Introducción a los Espacios de Modulación

Jose David Guerra Gaviria

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA
2019

Introducción a los Espacios de Modulación

Jose David Guerra Gaviria

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Matemático

Asesor:
Carlos Alberto Banquet Brango

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA
2019

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Los jurados abajo firmantes certifican que han leído y que aprueban el trabajo de grado titulado **Introducción a los Espacios de Modulación** presentado por **Jose David Guerra Gaviria.**

Fecha: **20 de enero de 2020**

Director: ____________________
Carlos Alberto Banquet Brango

Jurado: ____________________
Abraham Jose Arenas Tawil

Jurado: ____________________
Luis Enrique Benítez Babilonia

Resumen

En el presente trabajo se llevó a cabo la definición de los espacios de Modulación, los cuales se representaron con el símbolo $\boldsymbol{M}^s_{p,q}$. Dichos espacios se aplicarón primeramente a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales a principios del siglo XXI, desde ese entonces los estudios se han desarrollado rápidamente, por esta razón se incluyeron diversos resultados que permitieron un análisis detallado de su comportamiento, con la finalidad de aplicar la teoría al cálculo de estimativos $\boldsymbol{M}^s_{p,q} - \boldsymbol{M}^s_{p',q}$ a algunas ecuaciones dispersivas lineales, tales como la Ecuación Schrödinger y Schrödinger de Orden 4 e igualmente a la ecuación Korteweg-de Vries (KdV).

Agradecimientos

Agradezco primordialmente a Dios por guiarme, por los buenos y malos momentos, por siempre mostrarme el sendero para continuar; por colocar en ese mismo a personas maravillosas que me han ayudado incondicionalmente en mi vida personal y profecional.

A mis familiares por brindarme su apoyo, especialmente a mi madre que es mi gran tesoro, mi mayor inspiración; por darme tanto amor y ofrecerme todo lo que está en sus manos. Mis hermanos, compañeros de vida; por aconsejarme y apoyarme en cada una de las deciciones que he tomado en el transcurso de mi vida.

A todos los docentes que contribuyeron a mi formación académica, en especial al Ph. D. Carlos Banquet Brango del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Córdoba, mi director de trabajo de grado, por haberme prestado la orientación y supervisión necesaria para la culminación de este trabajo.

Gracias a todos mis compañeros por estar en esos momentos cruciales e importantes de la carrera; se convirtieron en maravillosas personas que realizaron un papel importante en mi crecimiento personal.

Ana E. Gaviria G.
Juan D. Alvarado G.
Jesús D. Alvarado G.
Carolina A. Castillo D.
Gladys R. Delgado R.
Humberto De Jesús Castillo D.
Por su apoyo incondicional...

Y especialmente al ser que le dio ese toque especial a mi vida...
Gabriel Guerra Castillo.

Tabla de Notaciones

$L^p(X)$	$\left\{f \,:\, \int_X \lvert f\rvert^p d\mu < \infty\right\}$
$(X, \mathscr{A}, \mu)$	Espacio μ-medible X
$\det A$	Determinante de la matriz A
$\mathbb{R}^{m+n}$	Espacio vectorial $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$	Espacio de Schwartz
$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$	Espacio de las Distribuciones Temperadas
$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$	Espacio de las funciones $C^\infty(X)$ que crecen lentamente en el infinito
$C^\infty(X)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables sobre X
$C_c^\infty(X)$	Espacio de funciones $C^\infty(X)$ con soporte compacto X
$\lVert\cdot\rVert_X$	Norma sobre el espacio vectorial normado X
$\lvert\cdot\rvert$	Norma compleja o valor absoluto
$f * g$	La convolución de f y g
$\overline{f}$	Conjugado de f
$\widehat{f}, f^\wedge$	Transformada de Fourier de f
$f^\vee$	Transformada inversa de Fourier de f
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N}_0^d$	$\underbrace{\mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0}_{d-\text{veces}}$
$a \wedge b$	$\min(a, b)$
$a \vee b$	$\max(a, b)$
χ_A	Función característica sobre el conjunto A
$\Delta f = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$	Laplaciano de f
$\arg(c)$	Argumento de c
$S(t) := e^{it\Delta}$	Semioperador

Introducción

Los espacios de modulación fueron introducidos por Hans G. Feichtinger en su artículo [28]. Originalmente definió los espacios de modulación usando la Trasformada de Fourier de Tiempo Corto, que es un tipo de técnica para analizar la información de tiempo-frecuencia como sonidos, voz, etc. Los espacios de modulación no habían sido estudiados tan cuidadosamente durante los últimos veinte años después de la primera introducción. Sin embargo, dado que los espacios de modulación se aplicaron primero a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales a principios del siglo XXI, los estudios para estos se han desarrollado rápidamente y con ello han fijado su lugar en el conjunto de los espacios de Banach de funciones y distribuciones. Tienen relevancia específica para casi todos los temas centrales del análisis de tiempo-frecuencia, y en particular al análisis de Gabor. Según las descripciones de Karlheinz Gröchenig [21], en este campo el análisis de tiempo-frecuencia puede caracterizarse como esa parte del análisis matemático para lo cual el uso de operadores de cambio de tiempo-frecuencia juega un papel central. Además, los espacios de modulación junto con la teoría presente en este trabajo se utilizó para el cálculo de estimativos $\boldsymbol{M}^s_{p,q} - \boldsymbol{M}^s_{p',q}$ a algunas ecuaciones, tales como la ecuación Schrödinger, Schrödinger de Orden 4 y la ecuación Korteweg-de Vries (KdV).

Índice general

Resumen iv

Tabla de Notaciones vii

Introducción viii

1. Preliminares 1

2. Transformada de Fourier y Distribuciones Temperadas 5

2.1. Transformada de Fourier 5

2.2. Espacio de Schwartz 8

2.3. Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$ 13

2.4. Distribuciones Temperadas 14

3. Definición de los Espacios de Modulación 17

3.1. Espacios de Modulación $\boldsymbol{M}^s_{p,q}$ 17

4. Aplicaciones 25

4.1. Ecuación Lineal de Schrödinger 25

4.2. Ecuación Lineal de Schrödinger de Orden 4 29

4.3. Ecuación Korteweg-de Vries (KdV) 33

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducirán definiciones y teoremas que son de gran importancia en el desarrollo del trabajo, dado que serán utilizados en las demostraciones de los siguientes capítulos;

Definición 1.1. Una colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos de un conjunto no vacío X, se dice que es una *σ-álgebra* en X, si $\mathscr{A}$ tiene las siguientes propiedades:

i) $X \in \mathscr{A}$.

ii) Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A^c \in \mathscr{A}$.

iii) Si $A_n \in \mathscr{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra en X, entonces se dice que $(X, \mathscr{A})$ es un *espacio medible* y a los elementos se les llama *conjuntos medibles* en X.

Definición 1.2. Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible. Una *medida positiva* es una función μ definida en $\mathscr{A}$ y cuyo rango está en $[0, \infty]$ y la cual es numerablemente aditiva, es decir, si $\{A_n\}$ es una colección numerable disjunta de elementos de $\mathscr{A}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Para evitar casos triviales, supondremos además que $\mu(A) < \infty$ para algún $A \in \mathscr{A}$.

Se llama *espacio de medida* a un espacio medible en el que hay definida una medida positiva, es decir, la terna $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida. Además, se le llamara función *medible* a toda aquella que preserva la estructura entre dos *espacios de medida*.

Definición 1.3. Sea $L^p = L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ donde $1 \leq p < \infty$ denota el espacio de todas las funciones *medibles*, que cumplen:

$$||f||_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty.$$

En ocaciones, se utiliza la notación $||f||_{L^p} := ||f||_p$.

Definición 1.4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$

i) $a \lesssim b$, entonces existe una constante $C > 1$, tal que $a \leq Cb$.

ii) $a \backsim b$, entonces $a \lesssim b$ y $b \lesssim a$.

Teorema 1.5 (Desigualdad de Young). *Sean $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces*

i) $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

ii) $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$.

Demostración: Véase [1], pág. 164. □

Teorema 1.6 (Desigualdad de Hölder). *Sean $p, p' > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y sean $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. Entonces $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Teorema 1.7 (Estimación del Multiplicador de Bernstein). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto compacto, $0 < r \leq \infty$. Se denota $\sigma_r = d\,(1/(r \wedge 1) - 1/2)$ y se considera $s > \sigma_r$. Entonces existe una constante $C > 0$, tal que*

$$\|(\varphi \widehat{f}\,)^{\vee}\|_r \leq C \|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\, \widehat{\varphi}\|_2\, \|f\|_r, \tag{1.1}$$

para todo $f \in L^r_\Omega := \{f \in L^p : \operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Omega\}$. Por otra parte, si $r \geq 1$, entonces (1.1) se tiene para todo $f \in L^r$.

Demostración: Véase [18], pág. 26. □

Teorema 1.8. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para cada $1 \leq p < \infty$.*

Demostración: Véase [7], pág. 20. □

Teorema 1.9 (Teorema de Fubini). *Sea $f : \mathbb{R}^{m+d} \to \mathbb{R}$ una función. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^{m+d})$, entonces se tiene que:*

i) *$f(x, \cdot)$ es Lebesgue integrable en $\mathbb{R}^d$ en casi toda parte, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(\cdot, y)$ es Lebesgue integrable en $\mathbb{R}^m$ en casi toda parte, para todo $y \in \mathbb{R}^d$.*

ii) *La función $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dado por*

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \cdot) dy,$$

es Lebesgue integrable en $\mathbb{R}^m$ y la función $\psi_1 : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$\psi_1(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dx,$$

es Lebesgue integrable en $\mathbb{R}^d$.

iii) Adicionalmente, se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^{m+d}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^m}\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dy\right]\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dx\right]\,dy$$

Demostración: Véase [1], pág. 145. □

Teorema 1.10 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue). *Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones complejas medibles sobre X, tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para todo $x \in X$. Si existe una función $g \in L^1(X)$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ x \in X),$$

entonces $f \in L^1(X)$, y además se cumple que

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu = 0 \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Demostración: Véase [13], pág. 26. □

Teorema 1.11 (Teorema de Acotamiento Uniforme). *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{A}$ una familia de operadores lineales y acotados de X en Y. Si para todo $x \in X$, $\sup_{T\in\mathcal{A}} \|Tx\| < \infty$, entonces $\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T\| < \infty$.*

Demostración: Véase [9], pág. 249. □

Teorema 1.12 (Teorema de la Gráfica Cerrada). *Sean X, Y espacios de Banach y T un operador lineal cerrado de X en Y. Entonces, si $D(T)$ es cerrado en X, el operador T es acotado.*

Demostración: Véase [9], pág. 292. □

Teorema 1.13. *Para $1 \leq p < \infty$, el conjunto de las funciones simples*

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j},$$

donde $\mu(E_j) < \infty$ para todo j, es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Demostración: Véase [14], pág. 292. □

Teorema 1.14 (Van Der Corput). *Sean $k \in \mathbb{Z}^+$ y $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si ϕ es una función suave en (a,b) y además $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1$ para todo $x \in (a,b)$, entonces*

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq C_k|\lambda|^{-1/k}, \tag{1.2}$$

se cumple cuando:

i) $k \geq 2$ ó

ii) $k = 1$ *y* $\phi'(x)$ *es monótona.*

Donde la cota C_k *no depende de* a*, ni de* b*.*

Demostración: Véase [15], pág. 19. □

Teorema 1.15 (Convexidad de Riezs-Thorin)**.** *Sean* $p_0 \neq p_1$ *y* $q_0 \neq q_1$*. Considerando* T *un operador lineal acotado de* $L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *hacia* $L^{q_0}(Y, \mathscr{B}, \nu)$ *con norma* M_0 *y de* $L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *hacia* $L^{q_1}(Y, \mathscr{B}, \nu)$ *con norma* M_1*. Entonces* T *es acotado de* $L^{p_\theta}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *en* $L^{q_\theta}(Y, \mathscr{B}, \nu)$ *con norma* M_θ *tal que*

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

donde

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \; \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \text{ para } \theta \in (0,1).$$

Demostración: Véase [15], pág. 22. □

Para enunciar el siguiente teorema se utlizara la operación $A+B := \{c = v_1 + v_2 \;:\; v_1 \in A,\; v_2 \in B\}$ entre dos espacios.

