geq j_0. \end{aligned}$$
Así, $d(u_j, u) \to 0$ cuando $j \to \infty$. Por lo tanto, $u_j \to u$ en $(\mathscr{P}, d)$.

□

Definición 3.1.3. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un mapeo $\rho : X \to \mathbb{R}$ es una **seminorma** si para cualquier $u, v \in X$ y para todo $c \in \mathbb{C}$,

1. $\rho(u) \geq 0$ (No-negatividad)
2. $\rho(u + v) \leq \rho(u) + \rho(v)$ (Sub-aditividad)
3. $\rho(cu) = |c|\rho(u)$ (Homogeneidad).

Así, una seminorma ρ es casi como una norma pero se permite que $\rho(u) = 0$, para algunos elementos $u \in X$ distintos de cero. Una familia $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es llamada separación si para cualquier $u \in X$ distinto de cero, existe $\alpha \in A$ con $\rho_\alpha(u) \neq 0$.

Teorema 3.1.2. Sea X un espacio vectorial y $\{\rho_N\}_{N=0}^{\infty}$ una familia de separación contable de seminormas. La función
$$d(u, v) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\rho_N(u - v)}{1 + \rho_N(u - v)}, \quad u, v \in X,$$
es una métrica en X. Más aún, $u_j \to u$ en (X, d) si para cualquier N se tiene
$$\rho_N(u_j - u) \to 0.$$

Demostración. Sean $u, v \in X$ y $N \in \mathbb{N}$.

i) Para todo $N \in \mathbb{N}$

$$0 \leq d(u,v) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\rho_N(u-v)}{1+\rho_N(u-v)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-N} < \infty.$$

Pues, $0 \leq 1 \Rightarrow \rho_N(u-v) \leq 1 + \rho_N(u-v)$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Luego,

$$0 \leq \frac{\rho_N(u-v)}{1+\rho_N(u-v)} \leq 1, \ \forall N \in \mathbb{N}.$$

Así, $d(u,v)$ es finita y no-negativa.

ii) $d(u,v) = 0$ si y solo si $\rho_N(u-v) = 0$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Si $u - v \neq 0$ por ser una familia de separación, existe M tal que $\rho_M(u-v) \neq 0$, lo cual es absurdo, lo que implica que $u = v$. Por otro lado, si $u = v$ debido a la propiedad (c) de la definición de familia de separación, se tiene que $\rho_N(0) = 0$ y por tanto $\rho_N(u-v) = 0$.

iii) Si $u, v \in X$ y para cada $N \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$d(u,v) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\rho_N(u-v)}{1+\rho_N(u-v)} = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\rho_N(v-u)}{1+\rho_N(v-u)} = d(v,u).$$

iv) Consideremos la función $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, cuya derivada es $\varphi^{'}(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ la cuál es positiva. Por tanto, φ es monótona creciente. Consecuentemente,

$$|a+b| \leq |a| + |b| \Rightarrow \varphi(|a+b|) \leq \varphi(|a|+|b|).$$

Aplicando la desigualdad triangular, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

En las desigualdades anteriores, considere $a := \rho_N(u-w),$ y $b := \rho_N(w-v)$, entonces

$$\frac{\rho_N(u-v)}{1+\rho_N(u-v)} \leq \frac{\rho_N(u-w)}{1+\rho_N(u-w)} + \frac{\rho_N(w-v)}{1+\rho_N(w-v)}. \tag{3.3}$$

Ahora, multiplicando la serie $\sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N}$ a ambos lados de (3.3), se sigue que

$$\sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\rho_N(u-v)}{1+\rho_N(u-v)} \leq \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\rho_N(u-w)}{1+\rho_N(u-w)} + \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\rho_N(w-v)}{1+\rho_N(w-v)}.$$

Así,

$$d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v).$$

De (i), (ii), (iii) y (iv) se concluye que (X,d) es un espacio métrico.

Ahora bién, sea (u_j) una sucesión de X y suponga que $u_j \to u$ cuando $j \to \infty$ en (d,X). Luego, para cualquier $N \in \mathbb{N}$ fijo y tomando $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $j > N_\epsilon$ se tiene

$$\begin{aligned} 2^{-N} \frac{\rho_N(u-u_j)}{1+\rho_N(u-u_j)} &\leq d(u,u_j) \leq 2^{-N}\epsilon \\ \rho_N(u-u_j) &\leq \epsilon(1+\rho_N(u-u_j)) \\ \rho_N(u-u_j)(1-\epsilon) &\leq \epsilon \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como $\frac{1}{2} < 1-\epsilon < 1$ se tiene que $\frac{1}{2}\rho_N(u-u_j) < \rho_N(u-u_j)(1-\epsilon) < \rho_N(u-u_j)$, por (3.4) se obtiene $\rho_N(u-u_j) \leq 2\epsilon$. Así $\rho_N(u-u_j) \to 0,$ cuando $j \to \infty$.

Reciprocamente, supongamos que $\rho_N(u-u_j) \to 0,$ cuando $j \to \infty$ para cada $N \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$, elija $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{N=N_0+1}^{\infty} 2^{-N} \leq \epsilon.$$

Note que

$$\frac{\rho_N(u-u_j)}{1+\rho_N(u-u_j)} \leq 1.$$

Además, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq N_\epsilon$, se obtiene entonces

$$d(u,u_j) \leq \sum_{N=0}^{N_0} 2^{-N} \frac{\rho_N(u-u_j)}{1+\rho_N(u-u_j)} + \sum_{N=N_0+1}^{\infty} 2^{-N} \leq \sum_{N=0}^{N_0} 2^{-N} + \epsilon \leq 2\epsilon,\ \forall j \geq N_\epsilon.$$

Por lo tanto, $d(u,u_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$.

$\square$

Teorema 3.1.3 (Completitud)**.** Cualquier sucesión de Cauchy en $\mathscr{P}$ converge en $\mathscr{P}$.

