

**UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA**

**TESIS DE MAESTRÍA**

---

**LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ  
FRACCIONARIA EN TIEMPO Y  
ESPACIO**

---

*Autor:*

**Willington Rafael Peralta López**

*Director:*

**Dr. Carlos Alberto BANQUET  
BRANGO**

*Codirector:*

**Juan Gabriel GALEANO DELGADO**



*Tesis enviada al Comité Curricular como requisito  
para optar al grado de Magíster en Matemáticas*

**Grupo de Investigación Matemáticas Unicórdoba  
Departamento de Matemáticas y Estadística**

**17 de enero de 2024**



**Derechos de copia ©**

**Por:**

**Willington Rafael Peralta López**

**17 de enero de 2024**

LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ FRACCIONARIA EN TIEMPO Y  
ESPACIO

Tesis de Maestría aprobada por:

Dr. Carlos Alberto Banquet Brango

---

**Director de Tesis**

Dr. Juan Gabriel Galeano Delgado

---

**Codirector de Tesis**

Dr. Edgardo Enrique Pérez Reyes

---

**Jurado de Tesis**

Dr. Carlos Alberto Reales Martínez

---

**Jurado de Tesis**

Dr. Ricardo Miguel Guzmán Navarro

---

**Jefe de departamento de Matemáticas y Estadística**

## Declaración de Autoría

Yo, **Willington Rafael Peralta López**, declaro que esta tesis titulada, « LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ FRACCIONARIA EN TIEMPO Y ESPACIO » y el trabajo presentado en ella son de nuestra autoría. Nosotros confirmamos que:

- Este trabajo se realizó total o principalmente mientras estábamos en la candidatura para un título de Maestría en Matemáticas en la Universidad de Córdoba. Si alguna parte de esta tesis ha sido presentada previamente para un título o cualquier otra titulación en esta Universidad o cualquier otra institución, esto ha sido claramente establecido. Cuando hemos consultado el trabajo publicado de otros, esto siempre se atribuye claramente. Donde hemos citado el trabajo de otros, la fuente siempre se ha dado. Con la excepción de tales citas, esta tesis es completamente nuestro propio trabajo. Reconocemos todas las principales fuentes de ayuda. Cuando la tesis se basa en el trabajo hecho por nosotros junto con otros, hemos dejado en claro exactamente la ayuda ofrecida y lo que nosotros hemos contribuido.

Firmado:

---

Fecha:

---

*«No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.»*

Nikolai Ivanovich Lobachevski ( Matemático Ruso , Profesor de la Universidad de Kazán)

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

## *Resumen*

Facultad de Ciencias Básicas

Departamento de Matemáticas y Estadística

### LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ FRACCIONARIA EN TIEMPO Y ESPACIO

Por Willington Rafael Peralta López

El propósito de este trabajo de investigación es el estudio del problema de valor inicial para la ecuación de Boussinesq fraccionaria en tiempo y espacio. Para el caso de las derivadas temporales se usa el abordaje de Caputo y las derivadas fraccionarias en espacio son definidas usando transformada de Fourier. Después de obtener una versión integro-diferencial de la ecuación de Boussinesq se obtienen resultados de buena colocación local o global en tiempo sobre espacios  $L^p$ -débiles.

La ecuación de Boussinesq se utiliza para modelar fenómenos físicos tales como la propagación de ondas dispersivas no lineales, lo cual es una razón más para estudiar este tipo de problemas.

**Palabras claves:** Cálculo fraccionario, ecuaciones diferenciales parciales no lineales, ecuación de Boussinesq, espacios  $L^p$ -débiles, funciones de Mittag-Leffler, derivada fraccionaria de Caputo, transformada de Fourier.



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

## *Abstract*

Facultad de Ciencias Básicas

Departamento de Matemáticas y Estadística

Magíster en Matemáticas

LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ FRACCIONARIA EN TIEMPO Y ESPACIO

By Willington Rafael Peralta López

The purpose of this research work is the study of the initial value problem for the fractional, in time and space, Boussinesq equation. For the case of time derivatives, the Caputo approach is used and the fractional derivatives in space are defined using the Fourier transform. After obtaining an integro-differential version of the Boussinesq equation, results were obtained for local or global well-posedness in time on  $L^p$ -weak spaces.

The Boussinesq equation is used to model physical phenomena such as nonlinear dispersive wave propagation, which is one more reason to study this type of problem.

**Keywords:** Fractional calculus, nonlinear partial differential equations, Boussinesq equation,  $L^p$ -weak spaces, Mittag-Leffler functions, Caputo fractional derivative, Fourier transform.



## *Agradecimientos*

El presente trabajo inicialmente me gustaría agradecerle a ti Dios por bendecirme para llegar hasta donde he llegado, porque hiciste realidad este sueño anhelado y por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad. A la UNIVERSIDAD DE CORDOBA por darme la oportunidad de estudiar y ser un profesional. Muchas Gracias a mi Director de tesis y profesor Dr. Carlos Alberto Banquet Brango por el tiempo dedicado a la preparación y revisión de este trabajo, por su esfuerzo y dedicación, quien con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación ha logrado en mí que pueda terminar mis estudios con éxito. También me gustaría agradecer a mis profesores durante toda mi carrera profesional porque todos han aportado con un granito de arena a mi formación. Les agradezco a mis padres Carmelo y Dilia por apoyarme en todo momento, y ser la voz de aliento en este proyecto de mi vida, por los valores que me han inculcado, por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir “Los amo con todo mi corazón”. A mis hermanos Liliana, Carmelo y Leila por ser parte de mi vida y representar la unidad familiar por llenar mi vida de alegrías y amor cuando más lo he necesitado. A mis hijos Michael de Jesús, Angel de Jesús y Luis Angel por ser parte significativa de mi vida, y por haber hecho el papel de una familia verdadera en todo momento, gracias por su apoyo, comprensión y sobre todo amistad. Los amo. A mis amigos, amigas y compañeros de estudio por confiar y creer en mí y haber hecho de mi etapa universitaria un trayecto de vivencias que nunca olvidare. Gracias.

Willington Rafael Peralta López.



# Índice general

<b>Declaración de Autoría</b>	<b>V</b>
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>XI</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>5</b>
1.1. Espacios $L^p$ . . . . .	5
1.2. Espacios $L^p$ débiles . . . . .	7
1.2.1. Función de distribución . . . . .	8
1.2.2. Reordenamiento decreciente . . . . .	13
1.2.3. Desigualdad de Hardy y Littlewood . . . . .	16
1.2.4. Función maximal . . . . .	16
1.2.5. El espacio de Lorentz . . . . .	17
1.3. Funciones de Mittag-Leffler . . . . .	18
<b>2. CÁLCULO FRACCIONARIO</b>	<b>22</b>
2.1. Algunos antecedentes . . . . .	22
2.2. La integral fraccionaria de Riemann-Liouville . . . . .	23
2.3. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville . . . . .	29
2.4. La Derivada Fraccionaria de Caputo . . . . .	32
<b>3. ECUACIÓN DE BOUSSINESQ FRACCIONARIA EN TIEMPO Y ESPACIO</b>	<b>38</b>
3.1. Estimativas de decaimiento temporal . . . . .	43
3.2. Estimativas de las no linealidades del sistema . . . . .	48

3.3. Solución local y global del sistema . . . . .	53
<b>4. CONCLUSIONES</b>	<b>59</b>
4.1. Conclusiones . . . . .	59
4.2. Trabajos futuros . . . . .	59
<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>

# Índice de figuras

1.1. Gráfica de $f$ y de $\mu_f$ . . . . .	10
1.2. Gráfica de $f^*$ . . . . .	14
1.3. Gráfica de $f$ y de $f^*$ . . . . .	15



# Lista de Símbolos

Símbolo	Nombre o significado
$\Gamma(\cdot)$	Función Gamma
$\operatorname{Re}(\cdot)$	Parte real de un complejo
$\operatorname{arg}(c)$	argumento de $c$
$\hat{f}, f^\wedge, \mathcal{F}(f)$	Transformada de Föurier de $f$
$f^\vee, \mathcal{F}^{-1}(f)$	Transformada de Föurier inversa de $f$
$\operatorname{supp} f$	Soporte de la función $f$
$\det A$	Determinante de la matriz $A$
$(X, \mathcal{A}, \mu)$	Espacio $\mu$ -medible $X$ o espacio de medida $X$
$L^p(X)$	Espacios $L^p$ , $\{f : \int_X  f ^p d\mu < \infty\}$
$\mathbb{R}^{m+n}$	Espacio vectorial $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$
$\mathcal{S}(X)$	Espacio de Schwartz
$\mathcal{S}'(X)$	Espacio de las distribuciones temperadas
$C^\infty(X)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables sobre $X$
$C_c^\infty(X)$	Espacio de funciones $C^\infty(X)$ con soporte compacto en $X$
$C_\infty^k(X)$	Espacio de funciones $C^k(X)$ y se anulan en el infinito
$\ \cdot\ _X$	Norma sobre el espacio vectorial normado $X$
$ \cdot $	Norma compleja o valor absoluto (depende del espacio de estudio)
$f * g$	Convolución de $f$ y $g$
$\bar{f}$	Conjugado de la función $f$

$$\mathbb{N}_0 \quad \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\mathbb{N}_0^n \quad \underbrace{\mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0}_{n\text{-veces}}$$

$$\Delta f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \quad \text{Laplaciano de la función } f$$

$$\chi_A \quad \text{Función característica sobre el conjunto } A$$

***Dedicatoria: A mi familia...***

*mis padres que los amo con  
todo mi corazon.*



# INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario constituye un campo del análisis matemático que actualmente está teniendo un gran auge en la Física, la Ingeniería, la Biología y la Economía. La integral y la derivada de orden fraccionario tienen aplicaciones en el modelamiento de sistemas físicos con capacidad de modelar fenómenos como problemas de difusión, viscoelasticidad, hidrodinámica, mecánica, biología, entre otros (ver Vargas [18]).

En este trabajo estudiamos la ecuación de Boussinesq, la cual se utiliza para modelar fenómenos físicos tales como la propagación de ondas dispersivas no lineales, lo cual es una razón más para estudiar este tipo de problemas.

La ecuación fraccionaria de Boussinesq es una variante de la clásica ecuación de Boussinesq que incluye derivadas fraccionarias en variables temporales y espaciales. Esta ecuación surge en el estudio de la propagación y difusión de ondas en medios complejos con comportamiento no local y dependiente de la memoria. Aquí hay algunas aplicaciones de la ecuación fraccionaria de Boussinesq en varios campos:

- **Propagación de ondas en medios no lineales:** La ecuación fraccionaria de Boussinesq se utiliza para modelar la propagación de ondas no lineales en medios con efectos de memoria. Esto puede incluir varios fenómenos físicos como ondas solitarias, ondas de choque dispersivas y otros patrones de ondas no lineales.

- **Propagación de ondas sísmicas:** en sismología, la ecuación fraccionaria de Boussinesq se puede emplear para describir la propagación de ondas sísmicas en medios heterogéneos con propiedades complejas. Esto es útil para comprender el comportamiento de las olas en regiones con diferentes estructuras del subsuelo.

- **Conducción de calor en medios fractales:** la ecuación fraccional de Boussinesq también se puede aplicar para describir la conducción de calor en materiales con propiedades fractales. Los medios fractales tienen estructuras similares a sí mismas

en varias escalas, y el cálculo fraccional permite una representación más precisa de la difusión de calor en dichos materiales.

- **Dinámica de fluidos y oceanografía:** las ecuaciones fraccionarias de Boussinesq encuentran aplicaciones en el estudio de la dinámica de fluidos y la oceanografía. Pueden describir el comportamiento de ondas largas en fluidos estratificados, incluidos los efectos de dispersión y memoria en la dinámica.

- **Sistemas biológicos:** se han propuesto modelos fraccionarios, incluida la ecuación fraccionaria de Boussinesq, para estudiar diversos fenómenos biológicos, como la migración celular, la dinámica de poblaciones y la difusión de moléculas en los tejidos. Estos modelos explican la naturaleza no local y dependiente de la memoria de ciertos procesos biológicos.

- **Fenómenos de transporte anómalos:** las ecuaciones fraccionarias se utilizan a menudo para modelar la difusión y el transporte anómalos en sistemas en los que los modelos de difusión tradicionales no logran capturar con precisión el comportamiento observado. La ecuación fraccionaria de Boussinesq se puede aplicar para describir estos fenómenos de transporte anómalos.

- **Ciencia de los materiales:** al estudiar materiales con microestructuras complejas, como materiales porosos o materiales compuestos, la ecuación fraccionaria de Boussinesq se puede emplear para modelar el transporte de calor u otras cantidades a través de estas estructuras complejas.

- **Hidrodinámica en medios porosos:** las ecuaciones fraccionarias de Boussinesq se utilizan para modelar el flujo de fluidos y la transferencia de calor en medios porosos, teniendo en cuenta los efectos no locales y de memoria que surgen debido a las geometrías complejas de los poros y canales.

- **Modelado de terremotos:** la ecuación fraccionaria de Boussinesq puede ser útil para modelar la dinámica de terremotos y las réplicas, teniendo en cuenta las interacciones no locales y los efectos de memoria que pueden desempeñar un papel en la actividad sísmica.

- **Óptica no lineal:** en el campo de la óptica no lineal, donde se estudia la propagación de la luz a través de medios complejos, la ecuación fraccionaria de Boussinesq puede proporcionar información sobre el comportamiento de las ondas ópticas

en materiales con respuestas no locales y dependientes de la memoria.

Estas aplicaciones demuestran la versatilidad de la ecuación fraccionaria de Bousinesq para describir una amplia gama de fenómenos físicos complejos en los que las ecuaciones diferenciales tradicionales pueden no capturar con precisión la compleja dinámica.

El proposito de nuestro trabajo de investigacion es obtener resultados de buena colocación local o global en espacios  $L^p$ -débiles para la ecuacion Boussinesq fraccionaria en tiempo y espacio, a saber,

$$\begin{cases} {}^c D_t^\delta u(x, t) + (-\Delta)^{\frac{d}{2}} u(x, t) + (-\Delta)^d u(x, t) = \gamma (-\Delta)^{\frac{d}{2}} f(u(x, t)), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Los espacios  $L^p$ -débiles son un caso particular de los espacios de Lorentz  $L^{(p,d)}$ , donde de estos últimos se definen como el conjunto de todas las funciones medibles  $f$  sobre  $\mathbb{R}^n$  tal que la cantidad

$$\|f\|_{(p,d)} = \begin{cases} \left( \frac{p}{d} \int_0^\infty \left[ t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right]^d \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{d}}, & \text{si } 1 < p < \infty, 1 \leq d < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & \text{si } 1 < p \leq \infty, d = \infty, \end{cases}$$

es finita. Aquí

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds, \quad f^*(t) = \inf\{s > 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > s\}) \leq t\}, \quad t > 0,$$

con  $\mu$  denotando la medida de Lebesgue. En particular,  $L^p(\Omega) = L^{p,p}(\Omega)$ , y cuando  $d = \infty$ ,  $L^{p,\infty}(\Omega)$  son llamados espacios  $L^p$ -débiles (ver Grafakos [7]).

Basado en algunas referencias, es sabido que incluso la teoría más básica de las ecuaciones fraccionarias está incompleta y existen muchos problemas abiertos e interesantes que abordar en esta área. Es por tal motivo, que en este trabajo me enfocare en dar respuestas a algunas preguntas pendientes en esta área relacionadas con el problema de buena colocación del problema asociado a la ecuación de Boussinesq fraccionaria en tiempo y espacio.



## Capítulo 1

# PRELIMINARES

En este capítulo se exponen algunas definiciones y resultados preliminares que facilitarán la lectura y comprensión del presente trabajo; inicialmente se introducen unos lemas auxiliares que ayudarán en las demostraciones de los resultados, y a continuación algunos teoremas necesarios en espacios  $L^p$ . Lo anterior será de gran ayuda en el capítulo 3, donde estudiaremos la ecuación de Boussinesq fraccionaria en tiempo y espacio en el marco de los espacios  $L^p$  débiles.

