Existencia de soluciones periódicas para un sistema dinámico discreto autónomo no lineal

Reinel Luis Galue Espitia

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA
2023

Existencia de soluciones periódicas para un sistema dinámico discreto autónomo no lineal

Reinel Luis Galue Espitia

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de

Matemático

Asesor:

M. Sc. Jorge Armando Reyes Vásquez

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA
2023

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Los jurados abajo firmantes certifican que han leído y que aprueban el trabajo de grado titulado: **Existencia de soluciones periódicas para un sistema dinámico discreto autónomo no lineal**, el cual es presentado por la estudiante **Reinel Luis Galue Espitia**.

Fecha: julio de 2023

Asesor: ______________________________
M. Sc. Jorge Armando Reyes Vásquez

Jurado: ______________________________
Profesor Revisor 1

Jurado: ______________________________
Profesor Revisor 2

Resumen

El objetivo del presente trabajo es presentar algunas soluciones periódicas para un sistema dinámico discreto autónomo no lineal, por ser un tema relativamente nuevo, este trabajo puede servir como introducción a la teoría de sistemas dinámicos discretos autónomo no lineal. Aunque el estudiante del grado de Matemáticas de nuestra universidad no se encuentra familiarizado con este tema, su relativa sencillez y el interés científico que despierta la convierten, según nuestra opinión, en una excelente elección para un trabajo como el presente.

Comenzaremos este trabajo con una breve introducción a los sistemas dinámicos, algunas definiciones, teoremas y más, continuamos con el estudio para encontrar existencia de soluciones periódicas para la ecuación de tiempo discreto

$$x_{n+1} = \beta x_n - g(x_n),$$

con un parámetro $\beta > 0$ y g una función no lineal. En el primer caso donde g **es la función de McCulloch-Pitts** podemos investigar la existencia de soluciones periódicas para la ecuación de tiempo discreto y algunos valores con respecto al parámetro $\beta \in (0, \infty)$. Ya para el segundo caso que es un poco más general, encontraremos soluciones arbitrarias para la ecuación de tiempo discreto con g **una función sigmoidea** y $\beta \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.

Palabras claves: Sistemas Dinámicos, soluciones periódicas, ecuación de tiempo discreto.

Abstract

The objective of the present work is to present some periodic solutions for a nonlinear discrete autonomous nonlinear dynamical system. Being a relatively new topic, this work can serve as an introduction to the theory of nonlinear discrete autonomous nonlinear dynamical systems. Although the undergraduate student of Mathematics students at our university are not familiar with this topic, its relative simplicity and the scientific interest it arouses make it, in our opinion, an excellent choice for a paper such as the present one.

We will start this work with a short introduction to dynamical systems, some definitions, theorems and more. We continue with the study to find existence of periodic solutions for the discrete time equation

$$x_{n+1} = \beta x_n - g(x_n),$$

with a parameter $\beta > 0$ and g a nonlinear function. In the first case where g **is the McCulloch-Pitts function** we can investigate the existence of periodic solutions for the discrete time equation and some values with respect to the parameter $\beta \in (0, \infty)$. Already for the second case which is a little more general, we will find arbitrary solutions for the discrete time equation with g **a sigmoid function** and $\beta \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.

Keywords: Dynamic Systems, periodic solutions, discrete time equation.

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a Dios, quien me dio las fuerzas y sabiduria para mantenerme en pie durante toda la carrera. Gracias a Él en su infinita misericordia formó un hombre en mí con principios y valores. A mis padres, Jorge Galue y Rosalba Espitia y mis hermanos, principalmente a Isaira Galue quien hizo todo lo posible para que estudiara una carrera profesional, a mis compañeros de la carrera, Jean Carlos Otero, Luisa Manchego, Elsy Guevara, Kelly Hernandez, Jose Simancas y Mairol Verbel, su amistad y compañerismo fueron de gran ayuda para poder seguir en esos momentos de crisis emocional. A la Universidad de Córdoba por brindarme una formación académica de calidad, a mi asesor Jorge Armando Reyes Vásquez por todo su valioso tiempo, comentarios y sugerencias que me ayudaron en todo el desarrollo de este trabajo, a los docentes del Departamento de Matemáticas y Estadística, por compartir de su conocimiento con paciencia y amor para la formación de profesionales en el área de las matemáticas.