Demostración. Sea $(u_j) \subset \mathscr{P}$ una sucesión de Cauchy, luego para cualquier $\epsilon > 0$ existe M tal que

$$d(u_j, u_k) \leq \epsilon, \text{ para } j, k \geq M.$$

En particular para cualquier N fijo

$$0 \leq 2^{-N} \frac{\|u_j - u_k\|_{C^N}}{1 + \|u_j - u_k\|_{C^N}} \leq \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\|u_j - u_k\|_{C^N}}{1 + \|u_j - u_k\|_{C^N}} \leq \epsilon, \text{ para } j, k \geq M.$$

Así, (u_j) es de Cauchy en C^N para cualquier N. Como C^N es completo, para todo N existe $u \in C^N$ tal que $u_j \to u$ cuando $j \to \infty$ en C^N. De esta manera, $u_j \to u$ cuando $j \to \infty$ en C^N para todo N. Por Teorema (3.1.1) se sigue que $u_j \to u$ en $\mathscr{P}$. $\square$

Ahora consideramos algunas operaciones básicas sobre funciones en $\mathscr{P}$. Para introducir algo de notación, definimos la reflexión como

$$\tilde{u}(x) = u(-x),$$

la translación (para $x_0 \in \mathbb{R}^n$)

$$(\tau_{x_0} u)(x) = u(x - x_0),$$

y la convolución (para $u, v \in \mathscr{P}$)

$$(u * v)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} u(x - y) v(y) dy.$$

A continuación, se muestran algunas propiedades básicas de la convolución.

Lema 3.1.4. Si $u, v \in \mathscr{P}$ entonces $u * v \in \mathscr{P}$. Más aún, para funciones en $\mathscr{P}$ tenemos

1. $u * v = v * u$ (Conmutatividad)
2. $u * (v * w) = (u * v) * w$ (Asociatividad)
3. $\partial^\alpha (u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v)$ (Derivada).

Demostración. Sean $u, v \in \mathscr{P}$, veamos que $u * v$ es uniformemente continua. En efecto, tome $x, y \in \mathbb{R}^n$, como $u \in \mathscr{P}$, entonces u es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$, así que:

$$x, y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \delta \Rightarrow |u(x - z) - u(y - z)| < \frac{\epsilon}{(2\pi)^{-n} \|v\|_{L^1([-\pi,\pi]^n)}}$$

Ahora, note que:

$$\begin{aligned}
|u * v(x) - u * v(y)| &= \left|(2\pi)^{-n}\left(\int_{[-\pi,\pi]^n} u(x-z)v(z)dz - \int_{[-\pi,\pi]^n} u(y-z)v(z)dz\right)\right| \\
&= \left|(2\pi)^{-n}\right|\left|\int_{[-\pi,\pi]^n} \left(u(x-z)v(z) - u(y-z)v(z)\right)dz\right| \\
&\leq (2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} |u(x-z) - u(y-z)|\,|v(z)|\,dz \\
&< (2\pi)^{-n}\frac{\epsilon}{(2\pi)^{-n}\|v\|_{L^1([-\pi,\pi]^n)}}\int_{-[\pi,\pi]^n} |v(z)|\,dz \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto $u*v$ es una función periódica continua en $\mathbb{R}^n$. Noté que, la j-ésima derivada parcial de $u * v$ en x es

$$\frac{u * v(x + he_j) - u * v(x)}{h} = (2\pi)^{-n}\int_{-[\pi,\pi]^n} \frac{u(x + he_j - y) - u(x-y)}{h}v(y)dy,$$

por el Teorema del Valor Medio, si $h \leq 1$ existe θ con $0 \leq \theta \leq 1$ tal que:

$$\left|\frac{u(x + he_j - y) - u(x-y)}{h}\right| = |\partial_j u(x + \theta e_j - y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty}.$$

Donde el último límite es independiente de $h, x,$ e y, y el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue permite tomar el límite cuando $h \to 0$ en la integral como sigue:

$$\begin{aligned}
\partial_j(u * v)(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{u * v(x + he_j - y) - u * v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} \frac{u(x + he_j - y) - u(x-y)}{h}v(y)dy \\
&= \lim_{h\to 0}(2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} \partial_j u(x + \theta e_j - y)v(y)dy \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} \partial_j u(x + \theta e_j - y)v(y)dy \\
&= \partial_j u * v(x).
\end{aligned}$$

Como $\partial_j u \in \mathscr{P}$, de la parte (1) se sigue que $\partial_j(u * v) \in \mathscr{P}$ es una función periódica continua para cada j. Iterando este argumento implica que $u * v \in \mathscr{P}$ y $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v$. Resta por demostrar las propiedades 1-2.

1. Haciendo la sustitución $z = x - y,\ y = x - z,\ dz = -dy$

$$\begin{aligned} u * v(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} u(x-y)v(y)dy = (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} u(z)v(x-z)dz \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} v(x-z)u(z)dz = v * u(x). \end{aligned}$$

2. Haciendo la sustitución $z = x - y;\ y = x - z$

$$\begin{aligned} [u * (v * w)](x) &= u(x) * (v * w)(x) = u(x) * (w * v)(x) \\ &= u(x) * (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} w(x-y)v(y)dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} u(z) \int_{[-\pi,\pi]^n} w(x-z-y)v(y)dydz \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} w(y) \int_{[-\pi,\pi]^n} v(x-y-z)dzdy \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} (u * v)(x-y)w(y)dy \\ &= (u * v)(x) * w(x) = [(u * v) * w](x). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.5 (Operaciones en funciones de prueba)**.** Si $f, v \in \mathscr{P}$, entonces las siguientes operaciones son mapeos continuos de $\mathscr{P}$ en $\mathscr{P}$:

1. $u \mapsto \tilde{u}$ (Reflexión)
2. $u \mapsto \bar{u}$ (Conjugación)
3. $u \mapsto \tau_{x_0} u$ (Translación)
4. $u \mapsto \partial^\alpha u$ (Derivada)
5. $u \mapsto fu$ (Multiplicación)
6. $u \mapsto v * u$ (Convolución).

Demostración. 1. Sean $u, v \in \mathscr{P}$ entonces

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{C^N} &= \sum_{|\alpha| \le N} \|\partial^\alpha (\tilde{u} - \tilde{v})\|_{L^\infty} = \sum_{|\alpha| \le N} \|(-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (u - v)(-x)\|_{L^\infty} \\ &= \sum_{|\alpha| \le N} \|\partial^\alpha (u - v)(x)\|_{L^\infty} = \|u - v\|_{C^N} \to 0,\ \text{cuando } u \to v. \end{aligned}$$

2. Sean $u, v \in \mathscr{P}$. Entonces

$$\|\bar{u} - \bar{v}\|_{C^N} = \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha(\bar{u} - \bar{v})\|_{L^\infty} = \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha(u - v)\|_{L^\infty}$$
$$= \|u - v\|_{C^N}, \text{ cuando } u \to v.$$