Teorema 1.16 (Interpolación de Riesz-Torin)**.** *Sean* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$*,* $0 < \theta < \infty$ *y* p, q*, tal que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Si T *es un operador de* $L^{p_0} + L^{p_1}$ *en* $L^{q_0} + L^{q_1}$ *tal que,*

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \quad \text{para todo} \quad f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d).$$

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1} \quad \text{para todo} \quad f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d).$$

Entonces:

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1 \|f\|_p \quad \text{para todo} \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d). \tag{1.3}$$

Definición 1.17. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La *transformada de Fourier* de f es la función

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx, \tag{1.4}$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ y $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^d x_j \xi_j$ es el producto punto usual en $\mathbb{R}^d$.

Teorema 1.18 (Desigualdad de Hausdorff-Young)**.** *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *con* $1 < p < 2$*, entonces* $\widehat{f} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *donde* $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ *y*

$$\|\widehat{f}\,\|_{p'} \leq \|f\|_p \quad \text{para todo} \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Demostración: Véase [26], pág. 42. □

Capítulo 2

Transformada de Fourier y Distribuciones Temperadas

En este capítulo se estudiará la transformada de Fourier en el espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$, y también en el espacio de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, el cual servirá de soporte para abordar el concepto de transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y el espacio de las distribuciones temperadas $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Los resultados a continuación de los teoremas y definiciones se tomaron en su mayoria del documento [15].

2.1. Transformada de Fourier

A continuación exhibimos algunas propiedades de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 2.1. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces:*

1. *$f \mapsto \widehat{f}$ define una transformación lineal de $L^1(\mathbb{R}^d)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}, \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{2.1}$$

2. *$\widehat{f}$ es continua en $\mathbb{R}^d$.*

3. *Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f * g$ la convolución de f y g. Entonces:*

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi). \tag{2.2}$$

4. *Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi. \tag{2.3}$$

5. *$\lim\limits_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ (Riemann-Lebesgue).*

6. *Si $\tau_h f(x) := f(x-h)$ denota la traslación por $h \in \mathbb{R}^d$, entonces $(\tau_h f)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i h\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)$ y $\tau_{-h}\widehat{f}(\xi) = (e^{-2\pi i\, h\cdot(\cdot)}\, f)^\wedge(\xi)$.*

7. *Si* $\delta_a f(x) := f(ax)$ *denota la dilatación por* $a > 0$, *entonces* $(\delta_a f)^\wedge(\xi) = a^{-d}\delta_{1/a}\widehat{f}(\xi)$.

8. *Si* $\widetilde{f}(x) := f(-x)$, *entonces* $\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$ *y* $\widehat{\overline{f}} = \overline{\widetilde{\widehat{f}}}$.

Demostración: 1. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx = \|f\|_{L^1},$$

y por lo tanto,

$$|\widehat{f}\,(\xi)| \leq \|\widehat{f}\,\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}\,, \qquad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

La desigualdad anterior implica que la transformada de Fourier está bien definida para cada $\xi \in \mathbb{R}^d$. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\begin{aligned}(f + cg)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f + cg)(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx + c\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \widehat{f}(\xi) + c\,\widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

Así, $(f + cg)^\wedge = \widehat{f} + c\,\widehat{g}$.

2. Sean $\xi \in \mathbb{R}^d$ fijo y $h \in \mathbb{R}^d$. Como

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)}\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, (e^{-2\pi i x\cdot h} - 1)\, dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, |e^{-2\pi i x\cdot h} - 1|\, dx.\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue permite concluir que

$$\lim_{h\to 0} \left|\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)\right| \leq \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, |e^{-2\pi i x\cdot h} - 1|\, dx = 0.$$

Luego, $\widehat{f}$ es continua en ξ.

3. Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\xi \in \mathbb{R}^d$. Por el Teorema 1.5, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, luego

$$\begin{aligned}(f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x - y)\, dy\right] e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x - y)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dy\right] dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x - y)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx\right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, e^{-2\pi i y\cdot\xi} \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(x - y)\, e^{-2\pi i (x-y)\cdot\xi}\, dx\right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, e^{-2\pi i y\cdot\xi} \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx\right] dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, e^{-2\pi i y\cdot\xi}\, \widehat{g}(\xi)\, dy = \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

4. Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \right] g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(\xi)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \right] d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(\xi)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi \right] dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi.$$

5. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Para $\xi \neq 0$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} -f(x)\, e^{-2\pi i \xi\cdot\left(x + \frac{1}{2|\xi|^2}\xi\right)}\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} -f\left(x - \frac{1}{2|\xi|^2}\xi\right) e^{-2\pi i \xi\cdot x}\, dx.$$

Luego

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}\left[f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{|\xi|^2}\xi\right)\right] e^{-i x\cdot\xi}\, dx. \tag{2.4}$$

Si f es continua, de (2.4) y el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, se tiene

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0. \tag{2.5}$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por el Teorema 1.8, existe $g \in C_c^\infty$ tal que $\|f - g\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, por (2.5) existe $M > 0$ tal que

$$|\widehat{g}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad |\xi| > M,$$

así,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |(f-g)^\wedge(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| \leq \|(f-g)^\wedge\|_{L^\infty} + |\widehat{g}(\xi)| \leq \|f-g\|_{L^1} + |\widehat{g}(\xi)| < \varepsilon$$

siempre que $M < |\xi|$. Por consiguiente $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

6. Notemos que

$$(\tau_h f)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-h)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i (x+h)\cdot\xi}\, dx$$
$$= e^{-2\pi i h\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = e^{-2\pi i h\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi).$$

Además,

$$\tau_{-h}\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot h})\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = (e^{-2\pi i h\cdot(\cdot)}\, f)^\wedge(\xi).$$

7. Por la definición de $\delta_a f$ y de la transformada de Fourier, se sigue

$$(\delta_a f)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(ax)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2a^{-1}\pi i x\cdot\xi}\, |a^{-d}|\, dx$$
$$= a^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot(a^{-1}\xi)}\, dx = a^{-d}\widehat{f}(a^{-1}\xi) = a^{-d}\delta_{1/a}\widehat{f}(\xi).$$

8. Sea $\xi \in \mathbb{R}^d$, entonces

$$\widehat{\widetilde{f}}\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(-x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot(-\xi)}\, dx = \widehat{f}(-\xi) = \widetilde{\widehat{f}}\,(\xi)$$

y

$$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot(-\xi)}\, du} = \overline{\widehat{f}(-\xi)} = \overline{\widetilde{\widehat{f}}}\,(\xi).$$

Así que, $\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$ y $\widehat{\overline{f}} = \overline{\widetilde{\widehat{f}}}$.

□

2.2. Espacio de Schwartz

En esta sección introducimos el espacio de Schwartz, pero primero estableceremos algunas notaciones convencionales. Un *multi-índice* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ es un elemento de $\mathbb{N}_0^d$, donde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, y el *orden* del multi-índice α es el número

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j.$$

Adicionalmente, introducimos las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned}
x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad \text{si} \quad x = (x_1, \ldots, x_d)\,, \\
\partial^\alpha &:= \partial_{x_1}^{\alpha_1}\, \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}, \text{ donde } \partial_{x_i}^{\alpha_i} \text{ denota el operador } \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}, \\
f^{(\alpha)} &:= \partial^\alpha f,
\end{aligned}$$

siempre que las derivadas de f existan. En caso de que $x_i = \alpha_i = 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, d\}$, por conveniencia supondremos que en la expresión x^α el término $x_i^{\alpha_i}$ es igual a 1.

Definición 2.2 (Espacio de Schwartz)**.** El *espacio de Schwartz*, denotado por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, es el conjunto formado por todas las funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, tal que

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| x^\alpha\, f^{(\beta)}(x) \right| < \infty \qquad \text{para todo} \qquad \alpha,\, \beta \in \mathbb{N}_0^d.$$

El espacio de Schwartz también es conocido como el espacio de las funciones infinitamente diferenciables de decrecimiento rápido y en el se establece lo siguiente:

- Dado que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ es subespacio vectorial de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, pero $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \neq \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, puesto que la función γ, definida por $\gamma(x) = e^{-|x|^2/2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$, es un elemento de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ y su soporte es $\mathbb{R}^d$, es decir, $\gamma \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \setminus C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
- $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ es un subespacio vectorial de $L^p(\mathbb{R}^d)$ para cada $1 \leq p \leq \infty$.

- $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ y $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para cada $1 \leq p < \infty$, se sigue que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para cada $1 \leq p < \infty$.
- Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, también $x^{\alpha}\,\varphi^{(\beta)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ para cada α, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$.

Teorema 2.3. *Sean $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ y*

$$(\partial_x^{\alpha}\,\varphi)^{\wedge}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|}\,(\xi)^{\alpha}\,\widehat{\varphi}(\xi), \tag{2.6}$$

$$(\partial_{\xi}^{\alpha}\,\widehat{\varphi})(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|}\,((\cdot)^{\alpha}\,\varphi)^{\wedge}(\xi). \tag{2.7}$$

Demostración: Primero probaremos (2.6). Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces existe $C_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\left(1+|x|^2\right)x^{\alpha}\,\varphi^{(\beta)}(x)\right| \leq C_{\alpha\beta} < \infty.$$

Así,

$$|x^{\alpha}\,\varphi^{(\beta)}(x)| \leq \frac{C_{\alpha\beta}}{(1+|x|^2)}, \qquad \text{para todo} \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Por tanto

$$\lim_{|x|\to\infty} x^{\alpha}\,\varphi^{(\beta)}(x) = 0. \tag{2.8}$$

Ahora, por el Teorema de Fubinni

$$\begin{aligned}(\partial^{\alpha}\varphi)^{\wedge}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d}(\partial^{\alpha}\varphi)(x)\,e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2\pi i x'\cdot\xi'}\left[\int_{\mathbb{R}}(\partial_{x_1}^{\alpha_1}\psi(x))\,e^{-2\pi i x_1\,\xi_1}\,dx_1\right]dx_2\,dx_3\cdots dx_d,\end{aligned}$$

donde $x' = (x_2, x_3, \ldots, x_d)$, $\xi' = (\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_d)$, y $\psi = \partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Integrando por partes α_1 veces y usando (2.8) obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}}(\partial_{x_1}^{\alpha_1}\psi(x))\,e^{-2\pi i x_1\,\xi_1}\,dx_1 = (2\pi i\xi_1)^{\alpha_1}\int_{\mathbb{R}}\psi(x)\,e^{-2\pi i x_1\,\xi_1}\,dx_1.$$

Luego

$$(\partial^{\alpha}\varphi)^{\wedge}(\xi) = (2\pi i\xi_1)^{\alpha_1}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\,e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx = (2\pi i\xi_1)^{\alpha_1}\left(\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}\varphi\right)^{\wedge}(\xi).$$

Aplicando el procedimiento anterior a $\left(\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}\varphi\right)^{\wedge}(\xi)$ obtenemos

$$\left(\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}\varphi\right)^{\wedge}(\xi) = (2\pi i\xi_2)^{\alpha_2}\left(\partial_{x_3}^{\alpha_3}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}\varphi\right)^{\wedge}(\xi),$$

se sigue aplicando iteradamente este proceso obtenemos las fórmula dada en (2.6).