Montería, Colombia — Reinel Luis Galue Espitia

julio de 2023

Índice general

Tabla de Notaciones

$\mathbb{R}$	El conjunto de los números reales
$\mathbf{I}$	Un intervalo de $\mathbb{R}$
$\{\mathbf{I}, f\}$	Sistema dinámico discreto
$f^n(x)$	La n-ésima iteración de x bajo la función f
$\mathcal{O}(x_0)$	La órbita de $x_0 \in \mathbf{I}$ bajo la función f
x_{n+1}	Ecuación característica, $x_{n+1} = f^{n+1}(x) = f(x_n)$
$f(x_s) = x_s$	Punto fijo
$L(x_0)$	El conjunto de todos los puntos límite de la órbita $\mathcal{O}(x_0)$

Introducción

Un sistema dinámico es un sistema que evoluciona con el tiempo, el cual puede modelarse por un sistema de ecuaciones diferenciales, si el tiempo es continuo, o por un sistema de ecuaciones en diferencias, si el tiempo es discreto.
Muchas veces el interés no está en encontrar soluciones exactas a las ecuaciones que tienen dichos sistemas dinámicos, sino más bien en poder contestar preguntas como si el sistema se estabiliza a largo plazo o si el comportamiento de sistema a largo plazo depende de las condiciones iniciales. Es decir, el foco está puesto en hacer un análisis cualitativo del sistema en muchas oportunidades porque es difícil o imposible hallar explícitamente las soluciones.

En esta monografía se pretende estudiar la existencia de soluciones periódicas para un sistema dinámico discreto autónomo no lineal, considerando la ecuación de tiempo discreto

$$x_{n+1} = \beta x_n - g(x_n), \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{0.1}$$

donde $\beta \in (0, \infty)$, g es una función no lineal.

En el primer Capítulo se enuncian definiciones y teoremas que resultan ser necesarios en el desarrollo de este trabajo como lo es el **Teorema del valor intermedio (1.2.1), Teorema del punto fijo (1.2.2),** entre otros.

En el segundo capítulo se hace un estudio más profundo en cuanto a la función g y al parámetro β.

Con respecto a la función g de la ecuación (0.1), a continuación profundizaremos en los siguientes casos.

1. g **es la función de McCulloch-Pitts;** en este caso g está definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0 \\ -1 & si \quad x < 0, \end{cases}$$

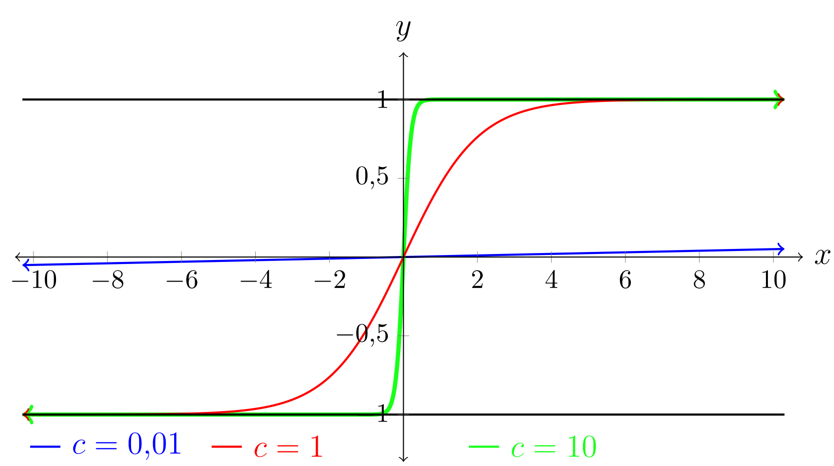
y estudiaremos la existencia de soluciones periódicas de (0.1) para $\beta \in (0,1)$, $\beta = 1$ y $\beta \in (1, \infty)$.