### 1.1. Espacios $L^p$

A continuación se presentan la definición de los espacios  $L^p$  y sus propiedades más importantes.

**Definición 1.1.** Sea  $f$  una función  $\mu$  – medible en  $X$ . Se dice que  $f$  es esencialmente acotada si existe un número  $M$  tal que  $0 \leq M < \infty$  y  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in X$

**Definición 1.2.**  $L^\infty(X, \mu, M)$  o  $L^\infty$  es la colección de todas las funciones esencialmente acotadas  $\mu$  – medibles en  $X$ . Además, la norma de una función  $f \in L^\infty$  es el número

$$\|f\|_\infty = \inf_{0 \leq M < \infty} \{|f(x)| \leq M \text{ para todo } x \in X\}$$

Considere ahora  $(X, \mu, M)$  un espacio de medida y  $0 \leq p < \infty$

**Definición 1.3.** Sea  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$  una función  $\mu$  – medible. Se dice que  $f \in L^p$  o  $f \in L^p(X, \mu, M)$  si

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

Si  $f \in L^p$ , la norma de  $f$  es el número

$$\|f\| := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

**Teorema 1.1 (Teorema de la Desigualdad de Young).** Sean  $p \in [1, \infty]$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  y  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  y  $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$

*Demostración.* Véase Amann y Escher, [1], pág. 164. □

**Teorema 1.2 (Teorema de interpolación Riesz-Thorin).** Sean  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  dos espacios de medida. Sea  $T$  un operador lineal definido en el conjunto de todas las funciones simples sobre  $X$  que toman valores en el conjunto de funciones medibles en  $Y$ . Además, sean  $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ , y suponga que

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}} \text{ y } \|T(f)\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}},$$

para todas las funciones simples  $f$  en  $X$ . Entonces para todo  $0 < \theta < 1$  tenemos

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p}$$

para todas las funciones simples en  $X$ , donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \text{ y } \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

*Demostración.* Véase Grafakos, [7], pág. 34. □

**Definición 1.4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una función  $T : X \rightarrow X$  es llamada una *contracción* sobre  $X$  si existe un número positivo  $\alpha < 1$  tal que para todo  $x, y \in X$

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

**Teorema 1.3 (Teorema de punto fijo de Banach).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $X \neq \emptyset$ . Suponga que  $X$  es completo y sea  $T : X \rightarrow X$  una contracción sobre  $X$ . Entonces  $T$  tiene un único punto fijo.

*Demostración.* Véase Kreyszig, [10], pág. 300. □

## 1.2. Espacios $L^p$ débiles

Los espacios  $L^p$  débiles también conocidos como espacios de Marcinkiewicz, son una clase de espacios de Lorentz  $L^{p,q}$  los cuales se definen a partir de la función distribución, que explica como se comporta una función  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) a medida que recorremos el rango de sus valores, es decir, que esta distribución mide el tamaño de los conjuntos  $\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$  de una función  $f$  a partir de una cierta altura, determinada por el parámetro  $\lambda > 0$ . Veamos la definición formal de dicha función de distribución y algunas de sus propiedades.

**Definición 1.5.** *Espacio totalmente  $\sigma$ -medible.*

Considere un espacio  $\mathcal{R}$  con medida  $\mu$  decimos que  $(\mathcal{R}, \mu)$  es totalmente  $\sigma$ -medible si existe una sucesión creciente  $\{\mathcal{R}_n\}_{n=1}^{\infty}$  de subconjuntos medibles de  $\mathcal{R}$  con medida finita cuya unión es todo  $\mathcal{R}$ .

Además

$$\mathcal{M}^+ = \{f : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty] / f \text{ es } \sigma\text{-medible}\}.$$

**Definición 1.6.** Una aplicación  $\rho : \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, \infty]$  se llama función norma o simplemente norma si, para toda  $f, g, f_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  en  $\mathcal{M}^+$ , para toda constante  $a \geq 0$ , y para todos los subconjuntos  $\sigma$ -sigma medibles  $E$  de  $\mathcal{R}$ , se cumplen las siguientes propiedades:

$$(i) \rho(f) = 0 \text{ si y solo si } f = 0, \mu\text{-c.t.p.};$$

$$\rho(af) = a\rho(f);$$

$$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g).$$

$$(ii) 0 \leq g \leq f, \mu\text{-c.t.p.} \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f).$$

$$(iii) 0 \leq f_n \uparrow f \mu\text{-c.t.p.} \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f).$$

$$(iv) \mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\mathcal{X}_E) < \infty$$

$$(v) \mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f(x) d\mu(x) \leq C_E \rho(f) \text{ para alguna constante } 0 < C_E < \infty, \\ \text{dependiendo de } E \text{ y } \rho, \text{ pero independiente de } f.$$

**Definición 1.7.** Sea  $\rho$  una función norma. La colección  $X = \mathcal{X}(\rho)$  de funciones  $f$  en  $\mathcal{M}$  para los cuales  $\rho(|f|) < \infty$  es llamado un **espacio de función Banach**. Para cada  $f \in X$  se

define

$$\|f\|_X = \rho(|f|)$$

**Definición 1.8.**  $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$  es el conjunto de funciones finitas  $\mu$ -c.t.p, es decir, si  $f \in \mathcal{M}_0$  el conjunto

$$F = \{x \in \mathcal{R} : f(x) = \infty\}$$

tiene medida 0.

### 1.2.1. Función de distribución

**Definición 1.9.** Sea  $f$  una función en  $\mathcal{M}_0$ . La función distribución de  $f$ , denotada  $\mu_f$ , viene dada por

$$\mu_f(\lambda) = \mu\{x \in X : |f(x)| > \lambda\},$$

para todo  $\lambda \geq 0$ . Note que  $\mu_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ .

Observe que  $\mu_f$  depende únicamente del valor absoluto  $|f|$  de la función  $f$  y puede asumir el valor de  $+\infty$ .

**Definición 1.10.** Sea  $(\mathcal{S}, \nu)$  un espacio completo de medida  $\sigma$ -finita. Se dice que dos funciones  $f \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$  y  $g \in \mathcal{M}_0(\mathcal{S}, \nu)$  son **equimedibles** si tienen la misma función de distribución, es decir, si  $\mu_f(\lambda) = \nu_g(\lambda)$  para todo  $\lambda \geq 0$ .

**Proposición 1.4 (Propiedades).** Supongamos que  $f, g$  y  $f_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) pertenecen a  $\mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$  y sea  $a$  cualquier escalar distinto de cero. La función de distribución  $\mu_f$  es una función no negativa, decreciente y continua a la derecha en  $[0, \infty)$ . Además

1.  $|g| \leq |f|$   $\mu$ -c.t.p, entonces  $\mu_g \leq \mu_f$ ;
2.  $\mu_{af}(\lambda) = \mu_f(\lambda/|a|)$ , ( $\lambda \geq 0$ );
3.  $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$  ( $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ );

4.  $|f| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|$   $\mu$ -c.t.p, entonces  $\mu_f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n}$ . En particular, si  $|f_n| \uparrow |f|$ , entonces  $\mu_{f_n} \uparrow \mu_f$ .

*Demostración.* Véase Lorentz, [16], pág. 45. □

**Ejemplo 1.5.** *Procedemos a calcular la función de distribución de una función simple no negativa  $f$ . Supongamos que*

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x), \quad (1.1)$$

donde  $E_j$  son conjuntos medibles de medida finita disjuntos dos a dos y  $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$ . Sea  $\lambda \in [0, \infty)$ . Entonces

- si  $\lambda > a_1$ , tenemos que  $\{x \in \mathcal{R} : |f(x)| < \lambda\} = \emptyset$  con lo que

$$\mu_f(\lambda) = 0;$$

- si  $a_1 > \lambda > a_2$ , tenemos que  $\{x \in \mathcal{R} : |f(x)| < \lambda\} = E_1$  con lo que

$$\mu_f(\lambda) = \mu(E_1);$$

- si  $a_2 > \lambda > a_3$ , tenemos que  $\{x \in \mathcal{R} : |f(x)| < \lambda\} = E_1 \cup E_2$ . luego

$$\mu_f(\lambda) = \mu(E_1) + \mu(E_2);$$

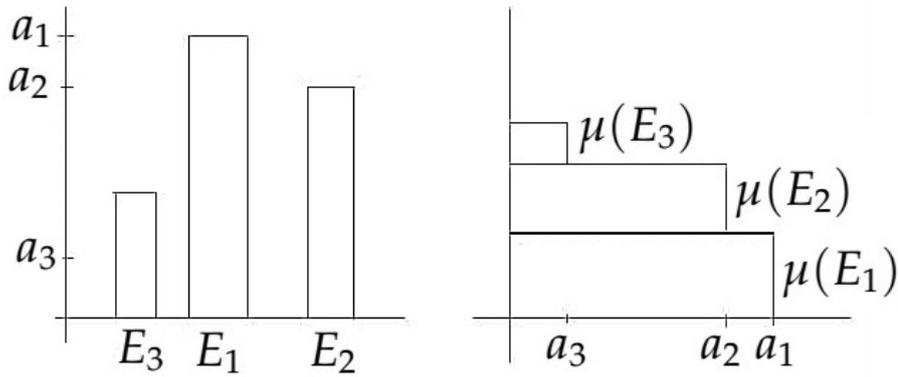
- en general, tenemos que  $\mu_f(\lambda) = \sum_{j=1}^n m_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(\lambda)$ , donde

$$m_j = \sum_{i=1}^j \mu(E_i), \quad (j = 1, \dots, n),$$

y  $a_{n+1} = 0$ .

En la Figura 1.1 en la izquierda está representada  $f$  y en la derecha  $\mu_f$ .

Ahora, a partir de la función distribución, veamos una primera definición de los espacios  $L^p$  débiles y algunas de sus propiedades.

FIGURA 1.1: Gráfica de  $f$  y de  $\mu_f$ 

**Definición 1.11.** Para  $1 \leq p < \infty$ , se define el espacio  $L^p(\mathcal{R}, \mu)$ -débil como el conjunto de todas las funciones  $f$   $\mu$ -medibles tales que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \inf \left\{ C > 0 : \mu_f(\lambda) \leq \frac{C^p}{\lambda^p} \text{ para todo } \lambda > 0 \right\} \quad (1.2)$$

$$= \sup \left\{ \gamma \mu_f^{\frac{1}{p}}(\gamma) : \gamma > 0 \right\} \quad (1.3)$$

es finito.

El espacio  $L^{\infty,\infty}(\mathcal{R}, \mu)$ -débil es por definición  $L^\infty(\mathcal{R}, \mu)$ .

Veamos que efectivamente (1.2) y (1.3) son iguales. Sean

$$a = \sup \left\{ \gamma \mu_f^{\frac{1}{p}}(\gamma) : \gamma > 0 \right\} \text{ y}$$

$$b = \inf \left\{ C > 0 : \mu_f(\lambda) \leq \frac{C^p}{\lambda^p} \text{ para todo } \lambda > 0 \right\}.$$

Veamos que  $a = b$ . En efecto, sea  $\gamma > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \gamma \mu_f^{\frac{1}{p}}(\gamma) \leq a &\implies \mu_f^{\frac{1}{p}}(\gamma) \leq \frac{a}{\gamma} \\ &\implies \mu_f(\gamma) \leq \frac{a^p}{\gamma^p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a \in \left\{ C > 0 : \mu_f(\lambda) \leq \frac{C^p}{\lambda^p} \text{ para todo } \lambda > 0 \right\}$$

así  $a \geq b$ . Por otro lado, sea

$$D \in \left\{ C > 0 : \mu_f(\lambda) \leq \frac{C^p}{\lambda^p} \text{ para todo } \lambda > 0 \right\},$$

es decir,  $D > 0$  y  $\mu_f(\lambda) \leq \frac{D^p}{\lambda^p}$ , con  $\lambda > 0$ . Entonces  $\lambda^p \mu_f(\lambda) \leq D^p$ ; en consecuencia,  $\lambda \mu_f^{\frac{1}{p}}(\lambda) \leq D$ . De lo cual se sigue que  $D$  es cota superior del conjunto

$$\left\{ \gamma \mu_f^{\frac{1}{p}}(\gamma) : \gamma > 0 \right\},$$

así

$$a = \sup \left\{ \gamma \mu_f^{\frac{1}{p}}(\gamma) : \gamma > 0 \right\} \leq D.$$

Dado que  $D$  se escogió de manera arbitraria en el conjunto

$$\left\{ C > 0 : \mu_f(\lambda) \leq \frac{C^p}{\lambda^p} \text{ para todo } \lambda > 0 \right\},$$

hemos demostrado que para todo

$$D \in \left\{ C > 0 : \mu_f(\lambda) \leq \frac{C^p}{\lambda^p} \text{ para todo } \lambda > 0 \right\},$$

se tiene que  $a \leq D$ , esto es,  $a$  es cota inferior de

$$\left\{ C > 0 : \mu_f(\lambda) \leq \frac{C^p}{\lambda^p} \text{ para todo } \lambda > 0 \right\},$$

Lo que prueba que  $a \leq b$ . Se concluye que  $a = b$ .

**Proposición 1.6.** Sea  $f$  y  $g$  funciones  $\mu$ -medibles sobre un espacio de medida  $(\mathcal{R}, \mu)$  y  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Entonces

1.  $\|kf\|_{L^{p,\infty}} = |k| \|f\|_{L^{p,\infty}}$ ;
2.  $\|f + g\|_{L^{p,\infty}} \leq C_p (\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}})$ , donde  $C_p = \max\{2, 2^{\frac{1}{p}}\}$ ;
3. Si  $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0$ , entonces  $f = 0$   $\mu$ -c.t.p.

*Demostración.* Véase Grafakos, [7], pág. 5. □

**Proposición 1.7.** Si  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in L^p(\mathcal{R}, \mu)$ , entonces  $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}$ , por lo tanto  $L^p(\mathcal{R}, \mu) \subseteq L^{p,\infty}(\mathcal{R}, \mu)$ .

*Demostración.* Véase Grafakos, [7], pág. 5. □

**Observación 1.1.** La inclusión  $L^p(\mathcal{R}, \mu) \subseteq L^{p,\infty}(\mathcal{R}, \mu)$  es estricta. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^n$  con la medida de Lebesgue, considere  $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ . Aplicando coordenadas polares se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|x|^{-\frac{n}{p}}\right)^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^n} dx \\ &= C_n \int_0^\infty \frac{1}{r^n} r^{n-1} dr = C_n \int_0^\infty \frac{1}{r} dr, \end{aligned}$$

la cual es divergente, por lo tanto  $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ . Por otro lado, para todo  $\alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned} \lambda^p \mu_f(\lambda) &= \lambda^p \mu \left( \left\{ x \in X : |x|^{-\frac{n}{p}} > \lambda \right\} \right) \\ &= \lambda^p \mu \left( \left\{ x \in X : |x| < \frac{1}{\lambda^{\frac{p}{n}}} \right\} \right) \\ &= \lambda^p v_n \frac{1}{\lambda^p} = v_n, \end{aligned}$$

donde  $v_n$  es la medida de la bola unitaria en  $\mathbb{R}^n$ . Por lo anterior,  $\|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ , es decir,  $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 1.8 (Desigualdad de Hölder en espacios  $L^p$  débiles).** Sea  $(X, \mu)$  un espacio de medida,  $f_j \in L^{p_j,\infty}(X, \mu)$ , donde  $1 \leq p_j \leq \infty$  y  $1 \leq j \leq k$ . Sea

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k}.$$

Entonces

$$\|f_1 \cdots f_k\|_{L^{p,\infty}} \leq p^{-\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^k p_j^{\frac{1}{p_j}} \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{L^{p_j,\infty}}.$$

*Demostración.* Véase Grafakos, [7], pág. 15. □

### 1.2.2. Reordenamiento decreciente

**Definición 1.12.** Supongamos que  $f$  pertenece a  $\mathcal{M}_0$ . El reordenamiento decreciente de  $f$  es la función  $f^*$  definida en  $[0, \infty)$  por

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\}, \quad (t \geq 0). \quad (1.4)$$

Observe que  $f^*$  depende únicamente del valor absoluto  $|f|$  de la función  $f$ . Observemos algunas consecuencias de la definición de  $f^*$ .