A continuación, probaremos la fórmula dada en (2.7). En efecto, sean $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ y $k \in \{1, \ldots, d\}$ fijos y $\{\xi_k^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números reales que converge a la $k-$ésima componente de ξ, es decir, a ξ_k. Definamos la sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^d$ por

$$\xi_n := (\xi_1, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots, \xi_d)$$

y a la sucesión de funciones $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$h_n(x) := \frac{e^{-2\pi i x\cdot\xi_n} - e^{-2\pi i x\cdot\xi}}{\xi_k^{(n)} - \xi_k}.$$

Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \frac{\partial(e^{-2\pi i x\cdot\xi})}{\partial\xi_k} = -2\pi i x_k e^{-2\pi i x\cdot\xi}.$$

Si aplicamos el Teorema del Valor Medio a $h_n(x)$ en el intervalo abierto $(\xi_k, \xi_k^{(n)})$, obtenemos que existen η_n, $\theta_n \in \mathbb{R}$ tales

$$\begin{aligned}\frac{e^{-2\pi i x\cdot\xi_n} - e^{-2\pi i x\cdot\xi}}{\xi_k^{(n)} - \xi_k} &= \frac{\cos(2\pi x\cdot\xi_n) - \cos(2\pi x\cdot\xi)}{\xi_k^{(n)} - \xi_k} - i\,\frac{\operatorname{sen}(2\pi x\cdot\xi_n) - \operatorname{sen}(2\pi x\cdot\xi)}{\xi_k^{(n)} - \xi_k}\\ &= -2\pi x_k \operatorname{sen}(\eta_n) - 2\pi i x_k\cos(\theta_n) = -2\pi x_k(\operatorname{sen}(\eta_n) + i\cos(\theta_n)).\end{aligned}$$

Luego,

$$|h_n(x)\varphi(x)| \leq |2\pi x_k\,\varphi(x)| \quad \text{para todo} \quad x\in\mathbb{R}^d, \tag{2.9}$$

donde la función definida en el lado derecho de (2.9) pertenece a $L^1(\mathbb{R}^d)$. Por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\widehat{\varphi}(\xi) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\widehat{\varphi}(\xi_n) - \widehat{\varphi}(\xi)}{\xi_k^{(n)} - \xi_k} = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} h_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} -2\pi i x_k\,\varphi(x)\,e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx\\ &= -2\pi i((\cdot)_k\,\varphi)^\wedge(\xi).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Donde $(\cdot)_k$ denota la función que envia a x en su componente k-ésima. Haciendo uso reiterado de (2.10) obtenemos la fórmula dada en (2.7). Ahora probaremos que $\widehat{\varphi}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. La fórmula (2.7) nos dice que $\widehat{\varphi}\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, por tanto, sólo nos resta probar que

$$\|\widehat{\varphi}\|_{\alpha\beta} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}|\xi^\alpha\,\widehat{\varphi}^{(\beta)}(\xi)| < \infty \quad \text{para todo} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d.$$

Usando las fórmulas (2.6) y (2.7) se obtiene

$$\xi^\alpha\,\widehat{\varphi}^{(\beta)}(\xi) = (-2\pi i)^{|\beta|}\,\xi^\alpha((\cdot)^\beta\,\varphi)^\wedge(\xi) = (-1)^{|\beta|}(2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|}(\partial_x^\alpha((\cdot)^\beta\,\varphi))^\wedge(\xi).$$

Las reglas de derivación de Leibniz implican que $\partial_x^\alpha((\cdot)^\beta\,\varphi)$ es una combinación lineal de términos de la forma $x^u\,\varphi^{(v)}$ con $u,v\in\mathbb{N}_0^d$, por tanto, cada uno de estos términos $x^u\,\varphi^{(v)}$ son elementos de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. De la fórmula (2.9) concluimos que

$$(-1)^{|\beta|}(2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|}(\partial_x^\alpha((\cdot)^\beta\,\varphi))^\wedge \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{y} \quad \|\widehat{\varphi}\|_{\alpha\beta} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}|\xi^\alpha\,\widehat{\varphi}^{(\beta)}(\xi)| < \infty \quad \text{para todo } \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d.$$

□

Definición 2.4. Sean $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha(k)$, $k = 1,\ldots,d$, el multi-índice cuya componente k-ésima es 2 y las demás componentes cero. Definimos el Laplaciano de φ como

$$\Delta\varphi := \sum_{k=1}^d \partial^{\alpha(k)}\varphi.$$

Corolario 2.5. *Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces*

$$(\Delta_x \varphi)^\wedge(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \, \widehat{\varphi}(\xi), \tag{2.11}$$

$$\Delta_\xi \widehat{\varphi}(\xi) = -4\pi^2 \left(|\cdot|^2 \varphi \right)^\wedge (\xi). \tag{2.12}$$

Demostración: Sea $\xi \in \mathbb{R}^d$, entonces por (2.6) y (2.7)

$$(\Delta_x \varphi)^\wedge(\xi) = \sum_{k=1}^{d} (\partial^{\alpha(k)} \varphi)^\wedge(\xi) = \sum_{k=1}^{d} (2\pi i)^{|\alpha(k)|} (\xi)^{\alpha(k)} \widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{k=1}^{d} -4\pi^2 \xi_k^2 \widehat{\varphi}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{\varphi}(\xi).$$

$$\begin{aligned} \Delta_\xi \widehat{\varphi}(\xi) &= \sum_{k=1}^{d} \partial_\xi^{\alpha(k)} \widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{k=1}^{d} (-2\pi i)^{|\alpha(k)|} \left((\cdot)^{\alpha(k)} \varphi \right)^\wedge (\xi) = -4\pi^2 \left(\sum_{k=1}^{d} (\cdot)^{\alpha(k)} \varphi \right)^\wedge (\xi) \\ &= -4\pi^2 \left(|\cdot|^2 \varphi \right)^\wedge (\xi). \end{aligned}$$

□

Lema 2.6. *Sean $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t+ib)^2} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Demostración: Sea R un número real positivo. Consideremos el camino cerrado W en el plano complejo que consiste en los segmentos de línea de $-R$ a R (camino k_1), de R a $R + ib$ (camino k_2), de $R + ib$ a $-R + ib$ (camino k_3) y de $-R + ib$ a $-R$ (camino k_4).

Como e^{-az^2} es analítica en z, entonces por el Teorema de Cauchy $\int_W e^{-az^2} \, dz = 0$. Análicemos esta integral en cuatro partes. Primeramente notemos que

$$\int_{k_1} e^{-az^2} \, dz = \int_{-R}^{R} e^{-ax^2} \, dx, \qquad \text{y} \qquad \int_{k_3} e^{-az^2} \, dz = -\int_{-R}^{R} e^{-a(t+ib)^2} \, dt.$$

Parametrizando k_2 con $\gamma(t) = R + it$, tenemos que

$$\int_{k_2} e^{-az^2} \, dz = i \int_0^b e^{-a(R+it)^2} \, dt.$$

Como

$$\left| e^{-a(R+it)^2} \right| = e^{-a(R^2 - t^2)} \le e^{-a(R^2 - b^2)} \quad (a \le t \le |b|),$$

entonces

$$\left| \int_0^b e^{-a(R+it)^2} \right| \le |b| e^{-a(R^2 - b^2)}.$$

Luego,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{k_2} e^{-az^2} \, dz = 0.$$

De manera análoga obtenemos que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{k_4} e^{-az^2} \, dz = 0.$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t+ib)^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

□

Definición 2.7 (Transformada de Fourier Inversa)**.** Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La *transformada de Fourier inversa* de f, es la función

$$f^{\vee}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\,e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Notemos que para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, se obtiene la siguiente igualdad

$$f^{\vee}(\xi) = \widehat{f}(-\xi). \tag{2.13}$$

Corolario 2.8. *Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces*

$$(\Delta_x\varphi)^{\vee}(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2\varphi^{\vee}(\xi). \tag{2.14}$$

Demostración: Consecuencia inmediata de (2.13) y (2.11). □

Teorema 2.9. *Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces $(\widehat{f}\,)^{\vee} = f = (f^{\vee})^{\wedge}$.*

Demostración: Veamos primero que $(\widehat{f}\,)^{\vee} = f$. Consideremos $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Sean $x \in \mathbb{R}^d$ fijo y $m \in \mathbb{N}$, entonces por el Teorema de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi/m)\widehat{f}(\xi)\,e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(\xi/m)\,f(y)\,e^{-2\pi i(y-x)\cdot\xi}\,d\xi\,dy. \tag{2.15}$$

Consideremos el cambio de variable $(\eta, z) = (\xi/m, (y-x)m)$, por el Teorema de Cambio de Variable y el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi/m)\widehat{f}(\xi)\,e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(\eta)\,f(x+z/m)\,e^{-2\pi i z\cdot\eta}\,d\eta\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+z/m)\left[\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\eta)\,e^{-2\pi i z\cdot\eta}\,d\eta\right]dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+z/m)\,\widehat{\psi}(z)\,dz.\end{aligned}$$

Dado que

$$\lim_{m\to\infty} \psi(\xi/m)\,\widehat{f}(\xi)\,e^{2\pi i x\cdot\xi} = \psi(0)\,\widehat{f}(\xi)\,e^{2\pi i x\cdot\xi} \qquad \text{con} \qquad |\psi(\xi/m)\,\widehat{f}(\xi)\,e^{2\pi i x\cdot\xi}| \le |\widehat{f}(\xi)|,$$

y

$$\lim_{m\to\infty} f(x+z/m)\,\widehat{\psi}(z) = f(x)\,\widehat{\psi}(z) \qquad \text{con} \qquad |f(x+z/m)\,\widehat{\psi}(z)| \le \|f\|_{L^\infty}|\widehat{\psi}(z)|,$$

entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}\psi(0)\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi &= \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi/m)\,\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi = \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+z/m)\widehat{\psi}(z)\,dz \\ &= f(x)\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\psi}(z)dz.\end{aligned}$$

Como para todo $z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{\psi}(z) = \prod_{k=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_k^2 - 2\pi i x_k z_k}\, dx_k = \prod_{k=1}^{d} e^{-\pi z_k^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x_k + i z_k)^2}\, dx_k = \prod_{k=1}^{d} e^{-\pi z_k^2} = e^{-\pi |z|^2},$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\psi}(z) dz = \prod_{k=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z_k^2}\, dz_k = 1.$$

Así,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x \cdot \xi}\, d\xi = (\widehat{f}\,)^{\vee}(x), \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ahora veamos que $(f^{\vee})^{\wedge} = f$. En efecto:

Sea $x \in \mathbb{R}^d$. Como $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces por Teorema 2.2 se obtiene que

$$\left(f^{\vee}\right)^{\wedge}(x) = \left(\widehat{\widetilde{f}}\right)^{\wedge}(x) = \left(\widehat{\widehat{f}}\right)^{\wedge}(x) = \left(\widehat{\widehat{f}}\right)^{\vee}(-x) = \widetilde{f}(-x) = f(x).$$

Luego $(f^{\vee})^{\wedge} = f$. □

2.3. Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$

Para definir la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$, usaremos el hecho de que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ es un subconjunto denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 2.10 (Plancherel)**.** *Sea $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\,\|_{L^2}$.*

Demostración: Sea $g = \overline{\widehat{f}}$. Como

$$\overline{f}(\xi) = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)\, e^{2\pi i x \cdot \xi}\, dx} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{f}}\,(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx = \widehat{g}(\xi).$$

Entonces por Teorema 2.1 inciso (4) se sigue que

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, \overline{f}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, \overline{\widehat{f}}\,(\xi)\, d\xi = \|\widehat{f}\,\|_{L^2}^2.$$

Luego $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\,\|_{L^2}$. □

Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dado que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ es un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R}^d)$, existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|f - \varphi_n\|_{L^2} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces por el Teorema de Plancherel $\{\widehat{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^d)$. De esta manera, dado que $L^2(\mathbb{R}^d)$ es un espacio métrico completo, existe $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\Phi = \lim_{n\to\infty} \widehat{\varphi}_n$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Definiremos a Φ como la transformada de Fourier de f en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Probemos que Φ depende sólo de f y no de las sucesiones $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|f - \psi_n\|_{L^2} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y sea Ψ el límite de la sucesión $\{\widehat{\psi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Por la desigualdad triangular tenemos que

$$\|\Phi - \Psi\|_{L^2} \leq \|\Phi - \widehat{\varphi_n}\|_{L^2} + \|\widehat{\varphi_n} - \widehat{\psi_n}\|_{L^2} + \|\widehat{\psi_n} - \Psi\|_{L^2}$$

y como $\lim_{n\to\infty} \|\widehat{\varphi}_n - \widehat{\psi}_n\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \psi_n\|_{L^2} = 0$, entonces $\Phi = \Psi$.

Definición 2.11. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. La transformada de Fourier de f, está dada por

$$\widehat{f} = \lim_{n \to \infty} \widehat{\varphi}_n \qquad (\text{ en } L^2(\mathbb{R}^d)),$$

donde $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en una sucesión en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ que converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Todas las propiedades de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$ son válidas en $L^2(\mathbb{R}^d)$ debido a que estas propiedades se heredan por el proceso de límite en la definición de la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Usando el Teorema de Plancherel es fácil mostrar que la anterior definición no depende la sucesión que se escoja.