2. g **es una función sigmoidea,** es decir; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existen $r, \epsilon \infty \mathbb{R}^+$ que cumplen:

$$|g(x) - 1| \leq \epsilon \quad si \quad x \geq r,$$
$$|g(x) + 1| \leq \epsilon \quad si \quad x \leq -r.$$

Bajo cierta condición encontraremos soluciones arbitrarias para (0.1).

Ejemplo 1. La gráfica de la función g_c dada por $g_c(x) = \frac{1-e^{-cx}}{1+e^{-cx}}$, para $c > 0$. Graficaremos $g_c(x)$ con $c = 0{,}01$, $c = 1$ y $c = 10$.



Más adelante mostraremos que $g_c(x)$ es una función sigmoidea

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y se enuncian algunos teoremas que serán usados en algunos resultados más adelante. Los temas principales de este capítulo son los sistemas dinámicos discretos que denotaremos $\{\mathbf{I}\ , f\}$ y sus respectivas soluciones, punto fijo, punto fijo estable y órbitas periódicas.

1.1. Conceptos básicos de los sistemas dinámicos

A continuación se enuncian algunas definiciones de sistemas dinámicos, solo enunciaremos las definiciones más relevantes para la realización de este trabajo, cualquier otras definiciones sobre este tema pueden encontrarse en otros textos, por ejemplo ver [2]

Definición 1.1.1. Un sistema dinámico es una terna (S, T, Φ) formada por un espacio topológico S, llamado espacio de fase, un semigrupo aditivo T de $\mathbb{R}$ (*con elemento neutro*), llamado espacio de tiempo y una función

$$\Phi : T \times S \longrightarrow S$$

que satiface:

1 Φ es una función continua.

2 $\Phi(0,x)=x$, para todo $x\in S$.

3 $\Phi(t,\Phi(s,x))=\Phi(t+s,x)$, para todo $t,s\in T$, y todo $x\in S$.

A la función Φ se le conoce como evolución del sistema.

De una manera menos formal, un sistema dinámico es una manera de describir la evolución en el tiempo de todos los puntos de un sistema S. Un semigrupo aditivo T de $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ cerrado para la suma que contiene al 0. Con esta definición, el espacio de tiempos T puede ser tanto un subconjunto discreto de $\mathbb{R}$ (los números naturales, por ejemplo) como un intervalo o unión de intervalos de $\mathbb{R}$. La función Φ determina la evolución del sistema con respecto al tiempo, propiciando todos los cambios que desarrolle el sistema en un futuro.

Una clasificación básica de los sistemas dinámicos se obtiene según la naturaleza del espacio de tiempo T. Diremos que un sistema dinámico es continuo cuando su espacio de tiempo es $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ o $\mathbb{R}^-\cup\{0\}$, principalmente. Un sistema dinámico se considerará discreto cuando el espacio de tiempo T es $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ o $\mathbb{Z}^-\cup\{0\}$. Es fácil ver que el flujo de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales autónomas

$$Y'=AY,$$

con $A\in\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ genera un sistema dinámico continuo, donde el espacio de fase es $\mathbb{R}^n$, el espacio de tiempos es $\mathbb{R}$ y el flujo del sistema diferencial es la evolución del sistema dinámico. Se puede mejorar este resultado para un sistema $Y'=F(Y)$, con $F:\Omega\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ y $F\in C^1(\Omega)$, añadiendo hipótesis sobre el dominio de definición de las soluciones. Esto último establece un primer contacto entre la teoría de ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos.