3. Sean $u, v \in \mathscr{P}$. Entonces

$$\begin{aligned}\|\tau_{x_0}u - \tau_{x_0}v\|_{C^N} &= \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha(\tau_{x_0}u - \tau_{x_0}v)\|_{L^\infty} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha[u(x - x_0) - v(x - x_0)]\|_{L^\infty} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha(u - v)(x - x_0)\|_{L^\infty} \\ &= \|u - v\|_{C^N}, \text{ cuando } u \to v.\end{aligned}$$

4. Sean $u, v \in \mathscr{P}$. Entonces

$$\|\partial^\beta u - \partial^\beta v\|_{C^N} = \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha(\partial^\beta u - \partial^\beta v)\|_{L^\infty} = \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^{\alpha+\beta}(u - v)\|_{L^\infty}$$
$$\leq \|u - v\|_{C^{N+|\beta|}} \to 0, \text{ cuando } u \to v.$$

5. Sean $f, u, v \in \mathscr{P}$. Entonces

$$\begin{aligned}\|fu - fv\|_{C^N} = \|f(u - v)\|_{C^N} &= \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha[f(u - v)]\|_{L^\infty} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \left\| \sum_{v \leq \alpha} \binom{\alpha}{v} \partial^v f \partial^{\alpha - v}(u - v) \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \sum_{v \leq \alpha} \binom{\alpha}{v} \|f\|_{C^N} \|u - v\|_{C^N} \to 0, \text{ cuando } u \to v.\end{aligned}$$

6. Sean $u, v, w \in \mathscr{P}$. Entonces

$$\begin{aligned}\|v * u - v * w\|_{C^N} &= \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha(v * (u - w))\|_{L^\infty} = \sum_{|\alpha| \leq N} \|v * \partial^\alpha(u - w)\|_{L^\infty} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq N} \|v\|_{L^1} \|v * \partial^\alpha(u - w)\|_{L^\infty} \\ &\leq \|v\|_{L^1} \|u - w\|_{C^N} \to 0, \text{ cuando } u \to w.\end{aligned}$$

$\square$

Definición 3.1.4. Una sucesión $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ se dice que decrece rápidamente si para cualquier $N > 0$ existe $C_N > 0$ tal que:

$$|c_k| \leq C_N \langle k\rangle^{-N}.$$

Donde $\langle k\rangle := (1 + |k|^2)^{1/2}$. El conjunto de sucesiones que decrecen rápidamente es denotado por $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$, y está dotado de la topología inducida por las normas

$$(c_k) \mapsto \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^N |c_k|.$$

Denotamos por $\mathscr{F}$ el mapeo (transformada de Fourier) que toma una función de prueba a una sucesión de coeficientes de Fourier. Por lo tanto

$$\mathscr{F} : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n), \text{ con } u \longmapsto (\hat{u}(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}.$$

Lema 3.1.6. La serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{-s}$$

converge si y solo si $s > n$.

Demostración. Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-s/2}\, d\xi < \infty \quad \text{si } s > n.$$

Entonce se tiene el resultado. □

Teorema 3.1.7 (Series de Fourier de funciones de prueba)**.** $\mathscr{F} : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{Z}^n)$ es un isomorfismo. Cualquier $u \in \mathscr{P}$ se puede escribir como la serie de Fourier

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{u}(k) e^{ik\cdot x}$$

con convergencia en $\mathscr{P}$.

Demostración. Sea $u \in \mathscr{P}$, entonces $D^\alpha u \in \mathscr{P}$. Utilizando repetidamente la fórmula de integración por partes

$$\int_{[-\pi,\pi]^n} v\partial_j w dx = -\int_{[-\pi,\pi]^n} (\partial_j v) w dx,$$

con $v, w \in C^1([-\pi,\pi]^n)$ periódicas, se obtiene que

$$\begin{aligned}
(D^\alpha u)^\wedge(k) &= (2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} D^\alpha u(x)e^{-ik\cdot x}dx = (2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} D^\alpha u(x)e^{\overline{ik\cdot x}}dx\\
&= (D^\alpha u, e^{ik\cdot x}) = (-1)^{|\alpha|}(u, D^\alpha(e^{ik\cdot x})) = (-1)^{|\alpha|}i^{|\alpha|}k^\alpha(u, e^{ik\cdot x})\\
&= (-1)^{|\alpha|}i^{|\alpha|}k^\alpha\hat{u}(k).
\end{aligned}$$

Ahora, veamos que

$$((1-\Delta)^N u)^\wedge(k) = \langle k\rangle^{2N}\hat{u}(k). \tag{3.5}$$

Haciendo inducción en N, para $N=1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
((1-\Delta)u)^\wedge(k) &= \left((1-\Delta)u, e^{ik\cdot x}\right) = (u, e^{ik\cdot x}) - (\Delta u, e^{ik\cdot x})\\
&= (u, e^{ik\cdot x}) + (u, e^{ik\cdot x})k^2 = (1+k^2)\hat{u}(k).
\end{aligned}$$

Ahora suponga que (3.5) se cumple, y veamos que $((1-\Delta)^{N+1}u)^\wedge(k) = \langle k\rangle^{2(N+1)}\hat{u}(k)$. En efecto;

$$\begin{aligned}
\left((1-\Delta)^{N+1}u\right)^\wedge(k) &= \left[(1-\Delta)(1-\Delta)^N u\right]^\wedge(k) = (1+k^2)\left((1-\Delta)^N u\right)^\wedge(k)\\
&= (1+k^2)(1+k^2)^N\hat{u}(k) = (1+k^2)^{\frac{2(N+1)}{2}}\hat{u}(k)\\
&= \langle k\rangle^{2(N+1)}\hat{u}(k).
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$|\hat{u}(k)| \leq \langle k\rangle^{-2N}\left|\left((1-\Delta)^N u\right)^\wedge(k)\right| \leq \langle k\rangle^{-2N}\left\|(1-\Delta)^N u\right\|_{L^\infty([-\pi,\pi]^n)} \tag{3.6}$$

Lo que muestra que para $u \in \mathscr{P}$, la sucesión $(\hat{u}(k))$ está en $\mathscr{S}$.