2.4. Distribuciones Temperadas

Una *distribución temperada* es un funcional lineal continuo en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. El conjunto de todas las distribuciones temperadas será denotado por $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Definición 2.12. Sea $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ y α un multi-indice. La derivada en el sentido de las distribuciones $\partial^\alpha f$ se define como

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Definición 2.13. Sea $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ una distribución temperada. La transformada de Fourier de f y la transformada de Fourier inversa de f, denotadas por $\widehat{f}$ y $f^\vee$ respectivamente, están definidas respectivamente por

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle \;\text{ y }\; \langle f^\vee, \varphi \rangle = \langle f, \varphi^\vee \rangle, \;\text{ para todo } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Definición 2.14. La traslación $\tau_h(f)$, la dilatación $\delta_a(f)$ y la reflexión $\widetilde{f}$ de la distribución temperada $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ están definidas respectivamente por

$$\begin{aligned} \langle \tau_h f, \varphi \rangle &= \langle f, \tau_{-h} \varphi \rangle, \\ \langle \delta_a f, \varphi \rangle &= \langle f, a^{-d} \delta_{1/a} \varphi \rangle, \\ \langle \widetilde{f}, \varphi \rangle &= \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Definición 2.15. Denotaremos por $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ el espacio de todas las funciones $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ existe un polinomio P_α que satisface

$$|\phi^{(\alpha)}(x)| \le |P_\alpha(x)| \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

El espacio vectorial $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ es llamado el espacio de las funciones infinitamente diferenciables que crecen lentamente en el infinito.

A continuación exhibimos un par de funciones que pertenecen a $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$. Sean $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, $c \in \mathbb{R}$ y $f,\, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ funciones definidas por $f(x) = cx^\beta$ y $g(x) = e^{ic\,\xi\cdot x}$ respectivamente. Entonces, $f,\, g \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$. En efecto, sea $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Entonces los polinomios P_α y Q_α definidos por $P_\alpha(x) = f^{(\alpha)}(x)$ y $Q_\alpha(x) = g^{(\alpha)}(x)\, e^{-ic\,\xi\cdot x}$ verifican que

$$|f^{(\alpha)}(x)| \leq |P_\alpha(x)| \qquad \text{y} \qquad |g^{(\alpha)}(x)| \leq |Q_\alpha(x)| \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Teorema 2.16. *Sean $\phi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces $\varphi\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración: Claramente $\varphi\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sean $\alpha,\, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, luego veamos que $\|\varphi\phi\|_{\alpha\beta} < \infty$. Por las reglas de derivación, sabemos que $(\cdot)^\alpha(\varphi\phi)^{(\beta)}$ es la combinación lineal de términos de la forma $(\cdot)^\alpha\varphi^{(u)}\phi^{(v)}$ donde $u,\, v \in \mathbb{N}_0^d$. Notemos que para cada término $(\cdot)^\alpha\varphi^{(u)}\phi^{(v)}$ existe un polinomio P_v tal que

$$|\phi^{(v)}(x)| \leq |P_v(x)| \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Como $\varphi P_v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ tenemos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha\varphi^{(u)}(x)\phi^{(v)}(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha\varphi^{(u)}(x)P_v(x)| < \infty,$$

es decir, cada uno de los términos $(\cdot)^\alpha\varphi^{(u)}\phi^{(v)}$ pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, luego $(\cdot)^\alpha(\varphi\phi)^{(\beta)}$ también pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, es decir $\|\varphi\phi\|_{\alpha\beta} < \infty$. Así, hemos mostrado que $\varphi\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Definición 2.17. Sea $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $\phi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$. Entonces el producto de ϕ y f, denotado por ϕf, es la distribución dada por

$$\langle \phi f,\, \varphi\rangle := \langle f,\, \phi\varphi\rangle\,, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Teorema 2.18. *Sean $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $h \in \mathbb{R}^d$, α un multi-indice y $a > 0$. Entonces*

1. $\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$.
2. $(\tau_h\, f)^\wedge = e^{-2\pi i h\cdot(\cdot)}\, \widehat{f}$.
3. $(\delta_a\, f)^\wedge = a^{-d}\, \delta_{1/a}\, \widehat{f}$.
4. $(\partial^\alpha f)^\wedge = (2\pi i)^{|\alpha|}\, (\cdot)^\alpha\, \widehat{f}$.
5. $\partial^\alpha\, \widehat{f} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\, ((\cdot)^\alpha\, f)^\wedge$.
6. $\left(\widehat{f}\right)^\vee = f = (f^\vee)^\wedge$.

Demostración: Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces

1. $\left\langle \widehat{\widetilde{f}}\,,\, \varphi\right\rangle = \langle \widetilde{f},\, \widehat{\varphi}\rangle = \langle f,\, \widetilde{\widehat{\varphi}}\,\rangle = \langle f,\, \widehat{\widetilde{\varphi}}\,\rangle = \langle \widehat{f},\, \widetilde{\varphi}\rangle = \left\langle \widetilde{\widehat{f}}\,,\, \varphi\right\rangle$.
2. $\left\langle (\tau_h\, f)^\wedge\,,\, \varphi\right\rangle = \langle \tau_h\, f,\, \widehat{\varphi}\rangle = \langle f,\, \tau_{-h}\, \widehat{\varphi}\,\rangle = \left\langle f,\, (e^{-2\pi i h\cdot(\cdot)}\, \varphi)^\wedge\right\rangle = \left\langle \widehat{f},\, e^{-2\pi i h\cdot(\cdot)}\, \varphi\right\rangle$.
3. $\left\langle (\delta_a\, f)^\wedge\,,\, \varphi\right\rangle = \langle \delta_a\, f,\, \widehat{\varphi}\rangle = \left\langle f,\, a^{-d}\, \delta_{1/a}\, \widehat{\varphi}\,\right\rangle = \left\langle f,\, (\delta_a\, \varphi)^\wedge\right\rangle = \left\langle \widehat{f},\, \delta_a\, \varphi\right\rangle = a^{-d}\, \left\langle \delta_{1/a}\, \widehat{f},\, \varphi\right\rangle$.

4. $\langle (\partial^\alpha f)^\wedge, \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha f, \widehat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f, \partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi} \right\rangle = (2\pi i)^{|\alpha|} \left\langle \widehat{f}, (\cdot)^\alpha \varphi \right\rangle.$

5. $\left\langle \partial^\alpha \widehat{f}, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle \widehat{f}, \partial_x^\alpha \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, (\partial_x^\alpha \varphi)^\wedge \rangle = (-2\pi i)^{|\alpha|} \langle f, (\cdot)^\alpha \widehat{\varphi} \rangle.$

6. $\left\langle (\widehat{f})^\vee, \varphi \right\rangle = \left\langle \widehat{f}, \varphi^\vee \right\rangle = \langle f, (\varphi^\vee)^\wedge \rangle = \langle f, \varphi \rangle = \langle f, (\widehat{\varphi})^\vee \rangle = \langle f^\vee, \widehat{\varphi} \rangle = \langle (f^\vee)^\wedge, \varphi \rangle.$

□

Definición 2.19. Sea $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha(k)$ con $k \in \{1, \ldots, d\}$ el multi-índice cuya componente k-ésima es 2 y las demás componentes cero. Definimos el Laplaciano de f como

$$\Delta f := \sum_{k=1}^{d} \partial^{\alpha(k)} f.$$

Notemos que para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \Delta f, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{d} \left\langle \partial^{\alpha(k)} f, \varphi \right\rangle = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{|\alpha(k)|} \langle f, \partial_{x_k}^2 \varphi \rangle = \left\langle f, \sum_{k=1}^{d} \partial_{x_k}^2 \varphi \right\rangle = \langle f, \Delta \varphi \rangle . \tag{2.16}$$

Corolario 2.20. *Sea $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, entonces $(\Delta f)^\wedge = -4\pi^2 |\cdot|^2 \widehat{f}$.*

Demostración: Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces por (2.12)

$$\left\langle (\Delta f)^\wedge, \varphi \right\rangle = \langle \Delta f, \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, \Delta \widehat{\varphi} \rangle = \left\langle f, -4\pi^2 \left(|\cdot|^2 \varphi \right)^\wedge \right\rangle = \left\langle -4\pi^2 \widehat{f}, |\cdot|^2 \varphi \right\rangle = \left\langle -4\pi^2 |\cdot|^2 \widehat{f}, \varphi \right\rangle.$$

Esto implica que, $(\Delta f)^\wedge = -4\pi^2 |\cdot|^2 \widehat{f}$. □

Capítulo 3

Definición de los Espacios de Modulación

En este capítulo se incluye las características que deben ser satisfechas por un espacio para llamarlo de modulación; y se presentarán resultados que permiten entender el comportamiento de dichos espacios.

3.1. Espacios de Modulación $M_{p,q}^s$

Sea $\rho : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1]$ una función del espacio de Schwartz y satisface:

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } |\xi| \leq (\sqrt{d}\,)/2, \\ 0, & \text{si } |\xi| \geq \sqrt{d}. \end{cases}$$

y ρ_k una traslación de ρ definida de la siguiente forma

$$\rho_k(\xi) = \rho(\xi - k), \quad k \in \mathbb{Z}^d. \tag{3.1}$$

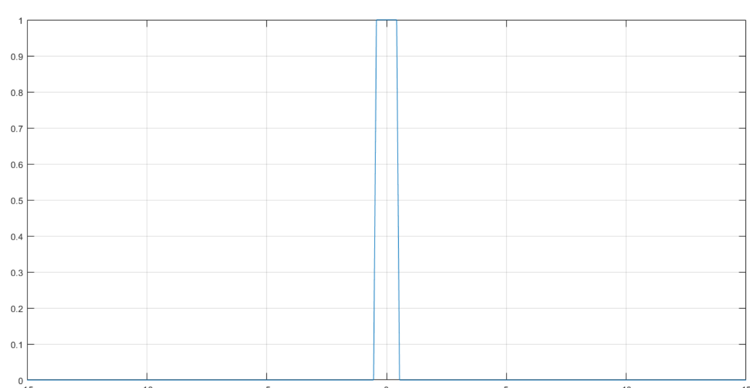
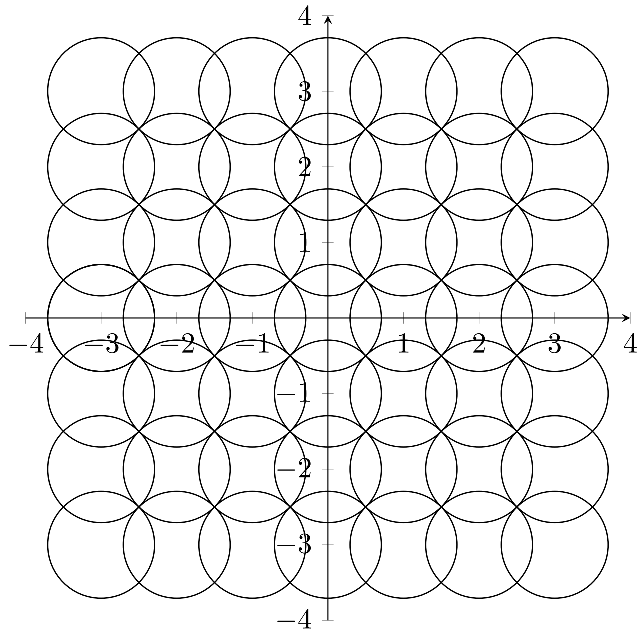


Figura 3.1: Función ρ

Tomando el dominio de las traslaciones de la función ρ en el mismo plano se obtiene



Ahora, utilizando la herramienta MATLAB se puede generar una representación de la figura anterior en $\mathbb{R}^3$.