Los sistemas dinámicos discretos en los que centraremos nuestra atención son aquellos en los que el espacio de tiempo es numerable. Más específicamente, nos centraremos en sistemas en donde el espacio de tiempo será $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Un sistema dinámico de este tipo puede ser visto, equivalentemente, como generado por una función continua $f : S \to S$, ya que si tomamos $f(x) = \Phi(1, x)$, definimos

$$f^n = f \underbrace{\circ f \circ f \circ \cdots \circ}_{n-veces} f$$

y consideremos f^0 como la identidad, entonces $\Phi(n, x) = f^n(x)$ para todo $x \in S$ y $n \geq 0$

Definición 1.1.2. Sea $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}$ una función, donde $\mathbf{I}$ es un intervalo de $\mathbb{R}$. Las iteraciones de $x \in \mathbf{I}$ bajo la función f son

$$\begin{aligned}
f^0(x) &= x \\
f^1(x) &= f(x) = f(f^0(x)) \\
f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f^1(x)) \\
f^3(x) &= (f \circ f \circ f)(x) = f(f^2(x)) \\
&\vdots \\
f^n(x) &= (f \underbrace{\circ f \circ f \circ \cdots \circ}_{n-veces} f)(x) = f(f^{n-1}(x)).
\end{aligned}$$

Donde $f^n(x)$ denota la n-ésima iteración de x bajo la función f, y la sucesión

$$\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^n(x) \dots\} = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

describe la evolución del estado x en el tiempo, la cual se llama la órbita de $x_0 \in \mathbf{I}$ bajo la función f que la denotaremos $\mathcal{O}(x_0)$.

Definición 1.1.3. Sea $\mathbf{I}$ un intervalo contenido en $\mathbb{R}$ que contiene al menos dos puntos distintos y sea $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ una función continua. La dupla $\{\mathbf{I}, f\}$ se conoce como sistema dinámico discreto sobre $\mathbf{I}$ de primer orden.

Un sistema dinámico discreto es de orden k si $x_k = f(x_o, x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$, o, de forma más general,

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k-1}).$$

Podemos clasificar los sistemas dinámicos discretos en función del tipo de aplicación que los define. Así, diremos que un sistema dinámico discreto es lineal si f es lineal; y no lineal si f es no lineal.

Decimos también que el sistema es autónomo si el tiempo no influye de forma explícita en la definición de la función de evolución f. El sistema es no autónomo si $f = f(n, x_n)$.

Hay muchos problemas que pueden describirse, al menos con una aproximación burda, mediante una simple ecuación en diferencias de primer orden.

$$f^{n+1}(x) = x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

Los estudios de las propiedades dinámicas de tales modelos pueden proporcionarnos información útil. Existen muchos trabajos en esta área, desde que Li, Yorke y May notaron que incluso los modelos matemáticos simples pueden mostrar dinámicas muy complicadas, vease [6]. Algunos investigadores han prestado más atención a las soluciones periódicas y al comportamiento "caótico" de los sistemas dinámicos discretos. Sin embargo, la mayoría de los trabajos sobre (1.1) se basan en el supuesto que f es continua, pero, en algunos modelos de redes neuronales, f no es continua. En este trabajo, consideramos la siguiente ecuación de tiempo discreto:

$$x_{n+1} = \beta x_n - g(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

donde $\beta \in (0, \infty)$, g es una función no lineal.

La ecuación (1.2) surge como una red en tiempo discreto de una sola neurona donde β es la desintegración interna, g una función continua no lineal. Consideramos dos casos de la función de señal:

1. g es la función de **McCulloch-Pitts**,

2. g es una función sigmoidea.

A continuación daremos las definiciones más relevantes para la realización de este trabajo

Definición 1.1.4. Un punto x_s se llama punto fijo de (1.1) si

$$f(x_s) = x_s$$

Definición 1.1.5. Un punto fijo x_s de (1.1) es estable si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x_0 - x_s| \leq \delta \textit{ implica que } |x_n - x_s| \leq \epsilon \textit{ para todo } n \geq 1$$

donde $x_n = f^n(x_0)$

Un punto fijo x_s que no es estable, se dice que es inestable.