Por otro lado, si $(c_k) \in \mathscr{S}$, definamos

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{ik\cdot x}.$$

Como $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ es una sucesión que decrece rápidamente, entonces para $N>0$ existe $C_N>0$ tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|c_k e^{ik\cdot x}| \leq C_N\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{-N}.$$

Donde para todo $N > n$ la última serie converge uniformemente por el Lema (3.1.6) y la M-prueba de Weierstrass. De manera similar tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|D^\alpha\left(c_k e^{ik\cdot x}\right)\right| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|c_k(-1)^\alpha(i)^\alpha k^\alpha e^{ik\cdot x}\right| = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|c_k|k^\alpha\\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} C_N\langle k\rangle^{-N}k^\alpha = C_N\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{-N}k^\alpha,\end{aligned}$$

donde por el Lema (3.1.6) y la M-prueba de Weierstrass la última serie converge uniformemente para cualquier α. Además,

$$D^\alpha(u) = D^\alpha\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{ik\cdot x}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(-1)^{|\alpha|}i^{|\alpha|}k^{|\alpha|}e^{ik\cdot x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} D^\alpha\left(c_k e^{ik\cdot x}\right).$$

Esto prueba que $u \in \mathscr{P}$ y la serie converge en $\mathscr{P}$ (pues C^N converge para cualquier N). Además, noté que

$$\hat{u}(m) = \left(u, e^{im\cdot x}\right) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{ik\cdot x}, e^{im\cdot x}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k\left(e^{ik\cdot x}, e^{im\cdot x}\right)_{l^2} = c_m.$$

Así hemos probado que $\mathscr{F} : \mathscr{P} \to \mathscr{S}$ es biyectiva. Nótese que $\mathscr{F}$ es lineal, pues para $u, v \in \mathscr{P},\ \alpha \in \mathbb{C}$ y usando la proposición (2.1.1) parte (1) y (2) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(u+\alpha v) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widehat{u+\alpha v}(k)e^{ik\cdot x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\hat{u}(k)+\alpha\hat{v}(k))e^{ik\cdot x}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat{u}(k)e^{ik\cdot x} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha\hat{v}(k)e^{ik\cdot x}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat{u}(k)e^{ik\cdot x} + \alpha\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat{v}(k)e^{ik\cdot x}\\ &= \mathscr{F}(u)+\alpha\mathscr{F}(v).\end{aligned}$$

Queda por demostrar que $\mathscr{F}$ es continua. Para esto suponga que $u_j \to 0$ en $\mathscr{P}$, luego por (3.6) se sigue que

$$\langle k\rangle^{2N}|\hat{u}_j(k)| \leq \left|\left((1-\Delta)^N u_j\right)^\wedge(k)\right| \leq \left\|(1-\Delta)^N u_j\right\|_{L^\infty} \leq C\|u_j\|_{C^{2N}}.$$

Entonces

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{2N}|u_j| \to 0 \text{ cuando } j\to\infty,\ \text{para cualquier } N \text{ fijo.}$$

Por tanto $\mathscr{F}$ es continua. $\square$

Teorema 3.1.8. Si $f \in \mathscr{P}$ entonces la transformada de Fourier en $\mathscr{P}$ tiene las siguientes propiedades.

1. $(\tau_{x_0}u)^\wedge(k) = e^{-ik\cdot x_0}\hat{u}(k)$ (Translación)

2. $(e^{ik_0\cdot x}u)^\wedge(k) = \tau_{x_0}\hat{u}(k)$ (Modulación)

3. $(D^\alpha u)^\wedge(k) = k^\alpha \hat{u}(k)$ (Derivada)

4. $(u * v)^\wedge(k) = \hat{u}(k)\hat{v}(k)$ (Convolución)

5. $(fu)^\wedge(k) = (\hat{f} * \hat{u})(k)$ (Producto)

Demostración. 1. Sean $f, u \in \mathscr{P}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ y haciendo el cambio de variable $w = x - x_0$ con $w, x, x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces tenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
(\tau_{x_0}u)^\wedge(k) &= (2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} \tau_{x_0}ue^{-ik\cdot x}dx \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} u(x-x_0)e^{-ik\cdot x}dx \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} u(w)e^{-ik\cdot(w+x_0)}dw \\
&= e^{-ik\cdot x_0}(2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} u(w)e^{-ik\cdot w}dw \\
&= e^{-ik\cdot x_0}\hat{u}(k).
\end{aligned}$$

2. Sean $k, k_0 \in \mathbb{Z}^n$ y $u \in \mathscr{P}$, entonces

$$\begin{aligned}
(e^{ik_0\cdot x}u)^\wedge(k) &= e^{ik_0\cdot x}(2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} u(x)e^{-ik\cdot x}dx \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} u(x)e^{-ik\cdot x+ik_0\cdot x}dx \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{[-\pi,\pi]^n} u(x)e^{-i(k-k_0)\cdot x}dx \\
&= \tau_{k_0}\hat{u}(k).
\end{aligned}$$

3. Fue probada en el teorema anterior.

4. Sean $u, v \in \mathscr{P}$ y $k \in \mathbb{Z}^n$, luego por el Teorema de Fubini y haciendo la sustitución $w = x - y$. Entonces tenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
(u * v)^{\wedge}(k) &= (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} (u * v)(x) e^{-ik\cdot x} dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} (2\pi)^{-n} \left(\int_{[-\pi,\pi]^n} u(x-y) v(y) dy \right) e^{-ik\cdot x} dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} v(y) e^{-ik\cdot y} \left((2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} u(x-y) e^{-ik\cdot (x-y)} dx \right) dy \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} v(y) e^{-ik\cdot y} \left((2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} u(w) e^{-ik\cdot w} dw \right) dy \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} v(y) e^{-ik\cdot y} \hat{u}(k) dy \\
&= \hat{u}(k)\hat{v}(k).
\end{aligned}$$

5. Sean $f, u \in \mathscr{P}$ y $k \in \mathbb{Z}^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
(fu)^{\wedge}(k) &= (2\pi)^{-n} \int_{-[\pi,\pi]^n} (fu)(x) e^{-ik\cdot x} dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{-[\pi,\pi]^n} f(x) u(x) e^{-ik\cdot x} dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{-[\pi,\pi]^n} f(x) e^{-i(k-m)\cdot x} dx \int_{[-\pi,\pi]^n} u(x) e^{-im\cdot x} dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{-[\pi,\pi]^n} f(x) e^{-i(k-m)\cdot x} dx \int_{[-\pi,\pi]^n} \hat{u}(m) dm \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{-[\pi,\pi]^n} \hat{f}(k-m) \hat{u}(m) dm \\
&= (\hat{f} * \hat{u})(k).
\end{aligned}$$

□

3.2. Distribuciones periódicas

Definición 3.2.1. Sea $\mathscr{P}'$ el conjunto de todos los funcionales lineales continuos en $\mathscr{P}$, es decir,

$$\mathscr{P}' = \{T : \mathscr{P} \to \mathbb{C} : \ T \text{ es lineal y } T(\varphi_j) \to 0, \text{ si } \varphi_j \to 0 \text{ en } \mathscr{P}\}.$$

Los elementos de $\mathscr{P}'$ son llamados **Distribuciones periódicas**.