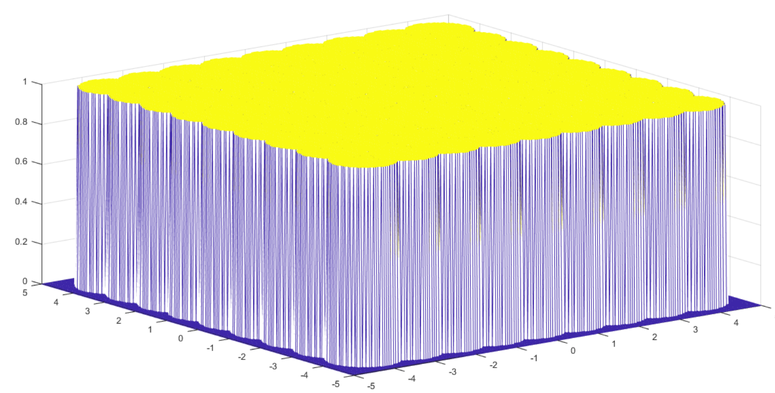


Figura 3.2: Traslaciones de ρ

Sea $Q_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^d : \xi_i \in [-1/2, 1/2),\ \text{para algún } i = 1, 2, \dots, d\}$ y se define $Q_k = k + Q_0$, con $k \in \mathbb{Z}^d$, entonces la suma de ρ_k sobre todos los elementos $k \in \mathbb{Z}^d$ cumple

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \rho_k(\xi) \geq 1, \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

De lo anterior se permite establecer condiciones para la función

$$\sigma_k(\xi) = \rho_k(\xi) \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \rho_m(\xi) \right)^{-1}.$$

i) $|\sigma_k(\xi)| \geq c, \quad \text{para todo} \quad \xi \in Q_k,$

ii) $\operatorname{supp} \sigma_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - k| \leq \sqrt{d}\}, \quad d \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^d,$

iii) $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sigma_k(\xi) \equiv 1, \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$

iv) $|D^\alpha \sigma_k(\xi)| \leq C_{|\alpha|}, \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^d,\ |\alpha| \in \mathbb{Z}^d_+.$

Además, el conjunto $\Upsilon := \{\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} : \{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \text{ satisface las condiciones anteriores}\}$.

Demostración. i) Sea $\rho_k(\xi) = \rho(\xi - k)$ para todo $\xi \in Q_k$ y $k \in \mathbb{Z}^d$

$$|\sigma_k(\xi)| = |\rho_k(\xi)| \left| \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \rho_m(\xi) \right)^{-1} \right| = (1) \left| \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \rho_m(\xi) \right)^{-1} \right| = \left| \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \rho_m(\xi) \right)^{-1} \right|.$$

Notemos que $\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \rho_m(\xi) \leq 4$, entonces

$$\left| \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \rho_m(\xi) \right| \leq 4.$$

Multiplicando por $\rho_k(\xi) = 1 > 0$ al inverso multiplicativo de la suma de ρ_k sobre todos los elementos $k \in \mathbb{Z}^d$

$$\left| \rho_k(\xi) \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \rho_m(\xi) \right)^{-1} \right| \geq \frac{1}{4} := c.$$

ii) Sea $\rho_k(\xi) = \rho(\xi - k)$, con las siguientes condiciones

$$\rho_k(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } |\xi - k| \leq \sqrt{d}/2, \\ 0, & \text{si } |\xi - k| \geq \sqrt{d}. \end{cases}$$

Ahora, por la definición de la función anterior se tiene que

$$\sigma_k(\xi) = 0 \Leftrightarrow \left(\rho_k(\xi)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\rho_m(\xi)\right)^{-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \rho_k(\xi) = 0 \Leftrightarrow |\xi - k| \geq \sqrt{d}.$$

Entonces, para $\xi \in \mathbb{R}^d$, existe $r := \sqrt{d}$, tal que

$$\left\{\xi \in \mathbb{R}^d : \sigma_k \neq 0\right\} \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - k| < \sqrt{d}\right\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \overline{\{\xi \in \mathbb{R}^d : \sigma_k \neq 0\}} &\subset \overline{\left\{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - k| < \sqrt{d}\right\}} \\ \operatorname{supp} \sigma_k &\subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - k| \leq \sqrt{d}\right\}. \end{aligned}$$

iii) Sea $\sigma_k(\xi) = \rho_k(\xi)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\rho_m(\xi)\right)^{-1}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sigma_k(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left(\rho_k(\xi)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\rho_m(\xi)\right)^{-1}\right) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\rho_k(\xi)\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\rho_m(\xi)\right)^{-1} \equiv 1.$$

iv) Dado $\sigma_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces existe $C_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, tal que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left|\left(1 + |\xi|^2\right)\xi^\beta D^\alpha \sigma_k(\xi)\right| \leq C_{\alpha\beta} < \infty,$$

$$\left|\left(1 + |\xi|^2\right)\xi^\beta D^\alpha \sigma_k(\xi)\right| \leq C_{\alpha\beta}.$$

Dado que $|\xi|^2 + 1 \geq 1$,

$$\left|\xi^\beta D^\alpha \sigma_k(\xi)\right| \leq C_{\alpha\beta}.$$

Sea $\xi \in (0,1]^d \subset \mathbb{R}^d$, tal que $\xi_j \neq 0$, para algún $j = 1, 2, 3, \ldots, d$, entonces

$$|D^\alpha \sigma_k(\xi)| \leq \frac{C_{\alpha\beta}}{|\xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}\xi_3^{\beta_3}\cdots\xi_d^{\beta_d}|} = \frac{C_{\alpha\beta}}{|\xi_1|^{\beta_1}|\xi_2|^{\beta_2}|\xi_3|^{\beta_3}\cdots|\xi_d|^{\beta_d}}.$$

Luego, para $j \in \{1, 2, 3 \ldots, d\}$, existe $\epsilon_j > 0$, tal que

$$\begin{aligned} |\xi_1|^{\beta_1} &> \epsilon_1 \\ |\xi_2|^{\beta_2} &> \epsilon_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ |\xi_d|^{\beta_d} &> \epsilon_d. \end{aligned}$$

Entonces,

$$|\xi_1|^{\beta_1}|\xi_2|^{\beta_2}|\xi_3|^{\beta_3}\cdots|\xi_d|^{\beta_d} > \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\cdots\epsilon_d := \epsilon.$$

Por lo cual,

$$|D^\alpha\sigma_k(\xi)| \leq \frac{C_{\alpha\beta}}{|\xi^\beta|} \leq \frac{C_{\alpha\beta}}{\epsilon} := C_{|\alpha|}.$$

Ahora, para el caso en el que $\xi \notin (0,1]^d$, se tienen en cuenta las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} |\xi_1|^{\beta_1} &\geq 1 \\ |\xi_2|^{\beta_2} &\geq 1 \\ \vdots\ \ &\ \ \vdots \\ |\xi_d|^{\beta_d} &\geq 1, \end{aligned}$$

con lo que se obtiene

$$|\xi_\beta| = |\xi_1|^{\beta_1}|\xi_2|^{\beta_2}|\xi_3|^{\beta_3}\cdots|\xi_d|^{\beta_d} \geq 1.$$

Por lo tanto,

$$|D^\alpha\sigma_k(\xi)| \leq \frac{C_{\alpha\beta}}{|\xi^\beta|} = C_{\alpha\beta} := C_{|\alpha|}.$$

$\square$

Por consiguiente, los espacios de modulación $\boldsymbol{M}^s_{p,q}$ tienen una representación en términos de lo establecido previamente

$$\boldsymbol{M}^s_{p,q} = \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (1+|k|)^{sq} \|(\sigma_k \widehat{f}\,)^\vee\|_p^q \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

donde $|k| := |k_1| + |k_2| + \cdots + |k_n|$, con $k \in \mathbb{Z}^d$. Por simplicidad se escribe $\boldsymbol{M}_{p,q} = \boldsymbol{M}^0_{p,q}$.

Debido a que existen diversas generalizaciones de los espacios de modulación $\boldsymbol{M}^s_{p,q}$, se ha convertido en un problema respecto a cuánto se puede o se debe estirar la terminología, y en particular qué características deben ser satisfechas por un espacio para llamarlo *espacio de modulación*.

Definición 3.1. La Trasformada de Fourier de Tiempo Corto de una función f con respecto a g del espacio Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ se define como

$$V_g f(x,w) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i t\cdot w}\overline{g\,(t-x)}f(t)dt, \quad \text{para} \quad x,w\in\mathbb{R}^d,$$

donde g es una función ventana, es decir, una función que ayuda a evitar discontinuidades al principio y al final de intervalos.

Definición 3.2. Sean $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ una función no nula, y $0\leq p,q\leq\infty$, *el espacio de modulación* $\boldsymbol{M}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ que consiste de todas las distribuciones temperadas $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. La norma en $\boldsymbol{M}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ es:

$$\|f\|^o_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} = \|V_g f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|V_g f(x,w)|^p dx\right)^{q/p}(1+|w|)^{sq}\,dw\right)^{1/p}.$$

Lo cual permitira obtener de manera factible embebimientos, equivalencias, isomorfismos y otras propiedades que muestra el comportamiento de los espacios de modulación. Algunos resultados son los siguientes:

Teorema 3.3. *Sean $0<p,q\leq\infty$, $s\in\mathbb{R}$. Entonces $\|\cdot\|^o_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}}$ y $\|\cdot\|_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}}$ son normas equivalentes en el espacio de modulación $\boldsymbol{M}^s_{p,q}$.*

Demostración: Primero se mostrara la equivalencia para $0<p,q<1$, y luego para $1\leq p,q<\infty$.

Caso 1. Sea $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ una función no nula, $0\leq p,q\leq 1$, y $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$V_g f(x,w)\sim e^{-2\pi i x\cdot w}\left(V_{\widehat{g}}\widehat{f}(w,-x)\right) = e^{-2\pi i x\cdot w}\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i t\cdot x}\,\overline{\widehat{g}\,(t-w)}\,\widehat{f}(t)\,dt = e^{-2\pi x\cdot w}\left(\widehat{g}(\cdot-w)\widehat{f}\,\right)^\vee(x).$$

Supongamos que $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, y por el teorema del valor medio, existe $w_k\in Q_k$ (w_k una traslación), tal que

$$\|f\|^o_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|w|)^{sq}\left\|\left(\widehat{g}(\cdot-w)\widehat{f}\,\right)^\vee\right\|_p^q dw\right)^{1/q} \tag{3.2}$$

$$\sim\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|)^{sq}\left\|\left(\widehat{g}(\cdot-w)\widehat{f}\,\right)^\vee\right\|_p^q\right)^{1/q}. \tag{3.3}$$

Ahora, supongamos que $\operatorname{supp}\widehat{g}\subset B(0,100\sqrt{d}\,)$ y $\widehat{g}(\xi)=1$ en $B(0,3\sqrt{d})$, entonces por Teorema 1.17, se tiene

$$\|(\sigma_k\widehat{f}\,)^\vee\|_p = \left\|\left(\sigma_k\,\widehat{g}(\cdot-w_k)\widehat{f}\,\right)^\vee\right\|_p \lesssim \left\|\left(\widehat{g}(\cdot-w_k)\widehat{f}\,\right)^\vee\right\|_p. \tag{3.4}$$

Se sigue de (3.4) y (3.5) que $\|f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}}\lesssim\|f\|^o_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}}$. Por otro lado, es fácil ver que $\operatorname{supp}\widehat{g}(\cdot-w_k)$ cubre a $O(\sqrt{d})$ como máximo, mas que el supp σ_k. Por Teorema 1.17, se tiene

$$\left\| \left(\widehat{g}(\cdot - w_k)\widehat{f} \right)^{\vee} \right\|_p = \left\| \left(\sum_{\ell \in \Lambda} \widehat{g}(\cdot - w_k)\widehat{f} \right)^{\vee} \right\|_p \lesssim \sum_{\ell \in \Lambda} \left\| \left(\sigma_{k+\ell}\widehat{f}\, \right)^{\vee} \right\|_p , \tag{3.5}$$

donde $\Lambda = \{\ell \in \mathbb{Z}^d \ : \ B(\ell, \sqrt{2d}) \cap B(0, \sqrt{2d}) \neq \emptyset)\}$ tiene como máximo $O(\sqrt{d})$ elementos. Por (3.6) se concluye $\|f\|^o_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} \lesssim \|f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}}$.

Caso 2. Véase [28], pág. 33.