Definición 1.1.6. Una órbita $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ de (1.1) se dice que es periódica de período $p \geq 2$, si cumple la siguiente condición.

$$x_p = x_0 \qquad y \qquad x_i \neq x_0 \qquad con \qquad 1 \leq i \leq p-1.$$

Ejemplo 2. La función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 4x(1-x)$ tiene un punto fijo en 0, es decir $h(0) = 0$. El punto 1 no está fijo, pero $h(1) = 0$, por lo que después de una iteración, 1 está fijo en 0. Además, $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ y $h^2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ por lo que después de dos iteraciones $\frac{1}{2}$ se fija en 0. También, $h\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $h^2\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}\right) = 1$ y $h^3\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}\right) = 0$, por lo que después de tres iteraciones $\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$ se fija en 0. Así

$$\mathcal{O}(1) = \{1, 0, \ldots\}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 0, \ldots\right\}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}\right) = \left\{\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0, \ldots\right\}.$$

Con suficiente paciencia, es posible encontrar puntos que estén fijados por h después de cualquier número de iteraciones.

Definición 1.1.7. Una órbita periódica $\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_{p-1}, \ldots\}$ de período p es estable si cada punto x_i, con $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ es un punto fijo estable del sistema dinámico $x_{n+1} = f^p(x_n)$. Una órbita periódica $\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_{p-1}, \ldots\}$ de período p que no es estable se dice que es inestable.

Definición 1.1.8. Se dice que un punto z es un punto límite de $\mathcal{O}(x_0)$ si existe una subsucesión $\{x_{n_k} : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ de $\mathcal{O}(x_0)$ tal que $|x_{n_k} - z| \to 0$ cuándo $k \to \infty$. El conjunto límite $L(x_0)$ de la órbita $\mathcal{O}(x_0)$ es el conjunto de todos los puntos límite de la órbita.

Definición 1.1.9. Se dice que una órbita $\mathcal{O}(x_0)$ es asintóticamente periódica si su límite establecido es una órbita periódica. Una órbita $\mathcal{O}(x_0)$ tal que $x_{n+p} = x_n$ para algunos $n \geq 1$ y algunos $p \geq 2$ se dice que es eventualmente periódica, de periodo p.

1.2. Teorema del valor intermedio y Teorema del punto fijo

En esta sección enunciaremos y demostraremos tres de los Teoremas mas influyentes para que se den los resultados deseados en este trabajo, como lo es el Teorema del valor intermedio, del punto fijo, y por último y no menos importante el Teorema de puntos periódico con periodo arbitrario.

Teorema 1.2.1 (Teorema del valor intermedio). Sea $\mathbf{I} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}$ una función continua en $\mathbf{I}$. Si $f(a) < f(b)$ y c es un número tal que $f(a) < c < f(b)$, entonces existe un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.

Este resultado también se da para $f(a) > f(b)$.

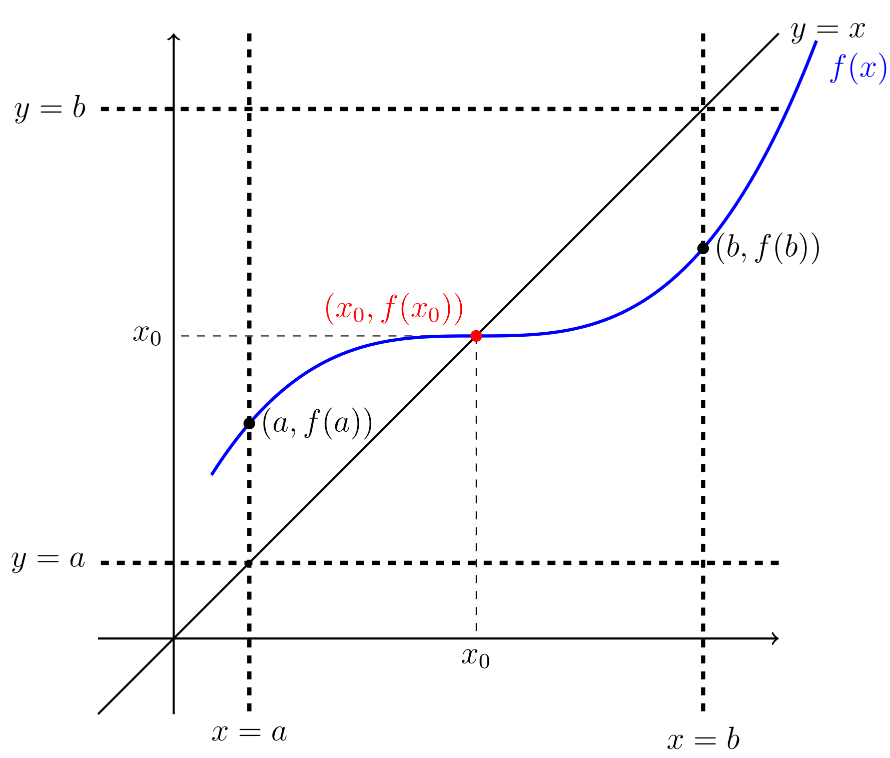
Demostración. Véase [8] **Teorema 5.3.7** página 138. □