Observación 5. Si $T \in \mathscr{P}'$ y $T : \varphi \to \mathbb{C}$ escribiremos

$$\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi).$$

Para comprobar que un funcional lineal $T : \mathscr{P} \to \mathbb{C}$ es continuo, es suficiente comprobar que

$$\varphi_j \to 0 \text{ en } \mathscr{P} \Longrightarrow T(\varphi_j) \to 0.$$

Lo cual se sigue inmediatamente de la linealidad de T.

Ejemplo 1. (Funciones como distribuciones) Si $u \in L^1(Q)$, donde $Q = [-\pi, \pi]^n$. Definimos $T_u : \mathscr{P} \to \mathbb{C}$ como sigue:

$$T_u(\varphi) := \int_Q u\varphi dx. \tag{3.7}$$

Entonces T_u es una distribución periódica.

Solución

Sean $\varphi,\ \phi \in \mathscr{P}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, por la linealidad de la integral se tiene

$$\begin{aligned} T_u(\alpha\varphi + \phi) &= \int_Q u(\alpha\varphi + \phi)dx \\ &= \int_Q u\alpha\varphi dx + \int_Q u\phi dx \\ &= \alpha T_u(\varphi) + T_u(\phi) \end{aligned}$$

De donde T_u es lineal, y si $\varphi_j \to 0$ en $\mathscr{P}$ entonces

$$|T_u(\varphi_j)| = \left|\int_Q u\varphi_j dx\right| \leq \int_Q |u\varphi_j| dx \leq \|u\|_{L^1} \|\varphi_j\|_{L^\infty} \to 0, \text{ cuando } j \to \infty.$$

Además, T_u es única. En efecto; sean $u_1, u_2 \in L^1(Q)$ y supongamos que $T_{u_1} = T_{u_2}$ entonces

$$\begin{aligned} &\int_Q u_1\varphi dx = \int_Q u_2\varphi dx \\ &\int_Q (u_1 - u_2)\varphi dx,\ \forall \varphi \in \mathscr{P}. \end{aligned}$$

Por tanto $u_1 = u_2$.

Para introducir algo de notación, definiremos la reflexión de $T \in \mathscr{P}'$ como la distribución $\tilde{T}$ dada por

$$\tilde{T}(\varphi) = T(\tilde{\varphi}), \tag{3.8}$$

la conjugación

$$\bar{T}(\varphi) = \overline{T(\bar{\varphi})}, \tag{3.9}$$

la translación

$$(\tau_{x_0} T)(\varphi) = T(\tau_{-x_0}\varphi), \tag{3.10}$$

la multiplicación

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi), \tag{3.11}$$

y la convolución

$$(T * v)(\varphi) = T(\tilde{v} * \varphi). \tag{3.12}$$

Definición 3.2.2. Para cualquier $T \in \mathscr{P}'$ se define la distribución $\partial^\alpha T$ por

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi).$$

La distribución $\partial^\alpha T$ es llamada la α-ésima derivada distributiva o derivada débil de T.

Teorema 3.2.1. (Operaciones sobre distribuciones) Si $f, v \in \mathscr{P}$, entonces las siguientes operaciones están bien definidas para distribuciones periódicas.

1. $\tilde{T}(\varphi) = T(\tilde{\varphi})$ (Reflexión)
2. $\bar{T}(\varphi) = \overline{T(\bar{\varphi})}$ (Conjugación)
3. $(\tau_{x_0} T)(\varphi) = T(\tau_{-x_0}\varphi)$ (Translación)
4. $(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi)$ (Derivada)
5. $(fT)(\varphi) = T(f\varphi)$ (Producto)
6. $(T * v)(\varphi) = T(\tilde{v} * \varphi)$ (Convolución).

Demostración. El resultado es inmediato. □

Observe que si $u \in \mathscr{P}$ es una función de prueba, los coeficientes de Fourier de u son dados por

$$\hat{u}(k) = (2\pi)^{-n} \int_Q u(x) e^{-ik\cdot x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Si T_u es la distribución correspondiente a u, se sigue que

$$\hat{u}(k) = (2\pi)^{-n} T_u \left(e^{-ik\cdot x}\right), \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.2.3. Si T es una distribución períodica, sus coeficientes de Fourier están definidos por

$$\hat{T}(k) := (2\pi)^{-n} T \left(e^{-ik\cdot x}\right), \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Denotamos por $\mathscr{F} : \mathscr{P}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ el mapeo (transformada de Fourier) que toma un elemento $T \in \mathscr{P}'$ a su sucesión de coeficientes de Fourier $(\hat{T}(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$.

Se dice que una sucesión compleja $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ tiene un crecimiento polinomial si existen $N > 0$ y $C > 0$ tal que

$$|a_k| \leq C\langle k\rangle^N, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Denotamos por $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ el conjunto de sucesiones con crecimiento polinómico.

Lema 3.2.2 (Cualquier distribución periódica tiene un orden finito)**.** Para cualquier $T \in \mathscr{P}'$, existen $N > 0$ y $C > 0$ tal que

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}.$$

Demostración. Razonemos por contradicción. Sea $T \in \mathscr{P}'$ y supongamos que para cualquier $N > 0$ existe $\varphi_N \in \mathscr{P}$ tal que

$$|T(\varphi_N)| > N \sum_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha \varphi_N\|_{L^\infty}.$$

Noté que, necesariamente $\varphi_N \neq 0$ y por tanto

$$0 < \|\varphi_N\|_{L^\infty} \leq \sum_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha \varphi_N\|_{L^\infty}.$$

Luego, defina

$$\psi_N := \frac{1}{N}\left(\sum_{|\alpha|\le N} \|\partial^\alpha \varphi_N\|_{L^\infty}\right)^{-1} \varphi_N.$$

Entonces $\psi_N \in \mathscr{P}$. Para cualquier $\beta \in \mathbb{N}^n$ fijo y $|\beta| \le N$ tenemos que

$$\left\|\partial^\beta \psi_N\right\|_{L^\infty} \le \sum_{|\beta|\le N} \left\|\partial^\beta \psi_N\right\|_{L^\infty} = \sum_{|\beta|\le N} \frac{\left\|\partial^\beta \varphi_N\right\|_{L^\infty}}{N\left(\sum_{|\alpha|\le N} \|\partial^\alpha \varphi_N\|_{L^\infty}\right)} = \frac{1}{N}.$$