□

Teorema 3.4. *Para cualquier $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$, se tiene*

- $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset \boldsymbol{M}^s_{p,q} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.
- $\boldsymbol{M}^s_{p,q}$ *es un espacio cuasi-Banach. Además, si $1 \leq p, q \leq \infty$, entonces $\boldsymbol{M}^s_{p,q}$ es un espacio Banach.*
- *Si $0 < p, q < \infty$, entonces $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $\boldsymbol{M}^s_{p,q}$.*

Notemos que un espacio *cuasi-Banach* es un espacios de *Banach* que cumple los axiomas de una norma, excepto que la desigualdad triangular se reemplaza por

$$\|x + y\| \leq K \left(\|x\| + \|y\| \right), \quad \text{con} \quad K > 0.$$

Demostración. Para el caso $1 \leq p,\ q \leq \infty$ véase [28] pág. 18, y para el caso $0 < p,\ q < \infty$ véase [18], pág. 193 y [20], pág 12, 19. □

Teorema 3.5. *Sean $\{\sigma_k\}, \{\varphi_k\} \in \Upsilon$. Entonces $\{\sigma_k\}$ y $\{\varphi_k\}$ inducen normas equivalentes en $\boldsymbol{M}^s_{p,q}$.*

Demostración: Se considera la siguiente identidad

$$\left(m\widehat{f} \right)^{\vee}(x) = e^{ixk} \left(m(\cdot + k)(e^{-iyk} f(y))^{\wedge} \right)^{\vee}(x). \tag{3.6}$$

Por Teorema 1.17, se tiene

$$\left\| (\sigma_k \widehat{f}\,)^{\vee} \right\|_p \leq \sum_{\ell \in \Lambda} \left\| \left(\varphi_{k+\ell} \left((\sigma_k \widehat{f}\,)^{\vee} \right)^{\wedge} \right)^{\vee} \right\|_p .$$

Por (3.6) reemplazamos y se obtiene

$$\left\| \left(\varphi_{k+\ell} \left((\sigma_k \widehat{f}\,)^{\vee} \right)^{\wedge} \right)^{\vee} \right\|_p = \left\| \left(\sigma_k(\cdot + k)\varphi_{k+\ell}(\cdot + k) \left(e^{-iyk} f(y) \right)^{\wedge} \right)^{\vee} \right\|_p .$$

Ahora, considerando si $\Omega = \bigcup_{\ell \in \Lambda} B(\ell, \sqrt{2n})$ en el Teorema 1.17, se obtiene

$$\left\| \left(\sigma_k \left(\varphi_{k+\ell} \widehat{f} \right) \right)^{\vee} \right\|_p = \left\| \left(\varphi_{k+\ell} \left((\sigma_k \widehat{f}\,)^{\vee} \right)^{\wedge} \right)^{\vee} \right\|_p \leq \left\| (1+|\xi|^2)^{s/2}\ \widehat{\sigma_k} \right\|_2 \left\| \left(\varphi_{k+\ell} \widehat{f}\, \right)^{\vee} \right\|_p .$$

Por la cuarta condición, $\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\ \widehat{\sigma_k}\|_2$ es uniformemente acotada en $\mathbb{Z}^d$, por lo tanto de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\left\| \left(\sigma_k \widehat{f}\, \right)^{\vee} \right\|_p \lesssim \sum_{\ell \in \Lambda} \left\| \left(\varphi_{k+\ell} \widehat{f}\, \right)^{\vee} \right\|_p .$$

Por lo tanto, $\|f\|^{\{\sigma_k\}}_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} \leq \|f\|^{\{\varphi_k\}}_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}}$.

□

Teorema 3.6. *Embebimientos:*

i) $\boldsymbol{M}^{s_1}_{p_1,q_1} \subset \boldsymbol{M}^{s_2}_{p_2,q_2}$, *si* $q_1 > q_2$, $s_1 > s_2$, $s_1 - s_2 > \dfrac{d}{q_2} - \dfrac{d}{q_1}$.

ii) $\boldsymbol{M}^{s_1}_{p_1,q_1} \subset \boldsymbol{M}^{s_2}_{p_2,q_2}$, *si* $s_1 \geq s_2$, $0 < p_1 \leq p_2$, $0 < q_1 \leq q_2$.

Demostración: *i*) Por la condición

$$\operatorname{supp} \sigma_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - k| \leq \sqrt{d}\},$$

se considera la desigualdad de Hölder,

$$\|f\|_{\boldsymbol{M}^{s_2}_{p,q_2}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (1+|k|)^{s_2 q_2} \, \|(\sigma_k \widehat{f}\,)^{\vee}\|_p^{q_2} \right)^{1/q_2} \leq \|f\|_{\boldsymbol{M}^{s_1}_{p,q_1}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (1+|k|)^{(s_2-s_1)q_1 q_2/(q_1-q_2)} \right)^{(q_1-q_2)/q_1 q_2} .$$

Notemos que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (1+|k|)^{(s_2-s_1)q_1q_2/(q_1-q_2)} \lesssim \sum_{i=1}^{\infty} (1+|i|)^{d-1+(s_2-s_1)q_1q_2/(q_1-q_2)}$$

y la serie en el lado derecho converge cuando $s_1 - s_2 > d/q_2 - d/q_1$. Por lo tanto, se tiene lo deseado. Para *ii*) véase [28] pág. 36, para el caso $1 \leq p_i,\ q_i \leq \infty$ y [20] pág. 13, para el caso $0 < p_i,\ q_i \leq \infty$. □

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capítulo aplicaremos la teoría expuesta de los espacios $\boldsymbol{M}^s_{p,q} - \boldsymbol{M}^s_{p',q}$ y se utilizaran los estimativas $L^p - L^q$ existentes y propiedades de los espacios de modulación, para ese objetiivo primeramente es hallar y comprobar las soluciones de cada una de las ecuaciones estudiadas, por medio de la transformada de Fourier y por último se aplicará los teoremas de interpolación para obtener estimativas de estas soluciones.

4.1. Ecuación Lineal de Schrödinger

Consideremos el problema de valor inicial (PVI) para la ecuación lineal de Schrödinger

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = i\Delta u(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Fourier con respecto a la variable espacial x, obtenemos

$$\partial_t \widehat{u}(\xi,t) = \widehat{\partial_t u}(\xi,t) = \widehat{i\Delta u}(\xi,t) = -4\pi^2 i|\xi|^2 \widehat{u}(\xi,t)\,, \tag{4.1}$$

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi)\,. \tag{4.2}$$

De (4.1), tenemos

$$\partial_t \widehat{u}(\xi,t) = -4\pi^2 i|\xi|^2 \widehat{u}(\xi,t)\,,$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\widehat{u}(\xi,t)\right) + 4\pi^2 i|\xi|^2 \widehat{u}(\xi,t) = 0\,. \tag{4.3}$$

Así, el factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int 4\pi^2 i|\xi|^2 dt} = e^{4\pi^2 it|\xi|^2}\,.$$

Luego, la solución general de la EDO dada en (4.3) es

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{\int e^{4\pi^2 it|\xi|^2} \cdot 0dx + C}{e^{4\pi^2 it|\xi|^2}} = Ce^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\,.$$

Por la condición inicial (4.2) del PVI, se sigue que

$$\widehat{u_0}(\xi) = \widehat{u}(\xi,0) = Ce^{-4\pi^2 i(0)|\xi|^2} = C \cdot (1) = C\,.$$

Así, la solución de esta familia de EDO's con parámetro ξ, puede ser escrita como

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)\,.$$

Por tanto, aplicando transformada inversa de Fourier, se tiene que la solución es

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= (\widehat{u}(\xi,t))^\vee = (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi))^\vee = (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2})^\vee * (\widehat{u_0}(\xi))^\vee \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 it|\xi|^2} e^{2\pi i z\xi} d\xi\right) * u_0(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(4\pi^2 it|\xi|^2 - 2\pi i z\xi)} d\xi\right) * u_0(x) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-[4\pi^2 it(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2) - 2\pi i(\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \cdots + \xi_n z_n)]}\right) * u_0(x) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n e^{-(4\pi^2 it\xi_k^2 - 2\pi i z_k \xi_k)} d\xi_k\right) * u_0(x) \\
&= \left(\prod_{k=1}^n e^{z_k^2 i/4t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(2\pi\sqrt{it}\,\xi_k - \frac{1}{2}\sqrt{i/t}\,z_k\right)^2}\right) * u_0(x) \\
&= \left(\prod_{k=1}^n \frac{e^{z_k^2 i/4t}}{2\pi\sqrt{it}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_k^2} dv_k\right) * u_0(x) = \left(\prod_{k=1}^n \frac{e^{z_k^2 i/4t}}{2\pi\sqrt{it}}\sqrt{\pi}\right) * u_0(x) \\
&= \left(\prod_{k=1}^n \frac{e^{z_k^2 i/4t}}{\sqrt{4\pi it}}\right) * u_0(x) = \frac{e^{\frac{i}{4t}(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2)}}{(\sqrt{4\pi it})^n} * u_0(x) \\
&= \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}} * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i|x-y|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}} u_0(y)dy\,.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i|x-y|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}} u_0(y)dy\right| \le \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{e^{i|x-y|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}} u_0(y)\right| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u_0(y)|}{|(4\pi t)|^{n/2}} dy = |(4\pi)|^{-n/2}|t|^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)|dy \\
&= C_n |t|^{-n/2} \|u_0(x)\|_1\,.
\end{aligned}$$

Tomando el supremo, se sigue entonces que

$$\|u(x,t)\|_\infty \le C_n |t|^{-n/2} \|u_0(x)\|_1\,. \tag{4.4}$$

Por otro lado, haciendo uso del teorema Plancherel tenemos

$$\begin{aligned}
\|u(x,t)\|_2 &= \left\|\left(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)\right)^\vee\right\|_2 = \left\|\left(\left(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)\right)^\vee\right)^\wedge\right\|_2 = \left\|e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)\right\|_2 \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)\right|^2 dy\right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u_0}(\xi)|^2\, dy\right)^{1/2} = \|\widehat{u_0}(\xi)\|_2 = \|u_0(x)\|_2\,.
\end{aligned}$$

En conclusión, se mostró que

$$\|u(x,t)\|_2 = \|u_0(x)\|_2\,. \tag{4.5}$$

Notemos que

$$u(x,t) = (\widehat{u}(\xi,t))^{\vee} = (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi))^{\vee} = (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2})^{\vee} * u_0(x)\,.$$

Si el operador $T: L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ dado por $T(t)f = (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2})^{\vee} * f$ y por (4.4) tenemos que

$$\|T(t)f\|_{\infty} \leq C_n|t|^{-n/2}\|f\|_1\,, \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Ahora, considerando el operador $T: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ por (4.5) se cumple que $\|T(t)f\|_2 = \|f\|_2$. En consecuencia por Convexidad de Riezs-Thorin se puede definir

$$T: L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)\,,$$

tal que

$$\|T(t)f\|_q \leq \left(C_n|t|^{-n/2}\right)^{1-\theta}(1)^{\theta}\|f\|_p = C|t|^{-n/2(1-\theta)}\|f\|_p\,,$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}\,, \qquad \theta \in (0,1)\,.$$

De lo anterior, se sigue que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + 1 - \frac{\theta}{2} = 1 \quad \text{y} \quad 1-\theta = 1 - \frac{2}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\,.$$

Así, se obtiene que

$$\|T(t)f\|_q \leq C|t|^{-n/2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\|_p\,. \tag{4.6}$$

Por (4.6), aplicado a la solución de la ecuación de Schrödinger deducimos que

$$\|u(x,t)\|_q = \|T(t)u_0(x)\|_q \leq C|t|^{-n/2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|u_0(x)\|_p\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Lema 4.1. *Sean $2 \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$ y $s \in \mathbb{R}$, para todo $f \in \boldsymbol{M}^s_{p',q}$ se cumple*

$$\|T(t)f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} \leq C\,(1+|t|)^{-\lambda}\,\|f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p',q}}.$$

Donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\lambda = n/2\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}\right)$.