**Observación 1.2.** Si  $f$  y  $g$  pertenecen a  $\mathcal{M}_0$  y son equimedibles, entonces  $f^* = g^*$ .

**Observación 1.3.**  $f^*(t) = \sup\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) > t\} = m_{\mu_f}(t)$ , donde  $m$  es la medida de Lebesgue.

**Ejemplo 1.9.** a. Procedemos a calcular el reordenamiento decreciente de la función simple  $f$  dada en (1.1). Teniendo en cuenta (1.4) y la gráfica de  $\mu_f$  en la figura (1.1), vemos que  $f^*(t) = 0$  si  $t \geq m_3$ . También vemos que si  $m_3 > t \geq m_2$ , entonces  $f^*(t) = a_3$  y si  $m_2 > m_1$ , entonces  $f^*(t) = a_2$  y así sucesivamente. Por tanto,

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{[m_{j-1}, m_j)}(t), \quad t \geq 0,$$

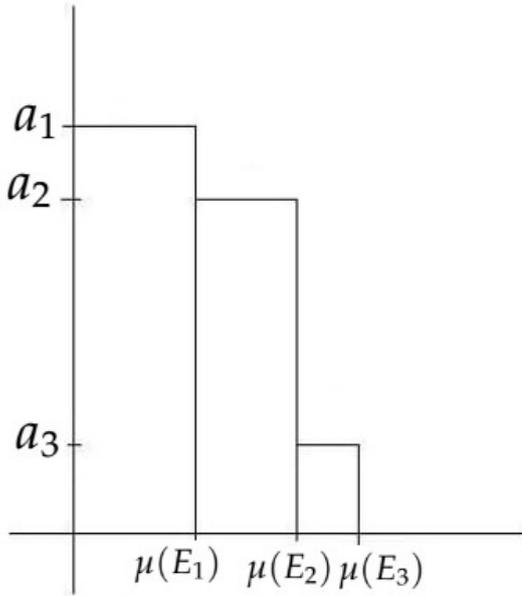
donde hemos tomado  $m_0 = 0$ .

Geoméricamente, simplemente estamos reordenando los bloques verticales en la gráfica de  $f$  en un orden decreciente para obtener el reordenamiento decreciente  $f^*$  (véase Figura 1.2).

b. A veces es más útil dividir la función  $f$  en bloques horizontales más que en verticales. Por lo tanto, la función simple  $f$  en (1.1) también se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{k=1}^n b_k \mathcal{X}_{F_k}(x),$$

donde los coeficientes  $b_k$  son positivos y los conjuntos  $F_k$  forman una sucesión creciente  $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n$  y cada uno de ellos tiene medida finita. En comparación con (1.1)

FIGURA 1.2: Gráfica de  $f^*$ 

obtenemos que

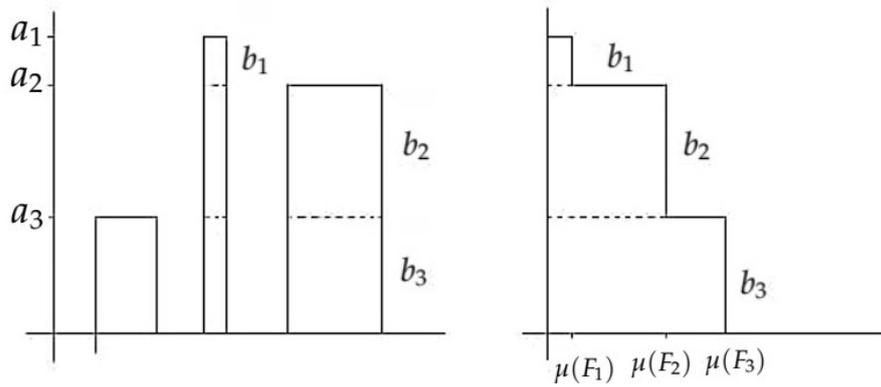
$$b_k = a_k - a_{k+1}, \quad F_k = \bigcup_{j=1}^k E_j \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n b_k \mathcal{X}_{F_k}(x) = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \mathcal{X}_{[\bigcup_{j=1}^k E_j]}(x) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \left( \sum_{j=1}^k \mathcal{X}_{E_j}(x) \right) \\ &= \mathcal{X}_{E_1}(x) \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) + \dots + \mathcal{X}_{E_k}(x) \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \\ &= \mathcal{X}_{E_1}(x) a_1 + \dots + \mathcal{X}_{E_k}(x) a_n \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j}(x) \end{aligned}$$

En este caso, el reordenamiento decreciente se ve que se forma deslizando los bloques en cada capa horizontal para formar un solo bloque más grande posicionado con su extremo izquierdo contra el eje vertical (ver figura). Por lo tanto,

$$f^*(x) = \sum_{k=1}^n b_k \mathcal{X}_{[0, \mu(F_k))}(x). \quad (1.5)$$

En la Figura 1.3 en la izquierda se encuentra la función  $f$  y en la derecha está  $f^*$

FIGURA 1.3: Gráfica de  $f$  y de  $f^*$ 

**Observación 1.4.** Si  $f$  es continua por la derecha y decreciente, entonces  $f = f^*$ .

**Proposición 1.10.** Supongamos que  $f, g$  y  $f_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) pertenecen a  $\mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$  y sea  $c$  a cualquier escalar distinto de cero. El reordenamiento decreciente  $f^*$  es una función no negativa, decreciente y continua a la derecha en  $[0, \infty)$ . Además

1.  $|g| \leq |f|$   $\mu$ -c.t.p, entonces  $g^* \leq f^*$ ;
2.  $(cf)^* = |c|f^*$ ;
3.  $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$  ( $t_1, t_2 \geq 0$ );
4.  $|f| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf |f_n|$   $\mu$ -c.t.p, entonces  $f^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n^*$ ; En particular, si  $|f_n| \uparrow |f|$ , entonces  $\mu_{f_n} \uparrow \mu_f$ .
5.  $f^*(\mu_f(\lambda)) \leq \lambda$  si  $\mu_f(\lambda) < \infty$  y  $\mu_f(f^*(t)) \leq t$  si  $f^*(t) < \infty$ ;
6.  $f$  y  $f^*$  son equimedibles;
7.  $(|f|^p)^* = (f^*)^p$  ( $0 < p < \infty$ ).

*Demostración.* Véase Lorentz, [16], pág. 50. □

La siguiente proposición nos describe las normas de  $L^p$  a través del reordenamiento decreciente y de la función de distribución. En particular muestra que las normas  $L^p$  de  $f$  y  $f^*$  coinciden.

**Proposición 1.11.** Sea  $f \in \mathcal{M}_0$ , si  $0 < p < \infty$ , entonces:

$$\int_{\mathcal{R}} |f|^p d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} d\lambda = \int_0^\infty (f^*)^p dm.$$

Además, en el caso  $p = \infty$ ,  $\sup_{x \in \mathcal{R}} |f(x)| = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\} = f^*(0)$ .

*Demostración.* Véase Lorentz, [16], pág. 51. □

### 1.2.3. Desigualdad de Hardy y Littlewood

Pese a que el reordenamiento decreciente no preserva necesariamente la suma o el producto de funciones, si que preserva algunas desigualdades donde están involucradas estas operaciones. Es lo que describiremos en el teorema de Hardy y Littlewood.

**Lema 1.** *Sea  $g$  una función simple no negativa de  $(\mathcal{R}, \mu)$  y sea  $E \subset \mathcal{R}$  medible. Entonces*

$$\int_{\mathcal{R}} g d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s) ds$$

*Demostración.* Véase Lorentz, [16], pág. 53. □

**Teorema 1.12 (Desigualdad Hardy-Littlewood).** *Sea  $f, g \in \mathcal{M}_0$ , entonces*

$$\int_{\mathcal{R}} |fg| d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(s) g^*(s) ds.$$

*Demostración.* Véase Lorentz, [16], pág. 53. □

**Definición 1.13.** *Un espacio  $\sigma$ -finito medible  $(\mathcal{R}, \mu)$ , es llamado **resonante**, si para cualquier  $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{R}, \mu)$ , se cumple la igualdad*

$$\int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t) dt = \sup \int_{\mathcal{R}} |f(x) \bar{g}(x)| d\mu(x),$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones  $\bar{g} \in \mathcal{R}$  equimedibles con  $g$ .

### 1.2.4. Función maximal

**Definición 1.14.** *Sea  $f_0 \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ , llamamos **función maximal** de  $f^*$  y denotamos con  $f^{**}$  a*

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

**Proposición 1.13.** Supongamos que  $f, g$  y  $f_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) pertenecen a  $\mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$  y sea a cualquier escalar distinto de cero. Entonces  $f^{**}$  es no negativa, decreciente y continua en  $(0, \infty)$ . Además

1.  $f^{**} = 0$  si y solo si  $f = 0$   $\mu$ -c.t.p;
2.  $f^* \leq f^{**}$ ;
3.  $|g| \leq |f|$   $\mu$ -c.t.p, entonces  $g^{**} \leq f^{**}$ ;
4.  $(af)^{**} = |a|f^{**}$ ;
5.  $|f_n| \uparrow |f|$   $\mu$ -c.t.p, entonces  $f_n^{**} \uparrow f^{**}$ .

*Demostración.* Véase Lorentz, [16], pág. 54. □

### 1.2.5. El espacio de Lorentz

**Definición 1.15.** Sea  $(\mathcal{R}, \mu)$  un espacio  $\sigma$ -finito medible, y suponga  $1 \leq p, q \leq \infty$ . El espacio de Lorentz  $L^{p,q}(\mathcal{R}, \mu)$  consta de todas las  $f \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$  para lo cual la igualdad

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left\{ \int_0^\infty \left[ t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}}, & (0 < q < \infty), \\ \sup_{0 < t < \infty} \left\{ t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right\} & (q = \infty), \end{cases} \quad (1.6)$$

es finita.

**Proposición 1.14.** Supongamos  $1 \leq p \leq \infty$  y  $1 \leq q \leq r \leq \infty$ . Entonces

$$\|f\|_{L^{p,r}} \leq C \|f\|_{L^{p,q}},$$

para todo  $f \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ , donde  $C$  es una constante que depende solo de  $p, q$  y  $r$ .

*Demostración.* Véase Lorentz, [16], pág. 61. □

### 1.3. Funciones de Mittag-Leffler

Las funciones de Mittag-Leffler son una generalización directa de la función exponencial  $e^x$ , y juegan un papel importante en el cálculo fraccionario. Las representaciones de uno y dos parámetros de la función Mittag-Leffler se puede definir en términos de una serie de potencias como en la definición siguiente.

En la siguiente definición  $\Gamma(\cdot)$  denota la función Gamma, definida como la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

la cual converge en la media derecha del plano complejo, es decir, para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Re}(z) > 0$ . Esta función generaliza el factorial  $n!$  y permite a  $n$  tomar valores no enteros e incluso complejos. Además satisface  $\Gamma(n+1) = n!$  También se define la función Beta por

$$B(z, w) = \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^{w-1} ds, \text{Re}(z) > 0, \text{Re}(w) > 0.$$

De aquí en adelante  $B(\cdot, \cdot)$  representa la función Beta, la cual satisface la siguiente relación

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \Gamma(z+w)B(z, w),$$

véase, C. Neto y P. Mendes., [13], Pág. 28.

**Lema 2.** *Suponga que  $1-x$  y  $1-y$  son números positivos. Entonces*

$$\int_0^t (t-s)^{-x} s^{-y} = t^{1-x-y} B(1-x, 1-y),$$

donde  $B(x, y) = \int_0^1 (1-s)^{x-1} s^{y-1} ds$  es la función Beta.

*Demostración.* Véase Banquet, Ferreira y Villamizar-Roa [2]. □

**Definición 1.16.** Sean  $\alpha, \beta$  números complejos. La **Función de Mittag-Leffler**,  $E_{\alpha, \beta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , se define como:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

1. si  $\beta = 1$

$$E_{\alpha}(z) = E_{\alpha, 1}(z).$$

2. Si  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$

$$E_{0, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(0 + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

3. Si  $\alpha = \beta = 1$

$$E_{1, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

4. Si  $\alpha = 1$  y  $\beta = 2$

$$\begin{aligned} E_{1, 2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k + 1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k + 1)!} = \frac{1}{z} \left( \frac{z^0}{0!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k + 1)!} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{z} \left( \frac{z^0}{0!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} - 1 \right) \text{ cambio de variable } m = k + 1 \\ &= \frac{1}{z} (e^z - 1) = \frac{e^z - 1}{z}. \end{aligned}$$

5. Si  $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$

$$E_{2, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{z})^k}{2k!} = \cosh(\sqrt{z}).$$

6. Si  $\alpha = \beta = 2$

$$E_{2, 2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2)^k}{\Gamma(2k + 2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k + 1)!} = \frac{1}{z} \sinh(z).$$

7. Si  $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$

$$E_{2,1}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2k!} = \cos(z).$$

A continuación veremos una relación de recurrencia de  $E_{\alpha,\beta}(z)$ . Para esto, veamos que  $E_{\alpha,\beta}(z) = zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{\Gamma(\alpha(n+1) + \beta)}; \quad k = n+1 \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{\Gamma(n\alpha + \alpha + \beta)} = \frac{z^0}{\Gamma(\beta)} + z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \alpha + \beta)} \\ &= zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

**Teorema 1.15.** Si  $\operatorname{Re}(\beta) > 1$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ , entonces

$$\frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha z} [E_{\alpha,\beta-1}(z) - (\beta-1)E_{\alpha,\beta}(z)].$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta}(z) &= \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta - 1 + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{(\alpha k + \beta - 1)\Gamma(\alpha k + \beta - 1)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha \left( k - \frac{\beta-1}{\alpha} + \frac{\beta-1}{\alpha} \right) z^{k-1}}{(\alpha k + \beta - 1)\Gamma(\alpha k + \beta - 1)}, \quad \operatorname{Re}(\beta) > 1 \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k + \beta - 1 - (\beta-1))z^{k-1}}{(\alpha k + \beta - 1)\Gamma(\alpha k + \beta - 1)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k + \beta - 1)z^{k-1}}{(\alpha k + \beta - 1)\Gamma(\alpha k + \beta - 1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta-1)z^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta - 1 + 1)} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha z} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta - 1)} - (\beta-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha z} [E_{\alpha,\beta-1}(z) - (\beta-1)E_{\alpha,\beta}(z)]. \end{aligned}$$

□

El siguiente Teorema nos permitirá establecer algunas estimativas de decaimiento para ciertos operadores a formulación blanda de la ecuación de Boussinesq.

**Teorema 1.16.** Sea  $\alpha < 2$ ,  $\beta$  un número real arbitrario y  $\pi\alpha/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$ .

Entonces existe  $C > 0$  tal que,

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}, \quad (\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi), \quad |z| \geq 0.$$

*Demostración.* Véase Podlubny, [14], pág. 35.

□

## Capítulo 2

# CÁLCULO FRACCIONARIO

El objetivo de este capítulo es establecer parte de la terminología y notación que usaremos a lo largo de este trabajo. Para ello presentamos algunos conceptos y resultados básicos acerca de la integral y la derivada fraccionaria.