De esta manera,

$$\left\|\partial^\beta \psi_N\right\|_{L^\infty} \le \frac{1}{N}, \quad \text{para } N \text{ suficientemente grande.}$$

Así, para cada β, $\partial^\beta \psi_N \to 0$ uniformemente cuando $N \to \infty$, lo cual muestra que $\psi_N \to 0$ en $\mathscr{P}$. Como T es un funcional lineal continuo tenemos que $T(\psi_N) \to 0$ cuando $N \to \infty$. Pero,

$$|T(\psi_N)| = \frac{|T(\varphi_N)|}{N\sum_{|\alpha|\le N} \|\partial^\alpha \varphi_N\|_{L^\infty}} \ge 1, \quad \text{para todo } N.$$

Por tanto $T(\psi_N) \nrightarrow 0$, lo cual es una contradicción. □

Teorema 3.2.3 (Serie de Fourier de distribuciones periódicas)**.** Los coeficientes de Fourier de cualquier distribución periódica son una sucesión de crecimiento polinomial, y reciprocamente cualquier sucesión de crecimiento polinomial surge como los coeficiente de Fourier de alguna distribución periódica. (Es decir, $\mathscr{F} : \mathscr{P}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^n)$ es un mapeo biyectivo.) Cualquier $T \in \mathscr{P}'$ se puede escribir como la serie de Fourier

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{T}(k)e^{ik\cdot x}$$

que converge en el sentido de distribuciones, lo que significa que

$$\lim_{N\to\infty} \langle \sum_{|k|\le N} \hat{T}(k)e^{ik\cdot x}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \quad \text{para todo } \varphi \in \mathscr{P}.$$

Demostración. Sea $T \in \mathscr{P}'$, entonces por el lema (3.2.2) existen $N > 0$ y $C > 0$ tal que

$$|T(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|\le N} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}.$$

Elijamos $\varphi(x) = e^{-ik\cdot x}$, luego tenemos que

$$\begin{aligned}\left|T\left(e^{-ik\cdot x}\right)\right| &\leq C\sum_{|\alpha|\leq N}\left\|\partial^{\alpha}e^{-ik\cdot x}\right\|_{L^{\infty}} = C\sum_{|\alpha|\leq N}\left\|(-i)^{|\alpha|}k^{|\alpha|}e^{-ik\cdot x}\right\|_{L^{\infty}}\\ &\leq C\sum_{|\alpha|\leq N}|k|^{|\alpha|} \leq C'\langle k\rangle^{N}.\end{aligned}$$

Por tanto, los coeficientes de Fourier de T forman una sucesión de crecimiento polinomial.

Reciprocamente, sea (a_k) una sucesión de crecimiento polinomial de modo que para algún entero $N > 0$

$$|a_k| \leq C\langle k\rangle^{2N}, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Sea s un entero con $2s > n$, y definamos

$$b_k := a_k\langle k\rangle^{-2N-2s}, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Luego, la serie $\sum_{|\alpha|\leq N}|b_k|$ converge por el lema (3.1.6). Por tanto podemos definir

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k e^{ik\cdot x}.$$

Está serie converge uniformemente por Weierstrass M-test, y f es continua por el teorema (2.3.2) dado que todos los términos en está serie son continuos. Así, f define un elemento $T_f \in \mathscr{P}'$, y de está manera podemos definir la distribución periódica

$$T := (1-\Delta)^{N+s}T_f.$$

Entonces T tendrá coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned}\hat{T}(k) &= (2\pi)^{-n}T\left(e^{-ik\cdot x}\right) = (2\pi)^{-n}T_f\left((1-\Delta)^{N+s}e^{-ik\cdot x}\right)\\ &= (2\pi)^{-n}T_f\left((1-\Delta)^{N}(1-\Delta)^{s}e^{-ik\cdot x}\right) = (2\pi)^{-n}T_f\left((1+k^2)^{N}(1+k^2)^{s}e^{-ik\cdot x}\right)\\ &= (2\pi)^{-n}T_f\left((1+k^2)^{\frac{2(N+s)}{2}}e^{-ik\cdot x}\right) = (2\pi)^{-n}T_f\left(\langle k\rangle^{2(N+s)}e^{-ik\cdot x}\right) = \langle k\rangle^{2N+2s}\hat{f}(k).\end{aligned}$$

Ahora, tomemos $\hat{f}(k) = b_k$ usando la teoría de L^2 de las series de Fourier, de esta manera

$$\hat{T}(k) = \langle k\rangle^{2N+2s}\hat{f}(k) = \langle k\rangle^{2N+2s}b_k = a_k.$$

Queda por mostrar que si $T \in \mathscr{P}'$, la serie de Fourier de T converge en el sentido de distribuciones. Para esto, fijé $\varphi \in \mathscr{P}$ y defina

$$\varphi_N := \sum_{|k| \leq N} \hat{\varphi}(k) e^{ik\cdot x}.$$

Por Teorema (3.1.7) tenemos que $\varphi_N \to \varphi$ en $\mathscr{P}$. De aquí, se sigue que

$$\langle \sum_{|k|\leq N} \hat{T}(k) e^{ik\cdot x}, \varphi \rangle = (2\pi)^n \sum_{|k|\leq N} \hat{T}(k)\hat{\varphi}(-k) = \sum_{|k|\leq N} T\left(e^{-ik\cdot x}\right)\hat{\varphi}(-k) = T(\varphi_N).$$

Como T es continua, entonces $T(\varphi_N) \to T(\varphi)$ cuando $N \to \infty$. Por lo tanto

$$\lim_{N\to\infty} \langle \sum_{|k|\leq N} \hat{T}(k) e^{ik\cdot x}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

$\square$

Teorema 3.2.4. Sean $f, v \in \mathscr{P}$. Entonces para todo $k, k_0 \in \mathbb{Z}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$; y todos los multi-índices α, la transformada de Fourier en $\mathscr{P}'$ tiene las siguientes propiedades.