Demostración: Por la definición de espacios de modulación

$$\|T(t)f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|)^{sq}\|(\sigma_k\widehat{T(t)f}\,)^{\vee}\|_p^q\right)^{1/q}.$$

Por la ecuación (4.6) se tiene lo siguiente

$$\|(\sigma_k\widehat{T(t)f}\,)^{\vee}\|_p = \|T(t)(\sigma_k\widehat{f}\,)^{\vee}\|_p \leq C_1|t|^{-\lambda}\|(\sigma_k\widehat{f}\,)^{\vee}\|_{p'} \leq C_1|t|^{-\lambda}\sum_{\ell\in\Lambda}\|(\sigma_{k+\ell}\widehat{f}\,)^{\vee}\|_{p'}. \tag{4.7}$$

Notemos que $\sigma_k(\xi) = \sum_{\ell\in\Lambda}\sigma_k(\xi)\sigma_{k+\ell}(\xi)$. Entonces

$$\|(\sigma_k\widehat{T(t)f}\ )^{\vee}\|_p = \left\| \left(\sum_{\ell\in\Lambda} \sigma_k\sigma_{k+\ell}\widehat{T(t)f} \right)^{\vee} \right\|_p \leq \left\| \sum_{\ell\in\Lambda} \sigma_k\sigma_{k+\ell}\widehat{T(t)f} \right\|_{p'} \leq \sum_{\ell\in\Lambda} \left\| \sigma_k\sigma_{k+\ell}\widehat{T(t)f} \right\|_{p'}.$$

$$\|(\sigma_k\widehat{T(t)f}\ )^{\vee}\|_p \leq \sum_{\ell\in\Lambda} \left\| \sigma_k\sigma_{k+\ell}\widehat{T(t)}\widehat{f}\ \right\|_{p'}.$$

Sean $1 \leq r \leq 2 \leq p$, $1 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'}$ y $\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{r'} + \dfrac{1}{h}$. Por la desigualdad de Hölder y Hausdorff-Young, se tiene

$$\|(\sigma_k\widehat{T(t)f}\ )^{\vee}\| \leq \sum_{\ell\in\Lambda} \|\sigma_k\widehat{f}\ \|_{r'} \|\sigma_{k+\ell}\widehat{T(t)}\|_h \leq \|\sigma_k\widehat{f}\ \|_{r'} \sum_{\ell\in\Lambda} \|\sigma_{k+\ell}\widehat{T(t)}\|_h \leq \|\sigma_k\widehat{f}\ \|_{r'} \sum_{\ell\in\Lambda} \|\sigma_{k+\ell}\|_h \leq \|\sigma_k(\xi)\widehat{f}\ \|_{r'}.$$

$$\|(\sigma_k\widehat{T(t)f}\ )^{\vee}\| \leq \|(\sigma_k\widehat{f}\ )^{\vee}\|_r.$$

Entonces, existe una constante c, tal que

$$\|(\sigma_k\widehat{T(t)f}\ )^{\vee}\|_p \leq c \sum_{\ell\in\Lambda} \|(\sigma_{k+\ell}\widehat{f}\ )^{\vee}\|_{p'} \tag{4.8}$$

Ahora, consideremos los casos $|t| \leq 1$ y $|t| > 1$.

- Si $|t| \leq 1$, entonces

$$\begin{array}{rcl} |t| & \leq & 1 \\ 1+|t| & \leq & 2 \\ (1+|t|)^{\lambda} & \leq & 2^{\lambda} \\ 1 & \leq & 2^{\lambda}(1+|t|)^{-\lambda} \end{array}$$

  Ahora, por la ecuación (4.7)

$$\|(\sigma_k\widehat{T(t)f}\ )^{\vee}\|_p \leq C(1+|t|)^{-\lambda} \sum_{\ell\in\Lambda} \|(\sigma_{k+\ell}\widehat{f}\ )^{\vee}\|_{p'},$$

  donde $C := 2^{\lambda}c$.

- Si $|t| > 1$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} 1+\dfrac{1}{|t|} & \leq & 2 \\ \dfrac{1+|t|}{|t|} & \leq & 2 \\ 1+|t| & \leq & 2|t| \\ (1+|t|)^{\lambda} & \leq & 2^{\lambda}|t|^{\lambda} \\ |t|^{-\lambda} & \leq & 2^{\lambda}(1+|t|)^{-\lambda} \end{array}$$

Ahora, por la ecuación (4.8)

$$\|(\sigma_k \widehat{T(t)f}\,)^\vee\|_p \leq C_1|t|^{-\lambda} \sum_{\ell\in\Lambda} \|(\sigma_{k+\ell}\widehat{f}\,)^\vee\|_{p'} \leq C\,(1+|t|)^{-\lambda} \sum_{\ell\in\Lambda} \|(\sigma_{k+\ell}\widehat{f}\,)^\vee\|_{p'}.$$

Donde $C := 2^\lambda C_1$, en cualquiera de los casos se obtiene

$$\|(\sigma_k \widehat{T(t)f}\,)^\vee\|_p \leq C\,(1+|t|)^{-\lambda} \sum_{\ell\in\Lambda} \|(\sigma_{k+\ell}\widehat{f}\,)^\vee\|_{p'}.$$

Multiplicando por $(1+|k|)^s$, y luego tomando la norma l^q en ambos lados de la desigualdad, se obtiene el resultado deseado. En efecto,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (1+|k|)^{sq} \|(\sigma_k \widehat{T(t)f}\,)^\vee\|_p^q\right)^{1/q} &\leq \left[C^q\,(1+|t|)^{-\lambda q} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (1+|k|)^{sq} \left(\sum_{\ell\in\Lambda} \|(\sigma_{k+\ell}\widehat{f}\,)^\vee\|_{p'}\right)^q\right]^{1/q} \\
&\leq C\,(1+|t|)^{-\lambda} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (1+|k|)^{sq} \left(\sum_{\ell\in\Lambda} \|(\sigma_{k+\ell}\widehat{f}\,)^\vee\|_{p'}\right)^q\right]^{1/q} \\
&\leq C\,(1+|t|)^{-\lambda} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (1+|k|)^{sq} \|(\sigma_k\widehat{f}\,)^\vee\|_{p'}^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|T(t)f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} \leq C\,(1+|t|)^{-\lambda}\,\|f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p',q}}.$$

Ahora, aplicado a la solución de la ecuación de Schrödinger, se obtiene lo deseado

$$\|u(x,t)\|_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} \leq C\,(1+|t|)^{-\lambda}\,\|u_0(x)\|_{\boldsymbol{M}^s_{p',q}}.$$

$\square$

4.2. Ecuación Lineal de Schrödinger de Orden 4

Consideremos el problema de valor inicial para la ecuación lineal siguiente

$$\begin{cases} i\partial_t u(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + \Delta u(x,t) = 0, & x\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

Antes que todo veamos que es $\Delta^2 u$

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u(x,t) &= \Delta(\Delta u(x,t)) = \Delta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x,t) + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x,t)\right) = \Delta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x,t)\right) + \cdots + \Delta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x,t)\right)\\
&= \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(x,t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^2 \partial x_1^2}(x,t) + \cdots + \frac{\partial^4 u}{\partial x_n^2 \partial x_1^2}(x,t)\right)\\
&+ \cdots + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_n^2}(x,t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^2 \partial x_n^2}(x,t) + \cdots + \frac{\partial^4 u}{\partial x_n^4}(x,t)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_1^2}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_2^2}(x,t) + \cdots + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_n^2}(x,t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_i^2}(x,t)\,.
\end{aligned}$$

Además, si le aplicamos la transformada de Föurier, obtenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta^2 u(x,t)} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_i^2}(x,t)\right)^{\wedge} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_i^2}(x,t)\right)^{\wedge} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_i^2}(x,t)\right)^{\wedge}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (2\pi i)^4 \xi_k^2 \xi_i^2 = 16\pi^4 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \xi_i^2 = 16\pi^4 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2\\
&= 16\pi^4 \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2\right) = 16\pi^4 |\xi|^2 |\xi|^2 = 16\pi^4 |\xi|^4\\
&= 16\pi^4 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \xi_1^2 + \cdots + 16\pi^4 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \xi_n^2 = 16\pi^4 \xi_1^2 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 + \cdots + 16\pi^4 \xi_n^2 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2\,.
\end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación dada, con respecto a la variable espacial x, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= (i\partial_t u(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + \Delta u(x,t))^{\wedge}(\xi,t) = i\widehat{\partial_t u}(\xi,t) + \widehat{\Delta^2 u}(\xi,t) + \widehat{\Delta u}(\xi,t)\\
&= i\partial_t \widehat{u}(\xi,t) + 16\pi^4 |\xi|^4 \widehat{u}(\xi,t) - 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi,t)\,.
\end{aligned}$$

De lo anterior, se obtiene la EDO siguiente

$$\frac{\partial}{\partial t}(\widehat{u}(\xi,t)) + \left(-16\pi^4 i|\xi|^4 + 4\pi^2 i|\xi|^2\right)\widehat{u}(\xi,t) = 0\,. \tag{4.9}$$

Además, si aplicamos la transformada a la condición inicial se sigue

$$\widehat{u}(x,0) = \widehat{u_0}(x)\,. \tag{4.10}$$

Así, el factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int\left(-16\pi^4 i|\xi|^4 + 4\pi^2 i|\xi|^2\right)dt} = e^{-16\pi^4 it|\xi|^4 + 4\pi^2 it|\xi|^2}\,,$$

luego, la solución general de la EDO dada en (4.9) es

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{\int e^{-16\pi^4 it|\xi|^4 + 4\pi^2 it|\xi|^2} \cdot 0dx + C}{e^{-16\pi^4 it|\xi|^4 + 4\pi^2 it|\xi|^2}} = Ce^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2}\,.$$

Por la condición inicial (4.10) del PVI, se sigue que

$$\widehat{u_0}(\xi) = \widehat{u}(\xi, 0) = Ce^{16\pi^4 i(0)|\xi|^4 - 4\pi^2 i(0)|\xi|^2} = C \cdot (1) = C\,.$$

Así, la solución de esta familia de EDO's con parámetro ξ, puede ser escrita como

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)\,.$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &= \left|\left(e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)\right)^{\vee}\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2 + 2\pi ix\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)e^{-2\pi iy\xi}dy\right)d\xi\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2 + 2\pi i(x-y)\xi}dyd\xi\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-it[-16\pi^4|\xi|^4 + 4\pi^2|\xi|^2 - \frac{2\pi}{t}(x-y)\xi]}d\xi\right)dy\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)| \cdot \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-it[-16\pi^4|\xi|^4 + 4\pi^2|\xi|^2 - \frac{2\pi}{t}(x-y)\xi]}d\xi\right| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)| \cdot \left|\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{k=1}^{n} e^{-it[-16\pi^4\xi_k^2(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2) + 4\pi^2\xi_k^2 - \frac{2\pi}{t}(x_k-y_k)\xi_k]}d\xi\right| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)| \cdot \prod_{k=1}^{n}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-it[-16\pi^4\xi_k^2(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2) + 4\pi^2\xi_k^2 - \frac{2\pi}{t}(x_k-y_k)\xi_k]}d\xi_k\right| dy\,.
\end{aligned}$$

Consideremos para cada $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ la función de fase

$$\phi(\xi_k) = -16\pi^4\xi_k^2(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) + 4\pi^2\xi_k^2 - \frac{2\pi}{t}(x_k - y_k)\xi_k\,.$$

Luego, derivando se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\phi'(\xi_k) &= -32\pi^4\xi_k(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) - 32\pi^4\xi_k^3 + 8\pi^2\xi_k - \frac{2\pi}{t}(x_k - y_k) \\
\phi''(\xi_k) &= -32\pi^4(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) - 64\pi^4\xi_k^2 - 96\pi^4\xi_k^2 + 8\pi^2 = -32\pi^4(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) - 160\pi^4\xi_k^2 + 8\pi^2 \\
\phi^{(3)}(\xi_k) &= -64\pi^4\xi_k - 320\pi^4\xi_k = -384\pi^4\xi_k \\
\phi^{(4)}(\xi_k) &= -384\pi^4\,.
\end{aligned}$$

Así, se sigue que $\left|\phi^{(4)}(\xi_k)\right| = 384\pi^4 > 1$ y ahora utilizando el teorema de Van der Corput obtenemos

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)| \cdot \prod_{k=1}^{n}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-it\phi(\xi_k)}d\xi_k\right| dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)| \cdot \prod_{k=1}^{n} C_4|t|^{-1/4}dy\,, \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)|(C_4)^n|t|^{-n/4}dy = C_n|t|^{-n/4}\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(y)|dy = C_n|t|^{-n/4}\|u_0(x)\|_1\,.
\end{aligned}$$

Ahora tomando supremo, lo anterior implica que

$$\|u(x,t)\|_\infty \leq C_n|t|^{-n/4}\|u_0(x)\|_1\,. \tag{4.11}$$

De otro modo, en virtud del teorema de Plancherel obtenemos

$$\begin{aligned}
\|u(x,t)\|_2 &= \left\| \left(e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi) \right)^\vee \right\|_2 = \left\| \left(\left(e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi) \right)^\vee \right)^\wedge \right\|_2 \\
&= \left\| e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi) \right\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi) \right|^2 dy \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{i\left[16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 t|\xi|^2\right]} \widehat{u_0}(\xi) \right|^2 dy \right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 \, dy \right)^{1/2} \\
&= \|\widehat{u_0}(\xi)\|_2 = \|u_0(x)\|_2 \, .
\end{aligned}$$