### 2.1. Algunos antecedentes

Los primeros indicios del cálculo fraccionario aparecen hacia finales del siglo XVII alrededor de algunos comentarios de L'Hôpital respecto al valor de  $n$  en la notación  $\frac{d^n y}{dx^n}$  establecida por Leibniz. En 1738 Leonhard Euler le encontraría sentido a esta notación cuando  $n$  no es entero, aclarando que si bien la razón diferencial para el caso entero se calcula por diferenciación continua, se puede dar sentido al caso fraccionario por los métodos de interpolación, muy en boga por esta época. Después de ochenta años, S. F. Lacroix retoma el problema de las derivadas fraccionarias, encontrando una fórmula para el cálculo de  $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^\alpha$ .

La integrodiferenciación fraccionaria es un campo del análisis matemático que actualmente está teniendo un gran auge en la física, la ingeniería y la economía. La integral y la derivada de orden no entero tienen aplicaciones en el modelamiento de sistemas físicos con capacidad de modelar fenómenos con memoria como problemas de difusión, viscoelasticidad, movimiento Browniano, hidrodinámica, mecánica, biología, teoría de señales, fenómenos fractales, control automático, entre otros.

La idea de usar órdenes fraccionarios en diferenciación e integración proviene del siglo XVII. Durante los siglos XVIII y XIX se dieron pocos desarrollos tanto teóricos como aplicados. Sin embargo, es a partir de 1974 que el cálculo fraccionario

empieza a tomar importancia como campo de investigación en matemáticas. En este año B. Ross organiza la primera conferencia de Cálculo Fraccionario y sus aplicaciones en la universidad de New Haven. Las memorias de este evento [15], editadas por el mismo Ross, en conjunto con la primera monografía escrita por Oldham y Spanier [Oldham], se convirtieron en una fuente importante de trabajos en el campo del cálculo fraccionario y sus aplicaciones. Entre los innumerables trabajos teóricos y de aplicaciones es conveniente resaltar los resultados de Caputo y Gorenflo. Además las ecuaciones fraccionarias pueden modelar curvas muy complejas que están totalmente fuera del alcance de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El impacto que ha tenido el estudio de los operadores de integración y diferenciación de orden fraccionario se hace evidente en la gran cantidad de artículos publicados en los últimos años. La derivada fraccionaria generaliza la derivación e integración usuales, incorporando órdenes no enteros.

## 2.2. La integral fraccionaria de Riemann-Liouville

Sean  $X$  un espacio de Banach,  $b \in (0, \infty)$  y  $f \in L^1([a, b])$ . Definimos para  $t \in [a, b]$  la función

$$I_a^1 f(t) = \int_a^t f(s) ds$$

La cual se cumple que:  $I_a^1 f(a) = 0$ .

Definiendo  $I_a^2 f(t) = I_a^1 (I_a^1 f)(t)$  y aplicando el Teorema de Fubini se tiene

$$\begin{aligned} I_a^2 f(t) &= \int_a^t \int_a^s f(r) dr ds \\ &= \int_a^t \int_r^t f(r) ds dr \\ &= \int_a^t (t-r) f(r) dr. \end{aligned}$$

De forma similar podemos comprobar que

$$\begin{aligned} I_a^3 f(t) &= \frac{1}{2} \int_a^t (t-r)^2 f(r) dr \\ &= \int_a^t \int_a^r \int_a^s f(x) dx dr ds. \end{aligned}$$

Esta fórmula se puede generalizar para  $n \in \mathbb{Z}^+$  obteniéndose la  $n$ -ésima integral de la función  $f$  como se indica a continuación.

**Teorema 2.1.** *Sea  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $f \in L^1([a, b])$ . La  $n$ -ésima integral de la función  $f$  está dada por*

$$I_a^n f(t) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-r)^{n-1} f(r) dr, \quad t > a, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.1)$$

*Demostración.* Hagamos inducción sobre  $n$ . Los casos  $n = 1$  y  $n = 2$  ya están demostrados. Suponamos que se tiene el resultado para  $n = k$  y demostremos que se cumple para  $n = k + 1$ . Aplicaremos el Teorema de Fubini y las propiedades de la función Gamma.

$$\begin{aligned} I_a^{k+1} f(t) &= \int_a^t \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t (s-r)^{k-1} f(r) dr ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t \int_r^t (s-r)^{k-1} f(r) ds dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t f(r) \left[ \int_r^t (s-r)^{k-1} ds \right] dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t \frac{(t-r)^k}{k} f(r) dr \\ &= \frac{1}{k\Gamma(k)} \int_a^t (t-r)^k f(r) dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_a^t (t-r)^{(k-1)+1} f(r) dr. \end{aligned}$$

□

El resultado anterior nos da una pista para entender una forma de definir la generalización de (2.1), la cual se da a continuación.

**Definición 2.1.** Sea  $f \in L^1(0, b, X)$ ,  $b > 0$  y  $X$  un espacio de Banach, la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden  $\alpha \in (0, 1)$  de  $f$  se define por

$$I_a^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \in [0, b].$$

**Definición 2.2.** Sea  $\alpha > 0$  y consideremos la función  $g_\alpha : \longrightarrow [0, \infty)$  dada por

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde  $\Gamma$  es la función Gamma.

**Observación 2.1.** Note que con base en la definición 2.2 podemos escribir la integral de orden  $\alpha$  de la función  $f$  como la convolución:

$$I_a^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t g_\alpha(t-s) f(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Si  $\alpha = 0$  tenemos que  $I_t^0 f = f$ .

**Ejemplo 2.2.** La integral fraccionaria de la función  $f(t) = t^\gamma$  está dada por

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} t^{\gamma+\alpha}, \quad \gamma > -1, \alpha > 0.$$

En efecto demostrando ,y haciendo la sustitución  $u = \frac{s}{t}$  tenemos que:

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\gamma ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha+\gamma} u^\gamma (1-u)^{\alpha-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+\gamma} B(\alpha, \gamma+1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+\gamma} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma} \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.3.** Calcula la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de  $f(x) = x^2$  con  $a = 0$  y  $\alpha = \frac{1}{2}$

Sabemos que por definicion de integral fraccionaria de Riemann- Liouville tenemos

$$I_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

$$I_0^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} t^2 dt$$

$$I_0^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^2 dt$$

Hagamos  $u = \frac{t}{x}$ , notemos que:

$$(x-t)^{-\frac{1}{2}} = (x(1-\frac{t}{x}))^{-\frac{1}{2}} = (x)^{-\frac{1}{2}} (1-\frac{t}{x})^{-\frac{1}{2}}$$

$$du = \frac{dt}{x} \text{ (o bien ) } dt = xdu \text{ , ademas } t = 0, \text{ entonces } u = 0$$

si  $t = x$ , entonces  $u = 1$  aqui  $t = xu$  , entonces:

$$I_0^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} (xu)^2 x du$$

$$I_0^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{5}{2}} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^2 du$$

$$I_0^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{5}{2}} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-1} u^{3-1} du$$

$$I_0^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{5}{2}} B(3, \frac{1}{2})$$

Usando la funcion beta  $B(p, q) = \int_0^1 (1-t)^{q-1} t^{p-1} dt$

Donde  $p, q > 0$  y ademas

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

Por lo tanto:

$$I_0^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{5}{2}} \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3 + \frac{1}{2})}$$

$$I_0^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{16x^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}}$$

Nota

Sabemos que la integral fraccionaria de Riemann -Liouville esta dada por la función

$f(x) = x^\gamma$  está dada por:

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

Haciendo los cambios de variables, las sustituciones y usando la función Beta tenemos

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\gamma} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\gamma du$$

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}$$

Así, la integral fraccionaria de Riemann-Liouville esta dada por la función  $f(x) = x^2$  con  $a=0$  y  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

De lo anterior se tiene:

$$I_0^\alpha x^2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\frac{1}{2}+2} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-1} u^2 du$$

$$I_0^\alpha x^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+2+1)} x^{\frac{1}{2}+2}$$

Por lo tanto:

$$I_0^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{16x^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}}$$

**Ejemplo 2.4.** Calcula la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de una función polinómica  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$  con  $a = 0$  y  $\alpha = \frac{2}{3}$ :

$$\begin{aligned}
I_0^{\frac{2}{3}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\gamma} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\gamma du + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\gamma} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\gamma du + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\gamma} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\gamma du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} x^{\frac{2}{3}+3} \int_0^1 (1-u)^{\frac{2}{3}-1} u^3 du + \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} x^{\frac{2}{3}+2} \int_0^1 (1-u)^{\frac{2}{3}-1} 2u^2 du + \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} x^{\frac{2}{3}+0} \int_0^1 (1-u)^{\frac{2}{3}-1} u^0 du \\
&= \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(\frac{2}{3}+3+1)} x^{\frac{2}{3}+3} + \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(\frac{2}{3}+2+1)} x^{\frac{2}{3}+2} + \frac{2\Gamma(0+1)}{\Gamma(\frac{2}{3}+0+1)} x^{\frac{2}{3}+0} \\
&= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{14}{3})} x^{\frac{11}{3}} + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{11}{3})} x^{\frac{8}{3}} + \frac{2\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{5}{3})} x^{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{6}{\Gamma(\frac{14}{3})} x^{\frac{11}{3}} + \frac{2}{\Gamma(\frac{11}{3})} x^{\frac{8}{3}} + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{3})} x^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

**Lema 3.** Sean  $\alpha, \beta > 0$  y considere  $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ . Entonces

$$g_\alpha * g_\beta(t) = g_{\alpha+\beta}(t), \quad t > 0.$$

*Demostración.* Si  $t > 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
g_\alpha * g_\beta(t) &= \int_0^t g_\alpha(t-s) g_\beta(s) ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-s)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} s^{\beta-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds.
\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución  $s = t\zeta$ , tenemos que  $ds = t d\zeta$ , de donde  $t - s = t - t\zeta = t(1 - \zeta)$ . Cuando  $s = 0$ ,  $\zeta = 0$ , y si  $s = t$ , entonces  $\zeta = 1$ . Luego,

$$\begin{aligned} g_\alpha * g_\beta(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 [t(1 - \zeta)]^{\alpha-1} (t\zeta)^{\beta-1} t d\zeta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha+\beta-1} (1 - \zeta)^{\alpha-1} \zeta^{\beta-1} d\zeta \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1 - \zeta)^{\alpha-1} \zeta^{\beta-1} d\zeta. \end{aligned}$$

Recordemos que

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 s^{z_1-1} (1 - s)^{z_2-1} ds,$$

se sigue que

$$g_\alpha * g_\beta(t) = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\beta, \alpha).$$

De la relación

$$\Gamma(z_1)\Gamma(z_2) = \Gamma(z_1 + z_2)B(z_1, z_2),$$

tenemos

$$B(\beta, \alpha) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

de lo cual se sigue que

$$g_\alpha * g_\beta(t) = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha + \beta)} = g_{\alpha+\beta}(t).$$

□

## 2.3. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

A partir de la definición de integral de orden fraccionario se define la derivada de orden  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) de  $f$  en el sentido de Riemann-Liouville, teniendo en cuenta que

esta definición coincide con el caso donde  $\alpha$  es un número natural y que además se conserven algunas propiedades clásicas de la derivada. Si consideramos  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $D^n$  denota el operador diferencial de orden  $n$ , entonces considerando (2.1) y usando inducción se puede demostrar que

$$I_a^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0.$$

Observemos que en general,

$$I_a^n D^n \neq I, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

donde  $I$  representa el operador identidad. Más aún,  $I_a^n D^n = I$  si y sólo si,  $f^{(k)}(0) = 0$  para  $k = 0, \dots, n-1$ . Sin embargo,

$$D^n (I_a^n f(t)) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds = \frac{d}{dt} \int_a^t f(s) ds = f(t),$$

es decir,  $D^n I_a^n = I$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ . A partir de estas consideraciones se define la derivada fraccionaria de orden  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  como el operador inverso a izquierda del operador fraccionario  $I_a^\alpha$ .

**Definición 2.3.** Sea  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $b > 0$  y  $f \in L^1(0, b; X)$  con  $f * g_{1-\alpha} \in W^{1,1}(0, b; X)$ . Siendo  $X$  un espacio de Banach, se define la derivada fraccionaria de Riemann-liouville de orden  $\alpha$ , denota como  $D_a^\alpha f(t)$ , por

$$D_a^\alpha := D_a^1 I_a^{1-\alpha} f(t) = D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds$$

**Observación 2.2.** Nótese que si  $\alpha$  es un número entero positivo entonces, la definición anterior coincide con la derivada de orden entero. En efecto, si  $\alpha = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$  y  $a > 0$ , tenemos que

$$D_a^\alpha f(t) = D_a^k f(t) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} I_a^{k+1-k} f(t) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} I_a^1 f(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}.$$

**Ejemplo 2.5.** Sea  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\beta \in (-1, \infty)$  y considere la función  $f(t) = ct^\beta$ . Entonces la integral fraccionaria está dada por

$$I_a^\alpha f(t) = c \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)} t^{\beta + \alpha}$$

Si calculamos la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, haciendo el cambio de variable  $u = \frac{s}{t}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} f(s) ds \\ &= \frac{c}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} s^\beta ds \\ &= \frac{c}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t(1 - u))^{-\alpha} (ut)^\beta t du \\ &= \frac{c}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} t^{-\alpha + \beta + 1} \int_0^1 (1 - u)^{-\alpha} (u)^\beta du \\ &= \frac{c(-\alpha + \beta + 1)t^{-\alpha + \beta}}{\Gamma(1 - \alpha)} B(\beta + 1, 1 - \alpha) \text{ donde } \beta + 1 > 0, 1 - \alpha > 0 \\ &= (-\alpha + \beta + 1) \frac{ct^{-\alpha + \beta}}{\Gamma(1 - \alpha)} B(\beta + 1, 1 - \alpha) \\ &= (-\alpha + \beta + 1) \frac{ct^{-\alpha + \beta}}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\beta - \alpha + 2)} \\ &= (-\alpha + \beta + 1) ct^{-\alpha + \beta} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 2)} \end{aligned}$$

**Observación 2.3.** Del ejemplo anterior tenemos que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función constante esta dado por

$$D_a^\alpha c = (-\alpha + \beta + 1) ct^{-\alpha + \beta} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 2)}.$$

Note que si consideramos  $t^\beta = 1$ , tenemos que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función constante es dada por

$$D_a^\alpha c = c \frac{(1 - \alpha)}{\Gamma(2 - \alpha)} t^{-\alpha}$$

la cual es diferente de cero. Además, al calcular la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

de una función general, no podemos esperar un comportamiento no singular en cero. Entonces para evitar estas dificultades, adoptamos el concepto de derivada fraccionaria de Caputo, que representa una especie de regularización en el origen temporal de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y satisface la propiedad relevante de ser cero cuando se aplica a una constante.

La última observación y otras razones principalmente físicas y prácticas llevaron a la definición de Caputo.

**Ejemplo 2.6.** Calculemos la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función polinomial  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$  con  $a = 0$  y  $\alpha = \frac{2}{3}$ :

Sabemos que

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt$$

Haciendo los cambios de variables, sustituciones y usando la función beta, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville para una función dada nos queda:

$$D_a^\alpha f(x) = (-\alpha + \beta + 1)x^{-\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}.$$

Entonces:

$$D_a^{\frac{2}{3}}(x^3 + 2x^2 + 1) = \left(\frac{10}{3}\right)x^{\frac{7}{3}} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{13}{3})} + \left(\frac{7}{3}\right)x^{\frac{4}{3}} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{10}{3})} + \left(\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{4}{3})}$$

## 2.4. La Derivada Fraccionaria de Caputo

El modelo matemático de ciertos problemas hace necesario considerar ecuaciones diferenciales con derivadas de orden fraccionario junto a condiciones iniciales. Sin embargo la definición de Riemann-Liouville no es suficiente para dar salida a esta necesidad pues, en este caso las condiciones iniciales correspondientes no tienen

una interpretación física. Para resolver este problema consideremos una definición alternativa de derivada fraccionaria debida a Caputo (ver Tasbozan [17] y Caputo [4]) Tal definición permite plantear problemas con condiciones iniciales asociados a ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Consideremos la siguiente definición con algunas propiedades.