1. $(\tau_{x_0} T)^\wedge(k) = e^{-ik\cdot x_0}\hat{T}(k)$ (Translación)

2. $(e^{ik_0\cdot x} T)^\wedge(k) = \tau_{k_0}\hat{T}(k)$ (Modulación)

3. $(D^\alpha T)^\wedge(k) = k^\alpha \hat{T}(k)$ (Derivada)

4. $(T * v)^\wedge(k) = \hat{T}(k)\hat{v}(k)$ (Convolución)

Demostración. 1. Sean $k \in \mathbb{Z}^n$ y $T \in \mathscr{P}'$. Luego por la definición (3.10) se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned}(\tau_{x_0} T)^\wedge(k) &= (2\pi)^{-n}(\tau_{x_0} T)\left(e^{-ik\cdot x}\right) = (2\pi)^{-n} T\left(\tau_{-x_0} e^{-ik\cdot x}\right) \\ &= (2\pi)^{-n} T\left(e^{-ik\cdot(x+x_0)}\right) = (2\pi)^{-n} T\left(e^{-ik\cdot x} e^{-ik\cdot x_0}\right) \\ &= e^{-ik\cdot x_0}(2\pi)^{-n} T\left(e^{-ik\cdot x}\right) = e^{-ik\cdot x_0}\hat{T}(k).\end{aligned}$$

2. Sean $k_0, k \in \mathbb{Z}^n$ y $T \in \mathscr{P}'$. Entonces

$$\begin{aligned}(e^{ik_0\cdot x} T)^\wedge(k) &= (2\pi)^{-n}\left(e^{ik_0\cdot x} T\right)\left(e^{-ik\cdot x}\right) = (2\pi)^{-n} T\left(e^{ik_0\cdot x - ik\cdot x}\right) \\ &= (2\pi)^{-n} T\left(e^{-ix\cdot(k-k_0)}\right) = \tau_{k_0}\hat{T}(k).\end{aligned}$$

3. Sean $k \in \mathbb{Z}^n$ y $T \in \mathscr{P}'$. Entonces por la linealidad de T se tiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
(D^\alpha T)^\wedge(k) &= (2\pi)^{-n}(D^\alpha T)\left(e^{-ik\cdot x}\right) = (2\pi)^{-n}(-1)^{|\alpha|}T\left(D^\alpha e^{-ik\cdot x}\right) \\
&= (2\pi)^{-n}(-1)^{|\alpha|}T\left((-ik)^{|\alpha|}e^{-ik\cdot x}\right) = (2\pi)^{-n}(-1)^{|\alpha|}(-ik)^{|\alpha|}T\left(e^{-ik\cdot x}\right) \\
&= (-1)^{|\alpha|}(-ik)^{|\alpha|}\hat{T}(k).
\end{aligned}$$

4. Sean $v \in \mathscr{P}$, $T \in \mathscr{P}'$ y $k \in \mathbb{Z}^n$. Luego, usando la definición (3.12) y haciendo el cambio de variable $w = y - x$, entonces por la linealidad de T se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
(T * v)^\wedge(k) &= (2\pi)^{-n}(T * v)\left(e^{-ik\cdot x}\right) = (2\pi)^{-n}T\left(\widetilde{v} * e^{-ik\cdot x}\right) \\
&= (2\pi)^{-n}T\left((2\pi)^{-n}\int_Q \widetilde{v}(x-y)e^{-ik\cdot y}dy\right) \\
&= (2\pi)^{-n}T\left((2\pi)^{-n}\int_Q v(y-x)e^{-ik\cdot y}dy\right) \\
&= (2\pi)^{-n}T\left((2\pi)^{-n}\int_Q v(w)e^{-ik\cdot(w+x)}dw\right) \\
&= (2\pi)^{-n}T\left((2\pi)^{-n}e^{-ik\cdot x}\int_Q v(w)e^{-ik\cdot w}dw\right) \\
&= (2\pi)^{-n}T\left(e^{-ik\cdot x}\hat{v}(k)\right) = (2\pi)^{-n}T\left(e^{-ik\cdot x}\right)\hat{v}(k) \\
&= \hat{T}(k)\hat{v}(k).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Espacios de Gevrey periódicos

En este capítulo construimos una definición de los espacios de Gevrey no homogeneos y mostramos algunas propiedades importantes usando el contenido de los capítulos 2 y 3.

4.1. Definición y propiedades

Una de las razones por las que los espacios de Gevrey son importantes es debido a que si los datos iniciales de alguna ecuación diferencial parcial (EDPs) pertenece al espacio $G^{1,\delta,s}$, lo que significa que son analíticas en la franja simétrica $\{z = x + iy : |y| < \delta\}$ al rededor de x en el plano complejo, en algunas ecuaciones se ha podido mostrar que existe un tiempo $T > 0$ tal que la correspondiente solución a esta EDPs es tambien analítica en la misma franja durante el período de tiempo $[0, T]$, esto significa que el radio uniforme de analiticidad espacial no se reduce cuando el tiempo pasa.

Tambien es importante resaltar que estos espacios son más grande que los espacios de Sobolev clásicos, lo cual facilita la busqueda de soluciones para ciertas EDPs relacionadas con la física.

Definición 4.1.1 (Funciones de Gevrey de orden s en Ω)**.** Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $s \geq 1$. Una función f es una función de Gevrey de orden s y escribiremos $f \in G^s(\Omega)$, si $f \in C^\infty(\Omega)$ y para cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$, existen dos constantes positivas A y C tales que, para todos los $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y todo $x \in K$ se cumple que

$$| \partial^\alpha f(x) | \leq AC^{|\alpha|}(\alpha!)^s.$$

Definición 4.1.2 (Espacios de Gevrey periódicos)**.** Para cualquier $s \in \mathbb{R}, \delta > 0$ y $\sigma \geq 1$, definimos el espacio de Gevrey periódico, denotado $G^{1,\delta,s}(\mathbb{T}^n)$, como el conjunto de las distribuciones periódicas cuya transfomada de Fourier es representable por una función y la norma

$$\|f\|^2_{G^{\sigma,\delta,s}(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|^2)^s e^{2\delta|k|^{1/\sigma}} |\widehat{f}(k)|^2$$

es finita. Donde

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ik\cdot x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

denota la transformada de Fourier periódica.

Definición 4.1.3 (Espacios de Sobolev)**.** Sea $s \in \mathbb{R}$. El espacio de Sobolev denotado por $H^s_{per} = H^s_{per}([-\pi,\pi])$ es el conjunto de todas las funcione periódicas tal que

$$\|f\|^2_s = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty,$$

donde $\widehat{f}(k)$ denota el k-ésimo coeficiente de Fourier el cual será definido mas adelante.

A continuación presentamos algunas propiedades de los espacios de Gevrey, la prueba de los siguientes teoremas es inédita.