De aquí que

$$\|u(x,t)\|_2 = \|u_0(x)\|_2 \, . \tag{4.12}$$

Notemos que

$$u(x,t) = (\widehat{u}(\xi,t))^\vee = (e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi))^\vee = (e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2})^\vee * u_0(x).$$

Si consideramos el operador $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ dado por $T(t)f = (e^{16\pi^4 it|\xi|^4 - 4\pi^2 it|\xi|^2})^\vee * f$ y por (4.12) se tiene que $\|T(t)f\|_2 = \|f\|_2$. Además, si tomamos $T : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ por (4.11) se cumple que

$$\|T(t)f\|_\infty \leq C_n |t|^{-n/4} \|f\|_1 \, , \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

En consecuencia, por Convexidad de Riezs-Thorin se puede definir

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$$

Tal que

$$\|T(t)f\|_q \leq \left(C_n |t|^{-n/4} \right)^{1-\theta} (1)^\theta \|f\|_p = C|t|^{-n/4(1-\theta)} \|f\|_p,$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{\theta}{2}, \qquad \theta \in (0,1).$$

De lo anterior se sigue que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{y} \quad 1 - \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Así, se obtiene que

$$\|T(t)f\|_q \leq C|t|^{-n/4\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|f\|_p. \tag{4.13}$$

Por (4.13), aplicandoselo a la solución de la ecuación de Schrödinger

$$\|u(x,t)\|_q = \|T(t)u_0(x)\|_q \leq C|t|^{-n/4\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|u_0(x)\|_p \, , \qquad \forall \, x \in \mathbb{R}^n, \forall \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Teorema 4.2. *Sean $2 \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$ y $s \in \mathbb{R}$, para todo $f \in \boldsymbol{M}^s_{p',q}$ se cumple*

$$\|T(t)f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} \leq C \, (1 + |t|)^{-\lambda} \, \|f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p',q}}.$$

Donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\lambda = n/4 \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \right)$.

Demostración: Análogo a la demostración del Lema 4.1. Tomando $\lambda = n/4\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}\right)$ y teniendo encuenta la desiguadad 4.13.

□

4.3. Ecuación Korteweg-de Vries (KdV)

Consideremos el problema de valor inicial para la ecuación KdV dada por

$$\begin{cases} \partial_t v(x,t) + \partial_x^3 v(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Fourier con respecto a la variable espacial x, obtenemos

$$\widehat{\partial_t v}(\xi,t) = \partial_t \widehat{v}(\xi,t) = -(\partial_x^3 v)^\wedge(\xi,t) = 8\pi^3 i\xi^3 \widehat{v}(\xi,t) \tag{4.14}$$

$$\widehat{v}(\xi,0) = \widehat{v_0}(\xi). \tag{4.15}$$

De (4.14), tenemos

$$\widehat{\partial_t v}(\xi,t) = 8\pi^3 i\xi^3 \widehat{v}(\xi,t),$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\widehat{v}(\xi,t)\right) - 8\pi^3 i\xi^3 \widehat{v}(\xi,t) = 0. \tag{4.16}$$

Así, el factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int -8\pi^3 i\xi^3 dt} = e^{-8\pi^3 it\xi^3}.$$

Luego, la solución general de la EDO dada en (4.16) es

$$\widehat{v}(\xi,t) = \frac{\int e^{-8\pi^3 it\xi^3} \cdot 0 dx + C}{e^{-8\pi^3 it\xi^3}} = Ce^{8\pi^3 it\xi^3}.$$

Por la condición inicial (4.15) del PVI, se sigue que

$$\widehat{v_0}(\xi) = \widehat{v}(\xi,0) = Ce^{-8\pi^3 i(0)\xi^3} = C \cdot (1) = C$$

Así, la solución de esta familia de EDO's con parámetro ξ, puede ser escrita como

$$\widehat{v}(\xi,t) = e^{8\pi^3 it\xi^3}\widehat{v_0}(\xi).$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} |v(x,t)| &= \left|\left(e^{8\pi^3 it\xi^3}\widehat{v_0}(\xi)\right)^\vee\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{8\pi^3 it\xi^3}\widehat{v_0}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} e^{8\pi^3 it\xi^3 + 2\pi ix\xi}\left(\int_{\mathbb{R}} v_0(y)e^{-2\pi iy\xi}dy\right)d\xi\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} v_0(y)e^{8\pi^3 it\xi^3 + 2\pi i(x-y)\xi}dyd\xi\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} v_0(y)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-it[-8\pi^3\xi^3 - \frac{2\pi}{t}(x-y)\xi]}d\xi\right)dy\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |v_0(y)| \cdot \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-it[-8\pi^3\xi^3 - \frac{2\pi}{t}(x-y)\xi]}d\xi\right| dy. \end{aligned}$$

Consideremos la función de fase dada por $\phi(\xi) = -8\pi^3\xi^3 - \frac{2\pi}{t}(x-y)\xi$. Luego si derivamos resulta que

$$\phi'(\xi) = -24\pi^3\xi^2 - \frac{2\pi}{t}(x_k - y_k)\,, \quad \phi''(\xi) = -48\pi^3\xi \quad \text{y} \quad \phi'''(\xi) = 8\pi^2.$$

Así, se sigue que $\left|\phi^{(3)}(\xi)\right| = 48\pi^3 > 1$ y ahora por medio del teorema de Van Der Corput se obtiene

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\le \int_{\mathbb{R}} |v_0(y)| \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\phi(\xi)} d\xi \right| dy \le \int_{\mathbb{R}} |v_0(y)| \cdot C_3 |t|^{-1/3} dy\,, \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ &= C_3|t|^{-1/3} \int_{\mathbb{R}} |v_0(y)| dy = C_3 |t|^{-1/3} \|v_0(x)\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Ahora tomando supremo, lo anterior implica que

$$\|v(x,t)\|_\infty \le C_3|t|^{-1/3}\|v_0(x)\|_1 \tag{4.17}$$

Por otro lado, utilizando el teorema de Plancherel tenemos

$$\begin{aligned} \|v(x,t)\|_2 &= \left\| \left(e^{8\pi^3 it\xi^3} \widehat{v_0}(\xi) \right)^{\vee} \right\|_2 = \left\| e^{8\pi^3 it\xi^3} \widehat{v_0}(\xi) \right\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \left| e^{8\pi^3 it\xi^3} \widehat{v_0}(\xi) \right|^2 dy \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{v_0}(\xi)\right|^2 dy \right)^{1/2} = \|\widehat{v_0}(\xi)\|_2 = \|v_0(x)\|_2\,. \end{aligned}$$

De lo anterior, obtenemos

$$\|v(x,t)\|_2 = \|v_0(x)\|_2\,. \tag{4.18}$$

Nótese que, la solución puede ser reescrita como

$$v(x,t) = (\widehat{v}(\xi,t))^{\vee} = (e^{8\pi^3 it\xi^3}\widehat{v_0}(\xi))^{\vee} = (e^{8\pi^3 it\xi^3})^{\vee} * v_0(x).$$

Si consideramos el operador $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dado por $T(t)f = (e^{8\pi^3 it\xi^3})^{\vee} * f$ y por (4.18) se tiene que $\|T(t)f\|_2 = \|f\|_2$. Además, si tomamos $T : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ por (4.17) se cumple que

$$\|T(t)f\|_\infty \le C_n|t|^{-n/3}\|f\|_1\,, \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

En consecuencia, por Convexidad de Riezs -Thorin se puede definir

$$T : L^p(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R}),$$

tal que

$$\|T(t)f\|_q \le \left(C_n|t|^{-n/3}\right)^{1-\theta}(1)^\theta\|f\|_p = C|t|^{-n/3(1-\theta)}\|f\|_p.$$

De forma análoga al operador definido anteriormente

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{\theta}{2}\,, \qquad \theta \in (0,1)$$

De lo anterior se sigue que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{y} \quad 1 - \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Así, obtenemos que

$$\|T(t)f\|_q \leq C|t|^{-n/3\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\|_p. \tag{4.19}$$

Por (4.19), aplicandoselo a la solución de la ecuación KdV

$$\|v(x,t)\|_q = \|T(t)v(x,0)\|_q \leq C|t|^{-n/3\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|v_0(x)\|_p \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Teorema 4.3. *Sean $2 \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$ y $s \in \mathbb{R}$, para todo $f \in \boldsymbol{M}^s_{p',q}$ se cumple*

$$\|T(t)f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p,q}} \leq C\,(1+|t|)^{-\lambda}\,\|f\|_{\boldsymbol{M}^s_{p',q}}.$$

Donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ y $\lambda = n/3\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}\right)$.

Demostración: Análogo al Lema 4.1. Considerando $\lambda = n/3\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}\right)$ y la desigualdad 4.19. □

Bibliografía

[1] Amann, H. and Escher, J. *Analysis III.* Basel-Boston-Berlin. Vol. III (2009).

[2] Barros, J. *An Introduction to the Theory of Distributions.* Marcel Dekker, Inc. New Yor, 1973.

[3] Dijk, G. *Distribution Theory.* De Gruyter, 2013.

[4] Drábek, P. and Milota, J. *Methods of Nonlinear Analysis Applications to Differential Equations.* 2 ed. Springer Basel, New York, 2013.

[5] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis.* American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2001.

[6] Gamelin, T. *Complex Analysis.* Springer, 2000.

[7] Grubb, G. *Distributions and Operators.* Springer-Verlag New York, 2009.

[8] Iorio, R. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.* Cambridge University Press, 2001.

[9] Kreyzsyg, E. *Introductory Funtional Analysis with Aplications.* Jhon Wiley & Sons. Inc., United States of America, 1989.

[10] Linares, F. and Ponce, G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Springer, 2009.

[11] Munkres, J. *Analysis on Manifolds.* Addison-Wesley Publishing Company, Redwook City, 1991.

[12] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Differential Equations.* Springer-Verlag, 1983.

[13] Rudin, W. *Real and Complex Analysis.* 3 ed. McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1987.

[14] Follan, G. B. *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications.* 2 ed. A Wiley-Interscience Publications, 1999.

[15] Luis E. Corpa L. *Estimativas* $L^p - L^q$ *para algunas ecuaciones lineales* (Tesis de pregrado). Universidad de Córdoba, Montería, Córdoba.

[16] Hans G. Feichtinger. *Modulation spaces on locally compact Abelian group*, Technical Report, University of Vienna, 1983.

[17] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Differential Equations.* Springer Verlag, 1983.

[18] H. Triebel. *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1983.

[19] Kato. *The inclusion relations between α-modulation spaces and L_p-Sobolev spaces or local Hardy spaces*. Journal of Functional Analysis, 2017.

[20] Baoxiang, W., Lifeng, Z., & Boling, G. *Isometric decomposition operators, function spaces $E^{\lambda}_{p,q}$ and applications to nonlinear evolution equations*. Journal of Functional Analysis, 2006.

[21] Karlheinz, G. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Springer Science & Business Media, 2013.

[22] Han, J., & Wang, B. *α-modulation spaces (I) scaling, embedding and algebraic properties*. Journal of the Mathematical Society of Japan, 2014.

[23] Villamizar-Roa, É. J., & Brango, C. B. *Existence theory for the Boussinesq equation in Modulation spaces*. Universidad Industrial de Santander, Colombia. 2018.

[24] Guo, W., Fan, D., & Zhao, G. *Full characterization of the embedding relations between α-modulation spaces*. Science China Mathematics, 2018.

[25] Bergh, J., & Löfström, J. *Interpolation spaces: an introduction (Vol. 223)*. Springer Science & Business Media, 2012.

[26] Mariana M. Pérez. *La definición de la Transformada de Fourier y sus desigualdades en norma con pesos*. Universidad de Buenos Aires, 2009.

[27] Kobayashi, M. *Modulation spaces $\boldsymbol{M}^{p,q}$ for $0 < p, q \leq \infty$*. Journal of Function Spaces and Applications, 2006.

[28] Feichtinger, H. G. *Modulation spaces: looking back and ahead* . Sampling Theory in Signal and Image Processing, 2006.

[29] Wang, B., & Hudzik, H. *The global Cauchy problem for the NLS and NLKG with small rough data*. Journal of Differential Equations, 2007.

[30] Banquet, C., & Villamizar-Roa, É. *Time-decay and Strichartz estimates for the Benjamin-Bona-Mahony equation and existence of solutions on modulation spaces*. Universidad de Córdoba, 2018.