**Definición 2.4.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que la  $(m - 1)$ -derivada de  $f$  es absolutamente continua en  $[a, b]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  y  $m \in \mathbb{Z}$  tales que  $m - 1 < \alpha < m$ . Se define la **derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$**  denotada por  ${}^c D_a^\alpha f(t)$  como

$${}^c D_a^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(s)}{(t - s)^{\alpha+1-m}} ds$$

Aquí  $f^{(m)}$  denota la  $m$ -ésima derivada de la función  $f$ .

**Ejemplo 2.7.** Calcular la derivada fraccionaria de caputo de una función radical  $f(t) = \sqrt{t}$  con  $a = 0$  y  $\alpha = \frac{3}{4}$ :

$${}^c D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(s)}{(t - s)^{\alpha+1-m}} ds$$

$${}^c D_*^{\frac{3}{4}} \sqrt{t} = \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{3}{4})} \int_0^t \frac{(\sqrt{s})^{(1)}}{(t - s)^{\frac{3}{4}+1-1}} ds$$

$${}^c D_*^{\frac{3}{4}} \sqrt{t} = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^t \frac{(s)^{-\frac{1}{2}}}{(t - s)^{\frac{3}{4}}} ds$$

$${}^c D_*^{\frac{3}{4}} \sqrt{t} = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^t \frac{ds}{(t - s)^{\frac{3}{4}}(s)^{\frac{1}{2}}}$$

Hagamos  $u = \frac{s}{t}$ , notemos que:

$$(t - s)^{\frac{3}{4}} = (t(1 - \frac{s}{t}))^{\frac{3}{4}} = (t)^{\frac{3}{4}}(1 - \frac{s}{t})^{\frac{3}{4}}$$

$$du = \frac{ds}{t} \text{ (o bien) } ds = t du, \text{ ademas } s = 0, \text{ entonces } u = 0$$

si  $s = t$ , entonces  $u = 1$  aqui  $s = tu$ , entonces:

$${}^c D_*^{\frac{3}{4}} \sqrt{t} = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^1 \frac{t du}{(t)^{\frac{3}{4}}(t)^{\frac{1}{2}}(1 - u)^{\frac{3}{4}}(u)^{\frac{1}{2}}}$$

$${}^c D_*^{\frac{3}{4}} \sqrt{t} = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^1 \frac{du}{(t)^{\frac{5}{4}} (1-u)^{\frac{3}{4}} (u)^{\frac{1}{2}}}$$

$${}^c D_*^{\frac{3}{4}} \sqrt{t} = \frac{1}{2(t)^{\frac{5}{4}} \Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{3}{4}} (u)^{-\frac{1}{2}} du$$

$${}^c D_*^{\frac{3}{4}} \sqrt{t} = \frac{1}{2(t)^{\frac{5}{4}} \Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{4}-1} (u)^{\frac{1}{2}-1} du$$

$${}^c D_*^{\frac{3}{4}} \sqrt{t} = \frac{1}{2(t)^{\frac{5}{4}} \Gamma(\frac{1}{4})} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Usando la función beta  $B(p, q) = \int_0^1 (1-t)^{q-1} (t)^{p-1} dt$

Donde  $p, q > 0$  y además

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

Por lo tanto:

$${}^c D_*^{\frac{3}{4}} \sqrt{t} = \frac{1}{2(t)^{\frac{5}{4}} \Gamma(\frac{1}{4})} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})}$$

$${}^c D_*^{\frac{3}{4}} \sqrt{t} := \frac{\sqrt{\pi}}{2(t)^{\frac{5}{4}} \Gamma(\frac{3}{4})}$$

**Lema 4.** Sean  $\alpha_1, \alpha_2, b \geq 0$ ,  $f \in L^1(0, b; X)$  y  $h \in C([0, b]; X)$ , entonces

1.  $I_1^{\alpha_1} I_1^{\alpha_2} f(t) = I_1^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t)$ ;
2.  $D_1^{\alpha_1} I_1^{\alpha_1} f(t) = f(t)$ ;
3. Si  $g_{1-\alpha_1} * f \in W^{1,1}(0, b; X)$ , entonces

$$I_1^{\alpha_1 c} D_1^{\alpha_1} = f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \left\{ I_s^{1-\alpha_1} f(s) \right\} \Big|_{s=0}.$$

Mas aún, si existe una función integrable  $\phi$  tal que  $f = I_t^{\alpha_1} \phi(t)$ , entonces

$$I_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = f(t).$$

Aquí, la notación  $W^{1,1}(0, b; X)$  denota el espacio de Sobolev de las funciones  $g : (0, b) \rightarrow X$  tal que  $g$  y  $g_t$  pertenecen a  $L^1(0, b; X)$ ;

$$4. {}^c D_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_1} h(t) = h(t);$$

$$5. \text{ Si } g_{1-\alpha_1} * h \in W^{1,1}(0, b; X), \text{ entonces } I_t^{\alpha_1} {}^c D_t^{\alpha_1} h(t) = h(t) - h(0).$$

*Demostración.* 1. Por Lema (3)

$$I_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_2} f(t) = g_{\alpha_1} * (g_{\alpha_2} * f)(t) = (g_{\alpha_1} * g_{\alpha_2}) * f(t) = g_{\alpha_1 + \alpha_2} * f(t) = I_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t).$$

2. Por ítem 1 tenemos que

$$D_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_1} f(t) = D_t I_t^{1-\alpha_1} I_t^{\alpha_1} = D_t I_t^1 f(t),$$

luego, por Teorema fundamental del cálculo,

$$D_t I_t^1 f(t) = \frac{d}{dt} \left( \int_0^t f(s) ds \right) = f(t).$$

3. Note que  $D_t^{\alpha_1} f(t) \in L^1(0, b; X)$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} I_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} D_s^{\alpha_1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1} D_s^{\alpha_1} f(s) ds. \end{aligned}$$

Por la regla de Leibniz

$$\begin{aligned} I_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1} D_s^{\alpha_1} f(s) ds \right\} \\ &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1} D_s^1 I_s^{1-\alpha_1} f(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando integración por partes

$$\begin{aligned}
I_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) &= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \left\{ (t-s)^{\alpha_1} I_s^{1-\alpha_1} f(s) \right\} \Big|_0^t - \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t D_s^1 (t-s)^{\alpha_1} I_s^{1-\alpha_1} f(s) ds \right\} \\
&= D_t^1 \left\{ -\frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1} \left\{ I_s^{1-\alpha_1} f(s) \right\} \Big|_{s=0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} I_s^{1-\alpha_1} f(s) ds \right\} \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \left\{ I_s^{1-\alpha_1} f(s) \right\} \Big|_{s=0} + D_t^1 I_s^{\alpha_1} I_s^{1-\alpha_1} f(s) \\
&= f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \left\{ I_s^{1-\alpha_1} f(s) \right\} \Big|_{s=0}.
\end{aligned}$$

Ahora, si  $f(t) = I_t^{\alpha_1} \phi(t)$ , entonces por el ítem 2, concluimos que

$$I_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = I_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_1} \phi(t) = I_t^{\alpha_1} \phi(t) = f(t).$$

4. Dado que

$$\begin{aligned}
\| I_s^{\alpha_1} h(s) \Big|_{s=0} \| &= \left\| \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s (s-\sigma)^{\alpha_1-1} h(\sigma) d\sigma \right) \Big|_{s=0} \right\| \\
&\leq \| h \|_{C([0,b],X)} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \left( \int_0^s (s-\sigma)^{\alpha_1-1} d\sigma \right) \Big|_{s=0} = 0,
\end{aligned}$$

entonces  $I_s^{\alpha_1} h(s) \Big|_{s=0} = 0$ .

Ahora bien, por el ítem 2,  $D_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_1} f(t) = f(t)$ , por lo tanto

$${}^c D_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_1} h(t) = D_t^{\alpha_1} (I_t^{\alpha_1} h(t) - I_s^{\alpha_1} h(s) \Big|_{s=0}) = D_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_1} h(t) = h(t).$$

5. Finalmente, observe que si  $H(t) = h(t) - h(0)$ , por el ítem 3 y el ítem 4, obtenemos

$$I_t^{\alpha_1 c} D_t^{\alpha_1} h(t) = I_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} H(t) = H(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \left\{ I_s^{1-\alpha_1} H(s) \right\} \Big|_{s=0} = h(t) - h(0).$$

□

**Proposición 2.8.** Sea  $\alpha \in (0, 1)$  y suponga que  $f \in C^1([0, b], X)$ , entonces  ${}^c D_t^\alpha f(t) \in C([0, b], X)$  y

$${}^c D_t^\alpha f(t) = I_t^\alpha f'(t) \text{ para todo } t \in [0, b].$$

*Demostración.* Primero observe por Teorema 2.2 de Kilbas, Pág. 93 [9] tenemos que  ${}^c D_t^\alpha f(t) \in C([0, b], X)$ . Entonces, para verificar la otra parte, observe que

$$\begin{aligned}
{}^c D_t^\alpha f(t) &= D_t^\alpha (f(t) - f(0)) \\
&= D_t \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (f(s) - f(0)) ds \right\} \\
&= D_t \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{(t-s)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} (f(s) - f(0)) \right]_0^t + \int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} f'(s) ds \right\} \\
&= D_t \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(-\alpha+1)} \int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} f'(s) ds \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(-\alpha+1)} \left[ (t-t)^{1-\alpha} f'(t) + \int_0^t (1-\alpha)(t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \\
&= I_t^{1-\alpha} f'(t).
\end{aligned}$$

□

**Lema 5.** Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $n-1 < \alpha < n$ , el problema de Cauchy

$${}^c D_t^\alpha y - \lambda y = f(x),$$

con condiciones iniciales

$$y^{(j)}(0) = b_j \quad (b_j \in \mathbb{R}; j = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

tiene solución única dada por

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j x^j E_{\alpha, j+1}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(x-\tau)^\alpha] f(\tau) d\tau,$$

donde  $E_{\alpha, j+1}$  y  $E_{\alpha, \alpha}$  son funciones de Mittag-Leffler.

*Demostración.* Véase Kilbas, Srivastava y Trujillo, [9], Pág. 231.

□

## Capítulo 3

# ECUACIÓN DE BOUSSINESQ FRACCIONARIA EN TIEMPO Y ESPACIO

En este trabajo se estudia la ecuación de Boussinesq fraccionaria en tiempo y espacio, basado en las definiciones de operadores diferenciales fraccionarios según Caputo para la derivada temporal. Más exactamente se estudia la ecuación

$$\begin{cases} {}^c D_t^\delta u(x, t) + (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} u(x, t) + (-\Delta)^\mu u(x, t) = \gamma (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} f(u(x, t)), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $0 < \delta < 2$ ,  $\mu > 0$ ,  $\gamma = \pm 1$ ,  $u(x, t) \in \mathbb{R}$  y  $f$  es una función no-lineal continua que satisface  $|f(u) - f(v)| \leq C|u - v|(|u|^k + |v|^k)$ . La derivada fraccionaria en la variable  $x$  se define a través de la Transformada de Fourier de la siguiente forma  $(-\Delta)^a g = [|\xi|^{2a} \widehat{g}(\xi)]^\vee(x)$ , para  $a > 0$ . Ecuaciones de este tipo en una dimensión, pero con  $\gamma = 1$  y  $\delta = \mu = 2$ , fueron originalmente derivadas por Boussinesq [3] en su estudio de propagación de ondas dispersivas no lineales. Es importante mencionar que esta ecuación fue propuesta inicialmente en la literatura para describir este tipo de fenómenos físicos. La ecuación (3.1) también fue usada por Zakharov [19] como un modelo no lineal de cuerdas. Finalmente, Falk *at. al.* en [6] derivaron una ecuación equivalente en su estudio de aleaciones con memoria de forma. En cuanto a la cuestión de buena colocación local en una dimensión, se han obtenido varios resultados para la ecuación (3.1) con  $\mu = \delta = 2$ . Usando la teoría abstracta

de Kato para la ecuación de evolución cuasilineal Bona y Sachs [8] mostraron una buena postura local para  $f \in C^\infty$  y los datos iniciales  $u_0 \in H^{s+2}(\mathbb{R})$ ,  $u_1 \in H^{s+1}(\mathbb{R})$  con  $s > 1/2$ . Tsutsumi y Matahashi [11] establecieron un resultado similar cuando  $f(u) = |u|^{p-1}u$ ,  $p > 1$  y  $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ ,  $u_1 = \chi_{xx}$  con  $\chi \in H^1(\mathbb{R})$ . El mejor resultado disponible en la literatura fue dado por Linares [5] donde probó que (3.1), con  $\delta = \mu = 2$ , está localmente bien puesta en el caso  $f(u) = |u|^{p-1}u$ ,  $1 < p < 5$  and  $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $u_1 = h_x$  con  $h \in H^{-1}(\mathbb{R})$ .

El objetivo será encontrar ciertas estimativas en tiempo para la solución de la ecuación de Boussinesq, en la cual aparecen las algunas funciones de Mittag-Leffler. Estas estimativas se obtendrán en los espacios  $L^p$  débiles, también llamados *espacios de Marcinkiewicz*, los cuales se definieron en el capítulo de preliminares. Una vez que se tengan estas estimativas, se pretenden obtener algunos resultados de buena colocación local o global en los espacios mencionados anteriormente.

Es bien conocido que uno de los puntos más difíciles en este tipo de enfoque para obtener existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales, es dar un concepto razonable de soluciones, debido a que no se tiene el principio de Duhamel.