Teorema 1.2.2 (**Teorema del punto fijo**). Sea $\mathbf{I} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}$ una función continua en $\mathbf{I}$. Entonces f tiene por lo menos un punto fijo, esto es que existe $x_0 \in \mathbf{I}$ tal que $f(x_0) = x_0$

Demostración. Supongamos que $f(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, y definamos la función $g(x) = f(x) - x$ que es continua por ser diferencia de funciones continuas. Ahora, si $f(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $a \leq f(x) \leq b$, sin perdida de generalidad suponemos que $a \leq f(a)$ y $f(b) \leq b$ para todo $f(x) \in [a, b]$. Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$ se cumple, luego $0 < f(a) - a$ y $f(b) - b < 0$ se sigue que $g(b) = f(b) - b < 0 < f(a) - a = g(a)$, de donde $g(b) < 0 < g(a)$ y por ser g continua, entonces por **Teorema 1.2.1** tenemos que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$, por lo tanto $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$ entonces $f(x_0) - x_0 = 0$. Así $f(x_0) = x_0$.

$\square$

Un punto fijo no es más que la intersección de la gráfica de la función con la recta $y = x$ como se muestra en la siguiente figura.



Lema 1.2.3. Sean $J = [a, b]$ y $I = [c, d]$ intervalos cerrados y acotados. Sea $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua en J que satiface $f(J) \supset I$. Entonces existe un intervalo J_0 tal que $J_0 \subset J$ y $f(J_0) = I$.

Demostración. Dado que f está definida en J e $I \subset f(J)$, entonces existe $x_0 \in J$ tal que $f(x_0) = c$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que existe $y_0 \in (x_0, b]$, tal que $f(y_0) = d$.
Ahora, sea $x_2 = \min A$, donde $A = \{y \in [x_0, b] : f(y) = d\}$, y sea $x_1 = \max B$ con $B = \{x \in [x_0, x_2] : f(x) = c\}$. Asi, existe $J_0 = [x_1, x_2] \subset J$.
Veamos que $f(J_0) = I$. En efecto. Supongamos que $c < d$ y sea $p \in f(J_0)$, entonces existe $q \in J_0$ tal que $f(q) = p$. Si $q = x_1$ ó $q = x_2$, listo ya que $x_1 \in B$ y $x_2 \in A$.
Supongamos que $q \in (x_1, x_2)$ y veamos que $p \in (c, d)$.
Razonemos por reducción al absurdo, esto es que $q \in (x_1, x_2)$ y $p \notin (c, d)$, entonces $x_1 < q < x_2$ y $p < c$ ó $p > d$.
Si $p < c$, y dado que $p = f(q) < c < f(x_2) = d$, por **Teorema 1.2.1**, tenemos que existe $h \in (q, x_2) \subset [x_0, x_2]$, tal que $f(h) = c$, esto es que $h \in B$ y además $x_1 < h$ absurdo, ya que $x_1 = \max B$.
Si $p > d$, razonando de la misma manera se tiene que existe $h_0 \in A$ y $h_0 < x_2$, absurdo ya que $x_2 = \min A$.
Por lo tanto $p \in I$. De donde $f(J_0) \subset I$.
Sea $y \in I$, dado que $I \subset f(J)$ y f está definida en J, se tiene que existe $x \in J$ tal que $f(x) = y$. Si $y = c$ o $y = d$, entonces tomamos $x = x_1$ o $x = x_2$.
Sea $y \in (c, d)$ y dado que $x_1 \in B$ y $x_2 \in A$, entonces $c = f(x_1) < y < f(x_2) = d$, luego por **Teorema 1.2.1** existe $x_* \in [x_1, x_2]$, tal que $f(x_*) = y$, dado que y es arbitrario se tiene que $I \subset f(J_0)$.
De todo lo anterior tenemos que $f(J_0) = I$.