Teorema 4.1.1. Sean $r, s, \delta, \sigma \in \mathbb{R}$ con $\sigma \neq 0$. Entonces

$$G^{\sigma,\delta,s} \hookrightarrow G^{\sigma,\delta,r}, \quad \text{si } s \geq r.$$

Demostración. Sea $s \geq r$, entonces $(1+|k|^2)^s \geq (1+|k|^2)^r$. Como $e^{2\delta|k|^{1/\sigma}} > 0$, se tiene

$$(1+|k|^2)^s e^{2\delta|k|^{1/\sigma}} \geq (1+|k|^2)^r e^{2\delta|k|^{1/\sigma}}.$$

Así que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|^2)^r e^{2\delta|k|^{1/\sigma}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|^2)^s e^{2\delta|k|^{1/\sigma}} |\hat{f}(k)|^2.$$

Por lo tanto

$$\|f\|_{G^{\sigma,\delta,r}(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{G^{\sigma,\delta,s}(\mathbb{T}^n)}.$$

$\square$

Teorema 4.1.2. Sean $s, \delta_1, \delta_2, \sigma \in \mathbb{R}$ con $\sigma \neq 0$ y $\delta_1 \geq \delta_2$. Entonces

$$G^{\sigma,\delta_1,s}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow G^{\sigma,\delta_2,s}(\mathbb{T}^n).$$

Demostración. Como $2\delta_1|k|^{1/\sigma} \geq 2\delta_2|k|^{1/\sigma}$, entonces

$$(1+|k|^2)^s e^{2\delta_1|k|^{1/\sigma}} \geq (1+|k|^2)^r e^{2\delta_2|k|^{1/\sigma}}.$$

Así

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|^2)^s e^{2\delta_2|k|^{1/\sigma}}|\hat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|^2)^s e^{2\delta_1|k|^{1/\sigma}}|\hat{f}(k)|^2.$$

Por lo tanto

$$\|f\|_{G^{\sigma,\delta_2,s}(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{G^{\sigma,\delta_1,s}(\mathbb{T}^n)}.$$

Lo que termina la prueba. $\square$

Teorema 4.1.3. Sean $s, \delta, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ con $\sigma_1, \sigma_2 \geq 1$ y $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Entonces

$$G^{\sigma_1,\delta,s}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow G^{\sigma_2,\delta,s}(\mathbb{T}^n).$$

Demostración. Dado que $\sigma_1, \sigma_2 \geq 1$, entonces $\frac{1}{\sigma_2} \leq \frac{1}{\sigma_1}$.

* Si $K = 0$, entonces $|k|^{1/\sigma_2} = |k|^{1/\sigma_1}$.

* Si $k \neq 0$, se tiene que $k \geq 1$. Luego $|k|^{1/\sigma_2} \leq |k|^{1/\sigma_1}$. Así

$$(1+|k|^2)^s e^{2\delta|k|^{1/\sigma_2}} \leq (1+|k|^2)^s e^{2\delta|k|^{1/\sigma_1}}.$$

De esta manera

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|^2)^s e^{2\delta|k|^{1/\sigma_2}}|\hat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|^2)^s e^{2\delta|k|^{1/\sigma_1}}|\hat{f}(k)|^2.$$

Por lo tanto

$$\|f\|_{G^{\sigma_2,\delta,s}(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{G^{\sigma_1,\delta,s}(\mathbb{T}^n)}.$$

$\square$

Antes de enunciar la última propiedad de los espacios de Gevrey periódicos, primero daremos una definición de los espacios de Sobolev.

Definición 4.1.4 (Espacios de Sobolev)**.** Sea $s \in \mathbb{R}$. El espacio de Sobolev denotado por $H^s_{per} = H^s_{per}([-\pi, \pi])$ es el conjunto de todas las funciones periódicas tal que

$$\|f\|_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty,$$

donde $\widehat{f}(k)$ denota la transformada de Fourier.

Teorema 4.1.4. Si $s > \frac{n}{2}$, $\delta \geq 0$ y $\sigma \geq 1$. Entonces

$$G^{\sigma,\delta,s}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow H^s_{per}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow C_{per}.$$

Demostración. Para $\delta \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{H^s_{per(\mathbb{T}^n)}} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^s |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^s \frac{e^{2\delta |k|^{1/\sigma}}}{e^{2\delta |k|^{1/\sigma}}} |\hat{f}(k)|^2 \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^s e^{2\delta |k|^{1/\sigma}} |\hat{f}(k)|^2 \\
&= \|f\|_{G^{\sigma,\delta,s}(\mathbb{T}^n)}.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\|f\|^2_{H^s_{per}(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{G^{\sigma,\delta,s}(\mathbb{T}^n)}. \tag{4.1}$$

Luego por el Teorema 3-195 Iorio [8] se tiene

$$H^s_{per}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow C_{per} \quad \text{si } s > \frac{n}{2}, \tag{4.2}$$

así (4.1) y (4.2) implican

$$G^{\sigma,\delta,s}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow H^s_{per}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow C_{per}, \quad \text{si } s > \frac{n}{2},\ \delta \geq 0.$$

Lo que termina la prueba. $\square$

Existen otras propiedades importantes periódicas en los espacios de Gevrey, las cuales requieren para su comprensión conocimientos avanzados del análisis armónico, lo cual es difícil de adquirir por un estudiante de pregrado. Por tal motivo en esta monografía se omiten tales resultados.

Bibliografía

[1] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*. 3rd ed. Springer, New York, 2014.

[2] E. DiBenedetto, *Real Analysis*. Birkhäusen Boston, 2002.

[3] J. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*. Addison- Wesley, Massachusetts, 1982.

[4] F. Jones, *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. Jones and Bartlett Publishers, United States of America, 2001.

[5] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*. 3rd ed. McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1987.

[6] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. J Wiley & Sons. Inc., United States of America, 1989.

[7] M. Salo, *Fourier analysis and distribution theory*. University of Jyväskilä, (2013).

[8] R. Iorio, V. Iorio, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2001.

[9] L. Rodino, *Linear partial differential operators in Gevrey spaces*. World Scientific Publishing Company, Singapore, 1993.

[10] J. Holmes, *Well-posedness and regularity of the generalized Burgers equation in periodic Gevrey spaces*, J. Math. Anal. No. 454. (2017), 18-40.

[11] J. Gorsky, A. Himonas, C. Holliman, G.Petronilho , *The Cauchy problem of a periodic higher order KdV equation in analytic Gevrey spaces*, J. Math. Anal. No. 405. (2013), 349-361.