A continuación, se describe el tipo de solución “blanda” que se usa en este trabajo para la ecuación (3.1). Como  $0 < \delta < 2$  haciendo  $\sigma = \frac{\delta}{2}$ , entonces  $0 < \sigma < 1$ . Luego

$${}^c D_t^\delta u(x, t) + (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} u(x, t) + (-\Delta)^\mu u(x, t) = \gamma (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} f(u(x, t))$$

es formalmente equivalente a

$$\begin{cases} {}^c D_t^\sigma u = (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} w \\ {}^c D_t^\sigma w = -u - (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} u + \gamma f(u). \end{cases}$$

Escribiendo en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} {}^c D_t^\sigma u \\ {}^c D_t^\sigma w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} \\ -(1 + (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma f(u) \end{bmatrix}$$

Tomando transformada de Fourier se llega a

$$\begin{bmatrix} {}^c D_t^\sigma \widehat{u} \\ {}^c D_t^\sigma \widehat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & |\xi|^\mu \\ -(1 + |\xi|^\mu) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{u} \\ \widehat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \widehat{f}(u) \end{bmatrix}.$$

Usando el Teorema 5 de Matychyn [12], se obtiene

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}(\xi, t) \\ \widehat{w}(\xi, t) \end{bmatrix} = \Psi(t, 0) \begin{bmatrix} \widehat{u}(s) \\ \widehat{w}(s) \end{bmatrix} + \gamma \int_0^t \Phi(t, s) \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{f}(u)(\xi, s) \end{bmatrix} ds.$$

Ahora defina

$$A = \begin{bmatrix} 0 & |\xi|^\mu \\ -(1 + |\xi|^\mu) & 0 \end{bmatrix},$$

entonces se tiene que

$$A^{2k} = \begin{bmatrix} (-1)^k |\xi|^{k\mu} (1 + |\xi|^\mu)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k |\xi|^{k\mu} (1 + |\xi|^\mu)^k \end{bmatrix}$$

y

$$A^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^k |\xi|^{(k+1)\mu} (1 + |\xi|^\mu)^k \\ (-1)^{k+1} |\xi|^{k\mu} (1 + |\xi|^\mu)^{k+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

La expresión de  $\Phi$  viene dada por

$$\begin{aligned}
 \Phi(t, s) &= (t-s)^{\sigma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t-s)^{k\sigma}}{\Gamma(k\sigma + \sigma)} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(t-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(0\sigma + \sigma)} & 0 \\ 0 & \frac{(t-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(0\sigma + \sigma)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{|\xi|^\mu (t-s)^{2\sigma-1}}{\Gamma(\sigma + \sigma)} \\ -\frac{(1+|\xi|^\mu)(t-s)^{2\sigma-1}}{\Gamma(\sigma + \sigma)} & 0 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -\frac{|\xi|^\mu (1+|\xi|^\mu)(t-s)^{3\sigma-1}}{\Gamma(2\sigma + \sigma)} & 0 \\ 0 & -\frac{|\xi|^\mu (1+|\xi|^\mu)(t-s)^{3\sigma-1}}{\Gamma(2\sigma + \sigma)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{|\xi|^{2\mu} (1+|\xi|^\mu)(t-s)^{4\sigma-1}}{\Gamma(3\sigma + \sigma)} \\ \frac{|\xi|^\mu (1+|\xi|^\mu)^2 (t-s)^{4\sigma-1}}{\Gamma(3\sigma + \sigma)} & 0 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{|\xi|^{2\mu} (1+|\xi|^\mu)^2 (t-s)^{5\sigma-1}}{\Gamma(4\sigma + \sigma)} & 0 \\ 0 & \frac{|\xi|^{2\mu} (1+|\xi|^\mu)^2 (t-s)^{5\sigma-1}}{\Gamma(4\sigma + \sigma)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{|\xi|^{3\mu} (1+|\xi|^\mu)^2 (t-s)^{6\sigma-1}}{\Gamma(5\sigma + \sigma)} \\ -\frac{|\xi|^{2\mu} (1+|\xi|^\mu)^3 (t-s)^{6\sigma-1}}{\Gamma(5\sigma + \sigma)} & 0 \end{bmatrix} + \dots \\
 &= \begin{bmatrix} (t-s)^{\sigma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |\xi|^{k\mu} (1+|\xi|^\mu)^k}{\Gamma(2k\sigma + \sigma)} (t-s)^{2k\sigma} & |\xi|^\mu (t-s)^{2\sigma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |\xi|^{k\mu} (1+|\xi|^\mu)^k}{\Gamma(2k\sigma + 2\sigma)} (t-s)^{2k\sigma} \\ -(1+|\xi|^\mu)(t-s)^{2\sigma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |\xi|^{k\mu} (1+|\xi|^\mu)^k}{\Gamma(2k\sigma + 2\sigma)} (t-s)^{2k\sigma} & (t-s)^{\sigma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |\xi|^{k\mu} (1+|\xi|^\mu)^k}{\Gamma(2k\sigma + \sigma)} (t-s)^{2k\sigma} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por tanto si  $\theta(\xi, \sigma, \mu, t, s) = -|\xi|^\mu (1+|\xi|^\mu)(t-s)^{2\sigma}$ , se tiene que

$$\Phi(t, s) = \begin{bmatrix} (t-s)^{\sigma-1} E_{2\sigma, \sigma}(\theta(\xi, \sigma, \mu, t, s)) & |\xi|^\mu (t-s)^{2\sigma-1} E_{2\sigma, 2\sigma}(\theta(\xi, \sigma, \mu, t, s)) \\ -(1+|\xi|^\mu)(t-s)^{2\sigma-1} E_{2\sigma, 2\sigma}(\theta(\xi, \sigma, \mu, t, s)) & (t-s)^{\sigma-1} E_{2\sigma, \sigma}(\theta(\xi, \sigma, \mu, t, s)) \end{bmatrix}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \Psi(t, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\sigma}}{\Gamma(\sigma k + 1)} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma(0\sigma+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Gamma(0\sigma+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{|\zeta|^\mu t^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)} \\ -\frac{(1+|\zeta|^\mu)t^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)t^{2\sigma}}{\Gamma(2\sigma+1)} & 0 \\ 0 & -\frac{|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)t^{2\sigma}}{\Gamma(2\sigma+1)} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{|\zeta|^{2\mu}(1+|\zeta|^\mu)t^{3\sigma}}{\Gamma(3\sigma+1)} \\ \frac{|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)^2 t^{3\sigma}}{\Gamma(3\sigma+1)} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{|\zeta|^{2\mu}(1+|\zeta|^\mu)^2 t^{4\sigma}}{\Gamma(4\sigma+1)} & 0 \\ 0 & \frac{|\zeta|^{2\mu}(1+|\zeta|^\mu)^2 t^{4\sigma}}{\Gamma(4\sigma+1)} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{|\zeta|^{3\mu}(1+|\zeta|^\mu)^2 t^{5\sigma}}{\Gamma(5\sigma+1)} \\ -\frac{|\zeta|^{2\mu}(1+|\zeta|^\mu)^3 t^{5\sigma}}{\Gamma(5\sigma+1)} & 0 \end{bmatrix} + \dots \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |\zeta|^{k\mu} (1+|\zeta|^\mu)^k t^{2k\sigma}}{\Gamma(2k\sigma+1)} & |\zeta|^\mu t^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |\zeta|^{k\mu} (1+|\zeta|^\mu)^k t^{2k\sigma}}{\Gamma(2k\sigma+1)} \\ -(1+|\zeta|^\mu)t^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |\zeta|^{k\mu} (1+|\zeta|^\mu)^k t^{2k\sigma}}{\Gamma(2k\sigma+1)} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |\zeta|^{k\mu} (1+|\zeta|^\mu)^k t^{2k\sigma}}{\Gamma(2k\sigma+1)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} E_{2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)t^{2\sigma}) & t^\sigma |\zeta|^\mu E_{2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)t^{2\sigma}) \\ -(1+|\zeta|^\mu)t^\sigma E_{2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)t^{2\sigma}) & E_{2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)t^{2\sigma}) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(\zeta, t) &= E_{2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)t^{2\sigma})\hat{u}_0(\zeta) + t^\sigma |\zeta|^\mu E_{2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)t^{2\sigma})\hat{w}_0(\zeta) \\
 &+ \gamma \int_0^t (t-s)^{2\sigma-1} |\zeta|^\mu E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)(t-s)^{2\sigma}) \hat{f}(u)(s) ds
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \hat{w}(\zeta, t) &= -(1+|\zeta|^\mu)t^\sigma E_{2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)t^{2\sigma})\hat{u}_0(\zeta) + E_{2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)t^{2\sigma})\hat{w}_0(\zeta) \\
 &+ \gamma \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} E_{2\sigma, \sigma}(-|\zeta|^\mu(1+|\zeta|^\mu)(t-s)^{2\sigma}) \hat{f}(u)(s) ds
 \end{aligned}$$

Tomando transformada inversa se tiene que

$$u(x, t) = K_1^\sigma(t)u_0(x) + t^\sigma K_2^\sigma(t)w_0(x) + \gamma \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} K_3^\sigma(t-s)f(u)(s)ds$$

$$w(x, t) = t^\sigma K_4^\sigma(t)u_0(x) + K_1^\sigma(t)w_0(x) + \gamma \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} K_5^\sigma(t-s)f(u)(s)ds.$$

Donde  $K_1^\sigma, K_2^\sigma, K_3^\sigma, K_4^\sigma$  y  $K_5^\sigma$  son multiplicadores de Fourier dados por

$$\begin{aligned} [K_1^\sigma(t)f](x) &= \left[ E_{2\sigma}(-|\xi|^\mu(1+|\xi|^\mu)t^{2\sigma})\widehat{f}(\xi) \right]^\vee(x) \\ [K_2^\sigma(t)f](x) &= \left[ |\xi|^\mu E_{2\sigma}(-|\xi|^\mu(1+|\xi|^\mu)t^{2\sigma})\widehat{f}(\xi) \right]^\vee(x) \\ [K_3^\sigma(t)f](x) &= \left[ t^\sigma |\xi|^\mu E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\xi|^\mu(1+|\xi|^\mu)t^{2\sigma})\widehat{f}(\xi) \right]^\vee(x) \\ [K_4^\sigma(t)f](x) &= \left[ -(1+|\xi|^\mu)E_{2\sigma}(-|\xi|^\mu(1+|\xi|^\mu)t^{2\sigma})\widehat{f}(\xi) \right]^\vee(x) \\ [K_5^\sigma(t)f](x) &= \left[ E_{2\sigma, \sigma}(-|\xi|^\mu(1+|\xi|^\mu)t^{2\sigma})\widehat{f}(\xi) \right]^\vee(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema (3.1) es formalmente equivalente al siguiente sistema integro-diferencial

$$\begin{cases} u(x, t) &= K_1^\sigma(t)u_0(x) + t^\sigma K_2^\sigma(t)w_0(x) + \gamma \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} K_3^\sigma(t-s)f(u)(s)ds, \\ w(x, t) &= t^\sigma K_4^\sigma(t)u_0(x) + K_1^\sigma(t)w_0(x) + \gamma \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} K_5^\sigma(t-s)f(u)(s)ds. \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.1. Estimativas de decaimiento temporal

A continuación se presentan algunas estimativas en tiempo para los operadores  $K_j^\sigma$ , con  $j = 3, 5$ , las cuales serán útiles para obtener los resultados de existencia de soluciones y demás resultados asociados al sistema (3.1).

**Lema 6.** Sea  $0 < \sigma < 1$  y  $\mu > n$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|K_3^\sigma(t)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{\sigma n}{\mu}(1-\frac{2}{p})} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.3)$$

con  $2 \leq p \leq \infty$  y  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ .

*Demostración.* Dado que

$$\begin{aligned} K_3^\sigma(t)f(x) &= [t^\sigma |\zeta|^\mu E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1 + |\zeta|^\mu)t^{2\sigma})]^\vee * f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} t^\sigma |\zeta|^\mu E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1 + |\zeta|^\mu)t^{2\sigma}) e^{ix \cdot \zeta} \widehat{f}(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

luego

$$|K_3^\sigma(t)f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} t^\sigma |\zeta|^\mu |E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1 + |\zeta|^\mu)t^{2\sigma})| |\widehat{f}(\zeta)| d\zeta.$$

Haciendo el cambio de variable  $\eta = \zeta t^{\frac{\sigma}{\mu}}$  se tiene que

$$\begin{aligned} [t^\sigma |\zeta|^\mu E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1 + |\zeta|^\mu)t^{2\sigma})]^\vee(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} t^\sigma |\zeta|^\mu E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1 + |\zeta|^\mu)t^{2\sigma}) e^{ix \cdot \zeta} d\zeta \\ &= t^{-\frac{n\sigma}{\mu}} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^\mu E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\eta|^\mu(t^\sigma + |\eta|^\mu)) e^{ix \cdot \eta t^{-\frac{\sigma}{\mu}}} d\eta. \end{aligned}$$

Así,

$$\left| t^\sigma |\zeta|^\mu [E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1 + |\zeta|^\mu)t^{2\sigma})]^\vee(x) \right| \leq t^{-\frac{n\sigma}{\mu}} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^\mu |E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\eta|^\mu(t^\sigma + |\eta|^\mu))| d\eta.$$

Por Teorema 1.16 se tiene que existe  $C > 0$  tal que

$$|E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\eta|^\mu(t^\sigma + |\eta|^\mu))| \leq \frac{C}{1 + |\eta|^\mu(t^\sigma + |\eta|^\mu)}.$$

Entonces, si  $\mu > n$  se obtiene

$$\begin{aligned} \left| t^\sigma |\zeta|^\mu [E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\zeta|^\mu(1 + |\zeta|^\mu)t^{2\sigma})]^\vee(x) \right| &\leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\eta|^\mu}{1 + |\eta|^\mu t^\sigma + |\eta|^{2\mu}} d\eta \\ &\leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\eta|^\mu}{1 + |\eta|^{2\mu}} d\eta \leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}}. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young (Teorema 1.1) se tiene que

$$\|K_3^\sigma(t)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.4)$$

Por otra parte como  $|E_{2\sigma, 2\sigma}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}$  y  $\frac{t^\sigma |\xi|^\mu}{1+t^{2\sigma} |\xi|^\mu + t^{2\sigma} |\xi|^{2\mu}} \leq 1$ , para todo  $t > 0$  y todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , se llega a

$$\begin{aligned} \|K_3^\sigma(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| t^\sigma |\xi|^\mu E_{2\sigma, 2\sigma}(-|\xi|^\mu (1 + |\xi|^\mu) t^{2\sigma}) e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{t^\sigma |\xi|^\mu}{1 + t^{2\sigma} |\xi|^\mu + t^{2\sigma} |\xi|^{2\mu}} \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|K_3^\sigma(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.5)$$

Ahora aplicando el Teorema de Interpolación Riesz-Thorin (Teorema 1.2) de (3.4) y (3.5) se obtiene

$$\|K_3^\sigma(t)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{\sigma n}{\mu}(1-\frac{2}{p})} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

**Lema 7.** Si  $2 \leq p \leq \infty$ ,  $0 < \sigma < 1$  y  $\mu > n$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|K_3^\sigma(t)f\|_{L(p, \infty)} \leq C t^{-\frac{\sigma n}{\mu}(1-\frac{2}{p})} \|f\|_{L(p', \infty)}$$

para todo  $t > 0$ .

*Demostración.* Considere  $2 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$  y defina  $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ , con  $0 < \theta < 1$ , por el Lema 6 se obtiene

$$\|K_3^\sigma(t)f\|_{L(p_0, p_0)} \leq C t^{-\frac{\sigma n}{\mu}(1-\frac{2}{p})} \|f\|_{L(p'_0, p'_0)}$$

y

$$\|K_3^\sigma(t)f\|_{L(p_1, p_1)} \leq C t^{-\frac{\sigma n}{\mu}(1-\frac{2}{p})} \|f\|_{L(p'_1, p'_1)}.$$

Nuevamente el Teorema de Interpolación Riesz-Thorin (Teorema 1.2) implica que

$$\begin{aligned} \|K_3^\sigma(t)f\|_{L^{(p,\infty)}} &\leq Ct^{-\frac{\sigma n}{\mu}(1-\frac{2}{p})\theta} t^{-\frac{\sigma n}{\mu}(1-\frac{2}{p})(1-\theta)} \|f\|_{L^{(p',\infty)}} \\ &= Ct^{-\frac{\sigma n}{\mu}(1-\frac{2}{p})} \|f\|_{L^{(p',\infty)}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto llegamos a

$$\|K_3^\sigma(t)f\|_{L^{(p,\infty)}} \leq Ct^{-\frac{\sigma n}{\mu}(1-\frac{2}{p})} \|f\|_{L^{(p',\infty)}}.$$

□

**Lema 8.** Sea  $0 < \sigma < 1$  y  $\mu > n$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|K_5^\sigma(t)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}(1-\frac{2}{p})} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.6)$$

con  $2 \leq p \leq \infty$  y  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ .

*Demostración.* Dado que

$$\begin{aligned} [K_5^\sigma(t)f](x) &= [E_{2\sigma,\sigma}(-|\tilde{\zeta}|^\mu(1+|\tilde{\zeta}|^\mu)t^{2\sigma})]^\vee * f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} E_{2\sigma,\sigma}(-|\tilde{\zeta}|^\mu(1+|\tilde{\zeta}|^\mu)t^{2\sigma}) e^{ix \cdot \tilde{\zeta}} d\tilde{\zeta}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $\eta = \tilde{\zeta} t^{\frac{\sigma}{\mu}}$ , por Teorema 1.16 se obtiene

$$\begin{aligned} |E_{2\sigma,\sigma}(-|\tilde{\zeta}|^\mu(1+|\tilde{\zeta}|^\mu)t^{2\sigma})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} E_{2\sigma,\sigma}(-|\tilde{\zeta}|^\mu(1+|\tilde{\zeta}|^\mu)t^{2\sigma}) e^{ix \cdot \tilde{\zeta}} d\tilde{\zeta} \right| \\ &= \left| t^{-\frac{n\sigma}{\mu}} \int_{\mathbb{R}^n} E_{2\sigma,\sigma}(-|\eta|^\mu(t^\sigma + |\eta|^\mu)) e^{ix \cdot \eta t^{-\frac{\sigma}{\mu}}} d\eta \right| \\ &\leq t^{-\frac{n\sigma}{\mu}} \int_{\mathbb{R}^n} |E_{2\sigma,\sigma}(-|\eta|^\mu(t^\sigma + |\eta|^\mu))| d\eta. \end{aligned}$$

Por Teorema 1.16 existe  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |E_{2\sigma,\sigma}(-|\xi|^\mu(1+|\xi|^\mu t^{2\sigma}))| &\leq t^{-\frac{n\sigma}{\mu}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C}{1+|\eta|^\mu(t^\sigma+|\eta|^\mu)} d\eta \\ &\leq t^{-\frac{n\sigma}{\mu}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C}{1+|\eta|^{2\mu}} d\eta \leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}}. \end{aligned}$$

Usando Desigualdad de Young (Teorema 1.1) se llega a

$$\|K_5^\sigma(t)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.7)$$

Por otro lado se tiene que  $E_{2\sigma,\sigma}(z) \leq C$ , luego

$$\begin{aligned} \|K_5^\sigma(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |E_{2\sigma,\sigma}(-|\xi|^\mu(1+|\xi|^\mu t^{2\sigma}))|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Así,

$$\|K_5^\sigma(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.8)$$

Aplicando el Teorema de Interpolación Riesz-Thorin (Teorema 1.2) de (3.7) y (3.8) se obtiene

$$\|K_5^\sigma(t)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}\left(1-\frac{2}{p}\right)} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

**Lema 9.** Si  $2 \leq p \leq \infty$ ,  $0 < \sigma < 1$  y  $\mu > n$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|K_5^\sigma(t)f\|_{L^{(p,\infty)}} \leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}\left(1-\frac{2}{p}\right)} \|f\|_{L^{(p',\infty)}},$$

para todo  $t > 0$ .

*Demostración.* Sea  $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ , con  $0 < \theta < 1$ , por el Lema 6 tenemos que

$$\|K_5^\sigma(t)f\|_{L^{(p_0,p_0)}} \leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}\left(1-\frac{2}{p_0}\right)} \|f\|_{L^{(p'_0,p'_0)}}$$

y

$$\|K_5^\sigma(t)f\|_{L(p_1,p_1)} \leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}\left(1-\frac{2}{p_1}\right)} \|f\|_{L(p'_1,p'_1)}$$

Nuevamente el Teorema de Interpolación Riesz-Thorin 1.2 se llega a

$$\begin{aligned} \|K_5^\sigma(t)f\|_{L(p,\infty)} &\leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}\left(1-\frac{2}{p_0}\right)\theta} t^{-\frac{n\sigma}{\mu}\left(1-\frac{2}{p_1}\right)(1-\theta)} \|f\|_{L(p',\infty)} \\ &= Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}\left[\left(1-\frac{2}{p_0}\right)\theta + \left(1-\frac{2}{p_1}\right)(1-\theta)\right]} \|f\|_{L(p',\infty)}. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{2}{p_0}\right)\theta + \left(1-\frac{2}{p_1}\right)(1-\theta) &= \theta - \frac{2\theta}{p_0} + 1 - \frac{2}{p_1} - \theta + \frac{2\theta}{p_1} \\ &= -\frac{2\theta}{p_0} + 1 - \frac{2}{p_1} + \frac{2\theta}{p_1} \\ &= 1 - \frac{2(1-\theta)}{p_1} - \frac{2\theta}{p_0} \\ &= 1 - 2\left(\frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}\right) \\ &= 1 - \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|K_5^\sigma(t)f\|_{L(p,\infty)} \leq Ct^{-\frac{n\sigma}{\mu}\left(1-\frac{2}{p}\right)} \|f\|_{L(p',\infty)}.$$

□

### 3.2. Estimativas de las no linealidades del sistema

En esta sección se obtendrán estimativas de las partes no lineales del sistema 3.2, teniendo en cuenta las estimativas obtenidas de la sección anterior de multiplicadores de Fourier  $K_3^\sigma(\cdot)$  y  $K_5^\sigma(\cdot)$ .

Denote por

$$\mathcal{N}_\sigma^3(u) = \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} K_3^\sigma(t-s) f(u)(s) ds$$

y

$$\mathcal{N}_\sigma^5(u) = \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} K_5^\sigma(t-s) f(u)(s) ds.$$

las partes no lineales de la ecuación 1 y 2 del sistema (3.2). Además para  $0 < T < \infty$  se define

$$\|u\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} = \sup_{0 \leq t \leq T} t^{a_1} \|u(t)\|_{L^{(q,\infty)}}$$

$$\|w\|_{\mathcal{Y}_T^{q,a_1}} = \sup_{0 \leq t \leq T} t^{a_1} \|w(t)\|_{L^{(q,\infty)}}.$$

donde

$$\begin{cases} a_1 &= \frac{\sigma n}{\mu} \left(1 - \frac{2}{p}\right) - \sigma + 1 \\ q &= k + 2 \end{cases} \quad (3.9)$$

**Proposición 3.1.** Sean  $(k+1)a_1 < 1$ . Entonces existen constantes  $C_1, C_2, C_3 > 0$  (independientes de  $T$ ) tales que

$$\|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \leq C_2 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k \right] T^{1-(k+1)a_1}. \quad (3.10)$$

$$\|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{\mathcal{Y}_T^{q,a_1}} \leq C_3 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k \right] T^{1-(k+1)a_1}. \quad (3.11)$$

*Demostración.* Para la prueba de la estimativa (3.10), note que

$$\|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{L^{(q,\infty)}} = \left\| \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} K_3^\sigma(t-s) [f(u) - f(\tilde{u})] \right\|_{L^{(q,\infty)}}$$

Por Lema 7, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{L(q,\infty)} &\leq \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} \|K_3^\sigma(t-s)[f(u) - f(\tilde{u})]\|_{L(q,\infty)} ds \\ &\leq C_2 \int_0^t (t-s)^{-\frac{\sigma n}{\mu}(1-\frac{2}{p})+\sigma-1} \|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L(q',\infty)} ds. \\ &\leq C_2 \int_0^t (t-s)^{-\frac{\sigma n}{\mu}(1-\frac{2}{p})+\sigma-1} \| |u - \tilde{u}|[|u|^k + |\tilde{u}|^k] \|_{L(q',\infty)} ds. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder (Teorema 1.8) y la Proposición 3.1, se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{L(q,\infty)} &\leq C_2 \int_0^t (t-s)^{-a_1} \|u - \tilde{u}\|_{L(q,\infty)} \left[ \| |u|^k \|_{L(\frac{q}{k},\infty)} + \| |\tilde{u}|^k \|_{L(\frac{q}{k},\infty)} \right] ds \\ &\leq C_2 \int_0^t (t-s)^{-a_1} s^{-a_1} s^{a_1} \|u - \tilde{u}\|_{L(q,\infty)} \left[ s^{-a_1 k} s^{a_1 k} \| |u|^k \|_{L(q,\infty)} + s^{-a_1 k} s^{a_1 k} \| |\tilde{u}|^k \|_{L(q,\infty)} \right] ds \\ &\leq C_2 \int_0^t (t-s)^{-a_1} \|u - \tilde{u}\|_{L(q,\infty)} \left[ \| |u|^k \|_{L(q,\infty)} + \| |\tilde{u}|^k \|_{L(q,\infty)} \right] ds \\ &\leq C_2 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \left[ \| |u|^k \|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} + \| |\tilde{u}|^k \|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \right] \int_0^t (t-s)^{-a_1} s^{-(k+1)a_1} ds. \end{aligned}$$

Como  $(k+1)a_1 < 1$ , por Lema 2 se tiene que

$$\|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{L(q,\infty)} \leq C_2 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \left[ \| |u|^k \|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} + \| |\tilde{u}|^k \|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \right] t^{1-a_1-(k+1)a_1}.$$

Luego, multiplicando por  $t^{a_1}$  y tomando supremo en  $0 < t < T$  se sigue que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} t^{a_1} \|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{L(q,\infty)} \leq C_2 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \left[ \| |u|^k \|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} + \| |\tilde{u}|^k \|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \right] T^{1-(k+1)a_1}.$$

Por lo tanto,

$$\|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \leq C_2 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \left[ \| |u|^k \|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} + \| |\tilde{u}|^k \|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \right] T^{1-(k+1)a_1}.$$

Para la prueba de la última estimativa (3.11), note que

$$\|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{L(q,\infty)} = \left\| \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} K_5^\sigma(t-s)[f(u) - f(\tilde{u})] \right\|_{L(q,\infty)}.$$

Por Lema 9, se llega a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{L(q,\infty)} &\leq \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} \|K_5^\sigma(t-s)[f(u) - f(\tilde{u})]\|_{L(q,\infty)} ds \\ &\leq C_3 \int_0^t (t-s)^{-a_1} \|u - \tilde{u}\| [|u|^k - |\tilde{u}|^k]_{L(q',\infty)} ds. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder (Teorema 1.8) y la proposición 3.1

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{L(q,\infty)} &\leq C_3 \int_0^t (t-s)^{-a_1} \|u - \tilde{u}\|_{L(q,\infty)} \left[ \|u\|_{L(q,\infty)}^k + \|\tilde{u}\|_{L(q,\infty)}^k \right] ds \\ &\leq C_3 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k \right] \int_0^t (t-s)^{-a_2} s^{-(k+1)a_1} ds. \end{aligned}$$

Como  $(k+1)a_1 < 1$ , por Lema 2 se tiene que

$$\|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{L(q,\infty)} \leq C_3 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k \right] t^{1-a_2-(k+1)a_1}.$$

Luego, multiplicando por  $t^{a_2}$  y tomando supremo en  $0 < t < T$  se sigue que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} t^{a_2} \|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{L(q,\infty)} \leq C_3 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k \right] T^{1-(k+1)a_1}.$$

Por lo tanto,

$$\|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{\mathcal{Y}_T^{q,a_1}} \leq C_3 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}}^k \right] T^{1-(k+1)a_1}.$$

□

Ahora con el fin de conseguir un resultado de existencia global, se definen las siguientes normas:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} &= \sup_{t>0} t^{b_1} \|u(t)\|_{L(q,\infty)}, \\ \|w\|_{\mathcal{Y}_\infty^{q,b_1}} &= \sup_{t>0} t^{b_1} \|w(t)\|_{L(q,\infty)}, \end{aligned}$$

con  $b_1 = \frac{1-a_1}{k}$  y  $a_1$  es como en (3.9).

La siguiente Proposición será utilizada para obtener resultados de buena colocación local para el sistema (3.1)

**Proposición 3.2.** Sean  $a_1 < 1, (k + 1)b_1 < 1$ . Entonces existen constantes  $C_5, C_6 > 0$  tales que

$$\|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \leq C_5 \left\{ \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right] \right\}, \quad (3.12)$$

$$\|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{\mathcal{Y}_\infty^{q,b_2}} \leq C_6 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right], \quad (3.13)$$

para todo  $u, \tilde{u}$  tal que el lado derecho de (3.12) y (3.13) es finito.

*Demostración.* Para probar la estimativa (3.12), usaremos el mismo argumento con que se probó la estimativa (3.10) de la Proposición 3.1. En efecto,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{L^{(q,\infty)}} &\leq C_5 \int_0^t (t-s)^{-a_1} \|u - \tilde{u}\|_{L^{(q,\infty)}} \left[ \|u\|_{L^{(q,\infty)}}^k + \|\tilde{u}\|_{L^{(q,\infty)}}^k \right] ds \\ &\leq C_5 \left\{ \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right] \right\} \int_0^t (t-s)^{-a_1} s^{-(k+1)b_1} ds. \end{aligned}$$

Como  $(k + 1)b_1 < 1$  y  $a_1 < 1$  por Lema 2 se tiene que

$$\|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{L^{(q,\infty)}} \leq C_5 \left\{ \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right] \right\} t^{1-a_1-kb_1-b_1}.$$

Luego multiplicando por  $t^{b_1}$  y tomando supremo en  $t > 0$  se sigue que

$$\sup_{t>0} t^{b_1} \|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{L^{(q,\infty)}} \leq C_5 \left\{ \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{p,a_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right] \right\} T^{1-a_1-kb_1}.$$

Como  $1 - a_1 - kb_1 = 0$ , se tiene que

$$\|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \leq C_5 \left\{ \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right] \right\}.$$

Para la última estimativa (3.13) nos basaremos en (3.11)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{L^{(q,\infty)}} &\leq C_6 \int_0^t (t-s)^{-a_1} \|u - \tilde{u}\|_{L^{(q,\infty)}} \left[ \|u\|_{L^{(q,\infty)}}^k + \|\tilde{u}\|_{L^{(q,\infty)}}^k \right] ds \\ &\leq \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right] \int_0^t (t-s)^{-a_1} s^{-(k+1)b_1} ds. \end{aligned}$$

Como  $a_1 < 1$ ,  $(k+1)b_1 < 1$  por Lema 2, se obtiene

$$\|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{L^{(q,\infty)}} \leq C_6 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right] t^{1-a_1-(k+1)b_1}.$$

Multiplicando por  $t^{b_1}$  y tomando supremo para  $t > 0$  se tiene que

$$\sup_{t>0} t^{b_1} \|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{L^{(q,\infty)}} \leq C_6 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right] T^{1-a_1-kb_1}.$$

Como  $1 - a_1 - kb_1 = 0$ , se sigue que

$$\|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{\mathcal{Y}_\infty^{q,b_1}} \leq C_6 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right].$$

□

### 3.3. Solución local y global del sistema

**Definición 3.1.** Definimos  $\mathcal{L}^T$  como el espacio de Banach que consta de todas las duplas  $[u, w]$  con la norma

$$\|[u, w]\|_{\mathcal{L}^T} := \|u\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} + \|w\|_{\mathcal{Y}_T^{q,a_1}}.$$

Además, sea  $\mathcal{L}_0^T$  el espacio de condiciones iniciales  $[u_0, w_0]$  tal que la norma

$$\|[u_0, w_0]\|_{\mathcal{L}_0^T} := \|K_1^\sigma(t)u_0 + t^\sigma K_2^\sigma(t)w_0\|_{\mathcal{X}_T^{q,a_1}} + \|t^\sigma K_4^\sigma(t)u_0 + K_1^\sigma(t)w_0\|_{\mathcal{Y}_T^{q,a_1}}$$

es finita.

**Teorema 3.3.** Sean  $(k+1)a_1 < 1$ . Suponga que la norma  $\|[u_0, w_0]\|_{\mathcal{L}_0^T}$  es finita. Entonces existe  $0 < T < \infty$ , tal que el sistema tiene única solución local  $[u, w] \in \mathcal{L}^T$  y además, la aplicación dato-solución es Lipschitz continua de  $\mathcal{L}_0^T$  en  $\mathcal{L}^T$ .