$\square$

Teorema 1.2.4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que f tiene un punto periódico de período tres. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, f tiene punto periódico de período m, es decir, de período arbitrario.

Demostración. Sean $\{a, b, c\}$ una órbita periódica de periodo tres de f. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a < b < c$, con $f(a) = b$, $f(b) = c$ y $f(c) = a$. (El caso $f(a) = c$ es análogo, considerando otros intervalos e invirtiendo el razonamiento).

Sean $\mathbf{I}_0 = [a, b]$, $\mathbf{I}_1 = [b, c]$, luego por el **Teorema 1.2.1** implica que $\mathbf{I}_1 \subset f(\mathbf{I}_0)$, $\mathbf{I}_1 \subset f(\mathbf{I}_1)$ y $\mathbf{I}_0 \subset f(\mathbf{I}_1)$. Como $\mathbf{I}_1 \subset f(\mathbf{I}_1)$, entonces por **Teorema 1.2.2** existe $x_0 \in \mathbf{I}_1$, tal que $f(x_0) = x_0$, es decir, encontramos un punto fijo en $\mathbf{I}_1$.

Sea $n > 1$. Supongamos que existen una sucesión de intervalos cerrados

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n,$$

verifiquemos las siguientes propiedades:

$$A_0 = \mathbf{I}_1; \tag{1.3}$$

$$f(A_k) = A_{k-1} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n-2; \tag{1.4}$$

$$f^k(A_k) = \mathbf{I}_1 \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n-2; \tag{1.5}$$

$$f^{n-1}(A_{n-1}) = \mathbf{I}_0; \tag{1.6}$$

$$f^n(A_n) = \mathbf{I}_1. \tag{1.7}$$

Como $A_n \subset \mathbf{I}_1$ por (1.7) y el **Teorema 1.2.2** se tiene que f^n tiene un punto fijo en A_n, o lo que es lo mismo, f tiene un punto periódico de periodo menor o igual que n en A_n. Veamos que tiene periódo n. En efecto
Supongaos que $f^n(x) = x$, con $x \in A_n$. Entonces (1.5) implica que

$$\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-2}(x)\} \subset \mathbf{I}_1 = [b, c]$$

y (1.6) implica que $f^{n-1}(x) \in \mathbf{I}_0 = [a, b]$. Si $x = c$, entonces $f(x) = a \notin \mathbf{I}_1$. Como $f^{n-1}(x)$ es la única de las n primeras iteradas de x bajo la función f que no esta en

$\mathbf{I}_1$, entonces $n = 2$. Pero esto contradice el hecho de que c es de periodo tres, de donde $x \in [b, c)$.

Si $x = b$, entonces $n = 3$ ya que $f^2(x) = a \notin \mathbf{I}_1$ y la única iterada que no se encuentra en $\mathbf{I}_1$ es $f^{n-1}(x)$.

Supongamos que $n \neq 3$, luego x ha de estar en el intervalo abierto (b, c). Como $f^{n-1}(x) \in \mathbf{I}_0 = [a, b]$, entonces $f^{n-1}(x) \neq x$.
Si el período de x fuera menor que $n - 1$, entonces (1.5) y el hecho de que $x \notin \{b, c\}$ implica que la órbita de x está completamente contenido en (b, c), lo que contradice a (1.6). Como $f^{n-1}(x) \notin (b, c)$, entonces x tiene forzadamente periodo n.