*Demostración.* Para la demostración nos basaremos en el Teorema del punto fijo de Banach. Como  $\|[u_0, w_0]\|_{\mathcal{L}_0^T}$  es finita, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\|[u_0, w_0]\|_{\mathcal{L}_0^T} < \frac{\epsilon}{2}$ . Considere

$$\Phi([u, w]) = [K_1^\sigma(t)u_0 + t^\sigma K_2^\sigma(t)w_0, t^\sigma K_4^\sigma(t)u_0 + K_1^\sigma(t)w_0] + [\mathcal{N}_\sigma^3(u), \mathcal{N}_\sigma^5(u)]$$

y  $B_\epsilon = \{[u, w] : \|[u, w]\|_{\mathcal{L}^T} < \epsilon\}$  con la métrica

$d([u, w], [\tilde{u}, \tilde{w}]) = \|[u - \tilde{u}, w - \tilde{w}]\|_{\mathcal{L}^T}$ . Luego,

$$\begin{aligned} d(\Phi[u, w], \Phi[\tilde{u}, \tilde{w}]) &= \|\Phi[u, w] - \Phi[\tilde{u}, \tilde{w}]\|_{\mathcal{L}^T} \\ &= \|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u}), \mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{\mathcal{L}^T} \\ &= \|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{\mathcal{X}_T^{q, a_1}} + \|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{\mathcal{Y}_T^{q, a_1}}. \end{aligned}$$

Luego por las estimativas (3.10) y (3.11) se tiene que

$$\begin{aligned} d(\Phi[u, w], \Phi[\tilde{u}, \tilde{w}]) &\leq C_1 \left\{ \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q, a_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_T^{q, a_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q, a_1}}^k \right] \right\} T^{1-(k+1)a_1} \\ &\quad + C_2 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q, a_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_T^{q, a_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q, a_1}}^k \right] T^{1-(k+1)a_1} \\ &\leq 2C_1 \left\{ \epsilon^k \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q, a_1}} \right\} T^{1-(k+1)a_1} + 2C_2 \epsilon^k \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_T^{q, a_1}} T^{1-(k+1)a_1} \\ &\leq 2 \left( (C_1 + C_2) \epsilon^k T^{1-(k+1)a_1} \right) \|[u - \tilde{u}, w - \tilde{w}]\|_{\mathcal{L}^T} \\ &\leq 4C \left( \epsilon^k T^{1-(k+1)a_1} \right) \|[u - \tilde{u}, w - \tilde{w}]\|_{\mathcal{L}^T}, \end{aligned}$$

con  $C = \max\{C_1, C_2\}$ . Por lo tanto, para  $\epsilon > 0$  fijo dado anteriormente, existe  $T > 0$  tal que

$$0 < 4C \left( \epsilon^k T^{1-(k+1)a_1} \right) < 1.$$

Tomando  $C_\epsilon = 4C \left( \epsilon^k T^{1-(k+1)a_1} \right)$  se llega a

$$d(\Phi[u, w], \Phi[\tilde{u}, \tilde{w}]) \leq C_\epsilon \|[u - \tilde{u}, w - \tilde{w}]\|_{\mathcal{L}^T},$$

donde  $0 < C_\epsilon < 1$ .

Ahora veamos que si  $[u, w] \in B_\epsilon$ , entonces  $\|[u, w]\|_{\mathcal{L}^T} < \epsilon$ . Note que si  $[\tilde{u}, \tilde{w}] = 0$  en la Proposición 3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} d(\Phi[u, w]) &\leq \frac{\epsilon}{2} + \epsilon \left( C_1 \epsilon^k T^{1-(k+1)a_1} + C_2 \epsilon^k T^{1-(k+1)a_1} \right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \epsilon C \left( 2\epsilon^k T^{1-(k+1)a_1} \right) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia  $d(\Phi[u, w]) \leq \epsilon$ . Por lo tanto, por el Teorema de punto fijo de Banach existe un único punto  $[u, w] \in \mathcal{L}^T$  tal que

$$\Phi([u, w]) = [u, w].$$

Ahora, se muestra que la aplicación dato-solución es Lipschitz continua de  $\mathcal{L}_0^T$  en  $\mathcal{L}^T$ . Sean  $[u, w]$  y  $[\tilde{u}, \tilde{w}]$  soluciones del problema (3.1) con datos iniciales  $[u_0, w_0]$  y  $[\tilde{u}_0, \tilde{w}_0]$ , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} & \| [u, w] - [\tilde{u}, \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^T} \\ & \leq \| K_1^\sigma(t)(u_0 - \tilde{u}_0) + t^\sigma K_2^\sigma(t)(w_0 - \tilde{w}_0), t^\sigma K_4^\sigma(t)(u_0 - \tilde{u}_0) + K_1^\sigma(t)(w_0 - \tilde{w}_0) \|_{\mathcal{L}^T} \\ & \quad + \| \mathcal{N}_\sigma^3(u - \tilde{u}), \mathcal{N}_\sigma^5(u - \tilde{u}) \|_{\mathcal{L}^T} \\ & \leq \| u_0 - \tilde{u}_0, w_0 - \tilde{w}_0 \|_{\mathcal{L}_0^T} \\ & \quad + 2 \left( C_1 \epsilon^k T^{1-(k+1)a_1} + C_2 \epsilon^k T^{1-(k+1)a_1} \right) \| [u, w] - [\tilde{u}, \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^T} \\ & \leq \| u_0 - \tilde{u}_0, w_0 - \tilde{w}_0 \|_{\mathcal{L}_0^T} + 4C \left( \epsilon^k T^{1-(k+1)a_1} \right) \\ & \quad \| [u, w] - [\tilde{u}, \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^T} \\ & = \| u_0 - \tilde{u}_0, w_0 - \tilde{w}_0 \|_{\mathcal{L}_0^T} + C_\epsilon \| [u, w] - [\tilde{u}, \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^T}. \end{aligned}$$

Así,

$$\| [u, w] - [\tilde{u}, \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^T} - C_\epsilon \| [u, w] - [\tilde{u}, \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^T} \leq \| u_0 - \tilde{u}_0, w_0 - \tilde{w}_0 \|_{\mathcal{L}_0^T}.$$

Por lo tanto

$$\| [u, w] - [\tilde{u}, \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^T} \leq (1 - C_\epsilon)^{-1} \| u_0 - \tilde{u}_0, w_0 - \tilde{w}_0 \|_{\mathcal{L}_0^T},$$

lo que termina la prueba.  $\square$

**Definición 3.2.** Definimos  $\mathcal{L}^\infty$  como el espacio de Banach que consta de todas las duplas  $[u, w]$  con la norma

$$\| [u, w] \|_{\mathcal{L}^\infty} := \| u \|_{\mathcal{X}_\infty^{p, b_1}} + \| w \|_{\mathcal{Y}_\infty^{q, b_1}}$$

Además, sea  $\mathcal{L}_0^\infty$  el espacio de condiciones iniciales  $[u_0, w_0]$  tal que la norma

$$\|[u_0, w_0]\|_{\mathcal{L}_0^\infty} := \|K_1^\sigma(t)u_0 + t^\sigma K_2^\sigma(t)w_0\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} + \|t^\sigma K_4^\sigma(t)u_0 + t^\sigma K_1^\sigma(t)w_0\|_{\mathcal{Y}_\infty^{q,b_1}}$$

es finita.

**Teorema 3.4.** Sea  $(k+1)b_1 < 1, a_1 < 1$  y suponga que también existe  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tal que

$$\|[u_0, w_0]\|_{\mathcal{L}_0^\infty} < \frac{\delta}{2}.$$

Entonces el sistema (3.1) tiene única solución global y además, la aplicación dato-solución es Lipschitz continua de  $\mathcal{L}_0^\infty$  en  $\mathcal{L}^\infty$ .

*Demostración.* La demostración se basa en el Teorema del punto fijo de Banach. Sea

$$\Phi([u, w]) = [K_1^\sigma(t)u_0 + t^\sigma K_2^\sigma(t)w_0, t^\sigma K_4^\sigma(t)u_0 + K_1^\sigma(t)w_0] + [\mathcal{N}_\sigma^3(u), \mathcal{N}_\sigma^5(u)]$$

y  $B_\delta = \{[u, w] : \|[u, w]\|_{\mathcal{L}^\infty} < \delta\}$  con la métrica

$$d([u, w], [\tilde{u}, \tilde{w}]) = \|[u - \tilde{u}, w - \tilde{w}]\|_{\mathcal{L}^\infty}.$$

Así,

$$\begin{aligned} d(\Phi[u, w], \Phi[\tilde{u}, \tilde{w}]) &= \|\Phi[u, w] - \Phi[\tilde{u}, \tilde{w}]\|_{\mathcal{L}^\infty} \\ &= \|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u}), \mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{\mathcal{L}^\infty} \\ &= \|\mathcal{N}_\sigma^3(u) - \mathcal{N}_\sigma^3(\tilde{u})\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} + \|\mathcal{N}_\sigma^5(u) - \mathcal{N}_\sigma^5(\tilde{u})\|_{\mathcal{Y}_\infty^{q,b_1}}. \end{aligned}$$

Luego por las estimativas (3.12) y (3.13) se tiene que

$$\begin{aligned} d(\Phi[u, w], \Phi[\tilde{u}, \tilde{w}]) &\leq C_4 \left\{ \|[u - \tilde{u}]\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right] \right\} \\ &\quad + C_5 \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \left[ \|u\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k + \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}}^k \right] \\ &\leq 2C_4 \left\{ \delta^k \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} + \delta^k \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_\infty^{q,b_1}} \right\} \\ &\leq 4D \left( \delta^k \right) \|[u - \tilde{u}, w - \tilde{w}]\|_{\mathcal{L}^\infty} \end{aligned}$$

Con  $D = \max\{C_4, C_5\}$ . Por lo tanto se puede tomar  $\delta > 0$  tal que

$$0 < 4D (\delta^k) < 1.$$

Tomando  $D_\delta = 4D (\delta^k)$  se obtiene

$$d(\Phi[u, w], \Phi[\tilde{u}, \tilde{w}]) \leq D_\delta \| [u - \tilde{u}, w - \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^\infty},$$

donde  $0 < D_\delta < 1$ . Ahora veamos que si  $[u, w] \in B_\delta$ , entonces  $\| [u, w] \|_{\mathcal{L}^\infty} < \delta$ . Note que si  $[\tilde{u}, \tilde{w}] = 0$  en la Proposición 3.2 se tiene que

$$\begin{aligned} d(\Phi[u, w]) &\leq \frac{\delta}{2} + \delta (C_4 \delta^k + C_5 \delta^k) \\ &\leq \frac{\delta}{2} + 2\delta D (\delta^k) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

En consecuencia  $d(\Phi[u, w]) \leq \delta$ . Por lo tanto, por el Teorema de punto fijo de Banach existe un único punto  $[u, w] \in \mathcal{L}^\infty$  tal que  $\Phi([u, w]) = [u, w]$ .

Ahora, veamos que la aplicación dato-solución es Lipschitz continua de  $\mathcal{L}_0^\infty$  en  $\mathcal{L}^\infty$ . Sean  $[u, w]$  y  $[\tilde{u}, \tilde{w}]$  solución del problema (3.1) con datos iniciales  $[u_0, w_0]$  y  $[\tilde{u}_0, \tilde{w}_0]$  respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} &\| [u, w] - [\tilde{u}, \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^\infty} \\ &\leq \| K_1^\sigma(t)(u_0 - \tilde{u}_0) + t^\sigma K_2^\sigma(t)(w_0 - \tilde{w}_0), t^\sigma K_4^\sigma(t)(u_0 - \tilde{u}_0) + K_1^\sigma(t)(w_0 - \tilde{w}_0) \|_{\mathcal{L}^\infty} \\ &\quad + \| \mathcal{N}_\sigma^3(u - \tilde{u}), \mathcal{N}_\sigma^5(u - \tilde{u}) \|_{\mathcal{L}^\infty} \\ &\leq \| u_0 - \tilde{u}_0, w_0 - \tilde{w}_0 \|_{\mathcal{L}_0^\infty} \\ &\quad + 2 \left( C_4 \delta^k T^{1-ka_1} + C_5 \delta^k + C_6 \delta^k \right) \| [u - \tilde{u}, w - \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^\infty} \\ &\leq \| u_0 - \tilde{u}_0, w_0 - \tilde{w}_0 \|_{\mathcal{L}_0^\infty} + 2D \left( \delta^{\lambda+\mu-1} + 2\delta^k \right) \| [u - \tilde{u}, w - \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^\infty} \\ &= \| u_0 - \tilde{u}_0 + w_0 - \tilde{w}_0 \|_{\mathcal{L}_0^\infty} + D_\delta \| [u - \tilde{u}, w - \tilde{w}] \|_{\mathcal{L}^\infty} \end{aligned}$$

Así,

$$\|[u, w] - [\tilde{u}, \tilde{w}]\|_{\mathcal{L}^\infty} - D_\delta \|[u, w] - [\tilde{u}, \tilde{w}]\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|u_0 - \tilde{u}_0, w_0 - \tilde{w}_0\|_{\mathcal{L}_0^\infty}.$$

Por lo tanto

$$\|[u, w] - [\tilde{u}, \tilde{w}]\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq (1 - D_\delta)^{-1} \|u_0 - \tilde{u}_0, w_0 - \tilde{w}_0\|_{\mathcal{L}_0^\infty},$$

lo que termina la prueba. □

## Capítulo 4

# CONCLUSIONES

### 4.1. Conclusiones

En el presente trabajo se tuvieron los siguientes resultados:

1. Se obtuvieron estimativas de decaimiento en el tiempo para la solución de la ecuación lineal de Boussinesq fraccionaria en tiempo y espacio (3.1) en los espacios  $L^p$ -débiles para ciertos  $p$ .
2. Se probó la existencia y unicidad de la solución global de la ecuación no lineal (3.1) en ciertos espacios  $L^p$ -débiles con un peso en el tiempo.

### 4.2. Trabajos futuros

Como trabajos futuros se espera hacer un análisis similar para ecuaciones o sistemas de ecuaciones que similares a la aquí estudiada e intentar hallar estimativas en tiempo que permitan probar la existencia de soluciones locales y globales en tiempo. Incluso, para esta misma ecuación es posible estudiar comportamiento asintótico y estabilidad.

## Bibliografía

- [1] Herbert Amann y Escher Joachim. *Analysis III*. Birkhauser, 2009.
- [2] Carlos Banquet, Ferreira Lucas CF y Villamizar-Roa Elder J. «On existence and scattering theory for the Klein–Gordon–Schrödinger system in an infinite  $L^2$ -norm setting». En: *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 194 (2015), págs. 781-804.
- [3] J. Boussinesq. «Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide continu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond». En: *J. Math. Pures Appl* 17 (1872), págs. 55-118.
- [4] M. Caputo. «Linear Models of Dissipation whose  $Q$  is almost Frequency Independent-II» En: *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 13 (2007), págs. 529-539.
- [5] Linares F. «Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation,» en: 106 (1993), págs. 257-293.
- [6] Laedke E Falk F y Spatschek K. «Stability of solitary-wave pulses in shape-memory alloys Phys». En: 36 (1987), págs. 6-15.
- [7] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Springer, 2014.
- [8] Bona J y Sachs R. «Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation». En: *Commun. Math. Phys.* 118 (1988), págs. 15-29.
- [9] Anatoly A. Kilbas, Srivastava Hari M. y Trujillo Juan J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.
- [10] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978.

- [11] Tsutsumi M. y Matahashi T. «On the Cauchy problem for the Boussinesq type equation, M». En: *Math. Japan* 36 (1991), págs. 371-379.
- [12] Ivan Matychyn. «Analytical Solution of Linear Fractional Systems with Variable Coefficients Involving Riemann-Liouville and Caputo Derivatives». En: *Symmetry* 11 (2019), pág. 1366.
- [13] C. Neto y P. Mendes. *Fractional differential equations: a novel study of local and global solutions in Banach spaces*. 2013.
- [14] Igor Podlubny. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Academic Press, 1998.
- [15] Bertram Ross. *Fractional calculus and its applications: proceedings of the international conference held at the University of New Haven, June 1974*. Springer, 2006.
- [16] Fernando López Safont. «Introduction to Lorentz Spaces». Departamento de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. UB, 2012.
- [17] O. Tasbozan. «Approximate Analytical Solutions of Fractional Coupled mKdV Equation by Homotopy Analysis Method» En: *Open Journal of Applied Sciences* 2. 2012, págs. 193-197.
- [18] L. Vargas. «Cálculo fraccionario aplicado al problema inverso del calor». En: *Universidad Autónoma del Estado de México* (2011).
- [19] V. Zakharov. «On stochastization of one-dimensional chains of nonlinear oscillators». En: *Sov. Phys* 38 (1974), págs. 108-110.