Para completar la demostración de este teorema, demostraremos que tal secuencia de conjuntos cerrados existe para cada número natural mayor que 1. Obviamente, podemos elegir A_0 de modo que $A_0 = \mathbf{I}_1$ y se satisfaga la propiedad (1.3). Para el resto de las propiedades usaremos la siguiente

Como $A_0 = \mathbf{I}_1$ y $f(\mathbf{I}_1) \supset \mathbf{I}_1$, entonces $f(A_0) \supset A_0$, luego por **Lema 1.2.3** existe $A_1 \subset A_0$ tal que $f(A_1) = A_0$. De donde $A_1 \subset A_0 = f(A_1)$. Nuevamente por **Lema 1.2.3** existe $A_2 \subset A_1$ de modo que $f(A_2) = A_1$. Repitiendo este proceso de esta manera, podemos definir A_k para $k = 1, 2, \ldots, n-2$ de tal forma que satiface $A_k \subset A_{k-1}$ y $f(A_k) = A_{k-1}$, de donde se obtiene (1.4). Dado que $f(A_k) \supset A_k$, por **Lema 1.2.3** $f(A_k) = A_{k-1}$ para cada k, entonces

$$
\begin{aligned}
f^2(A_k) &= f(f(A_k)) = f(A_{k-1}) = A_{k-2} \\
f^3(A_k) &= f(f^2(A_k)) = f(A_{k-2}) = A_{k-3} \\
&\vdots \\
f^{k-1}(A_k) &= f(f^{k-2}(A_k)) = f(A_{k-(k-1)}) = A_2 = A_1 \\
f^k(A_k) &= f(f^{k-1}(A_k)) = f(A_1) = A_0 = \mathbf{I}_1
\end{aligned}
$$

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n-2$, obteniendo (1.5). Ahora, dado que

$$f^{n-1}(A_{n-2}) = f(f^{n-2}(A_{n-2})) = f(\mathbf{I}_1) \supset \mathbf{I}_0.$$

Así, por **Lema 1.2.3** existe obtenemos la existencia de $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ tal que $f^{n-1}(A_{n-1}) = \mathbf{I}_0$, que equivale a (1.6). Por último

$$f^{n}(A_{n-1}) = f(f^{n-1}(A_{n-1})) = f(\mathbf{I}_0) \supset \mathbf{I}_1,$$

nuevamente por **Lema 1.2.3** existe $A_n \subset A_{n-1}$ tal que $f^n(A_n) = \mathbf{I}_1$, donde se obtiene (1.7). Esto concluye la demostración.

□

El **Teorema del punto fijo** también se cumple para algúnos subconjutos de $\mathbb{R}^n$ como se encuentra a continuación como **(Teorema generalizado del punto fijo de Brouwer).**

Teorema 1.2.5 (**Teorema generalizado del punto fijo de Brouwer**)**.** Sea Q un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Toda función $f : Q \longrightarrow Q$ continua tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Véase [7] **Teorema 3.2** página 19. □

Capítulo 2

Existencia de soluciones periódicas para $\{\mathbf{I}, f\}$

En este Capítulo se pretende estudiar la existencia de soluciones periódicas para un sistema dinámico discreto autónomo no lineal, considerando la ecuación de tiempo discreto.

$$x_{n+1} = \beta x_n - g(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.1}$$

Donde el parámetro $\beta \in \mathbb{R}$ y g una función definida en cada sección.

2.1. g es la función de McCulloch-Pitts;

En está sección asumiremos que $\beta \in (0, \infty)$ y g es la no linealidad McCulloch-Pitts definida por.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0 \\ \\ -1 & si \quad x < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Primero consideramos (2.1) cuando $\beta \in (0, 1)$.

Lema 2.1.1. Supongamos que $\beta \in (0,1)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \beta x - g(x)$ con g la función dada por (2.2). Si

$$0 < \left| x_0 - \frac{1}{\beta+1} \right| < \frac{1}{\beta+1},$$

entonces

$$\left| f^{2n}(x_0) - \frac{1}{\beta+1} \right| = \beta^{2n} \left| x_0 - \frac{1}{\beta+1} \right| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Notemos que.

$$\begin{aligned} & 0 < \left| x_0 - \frac{1}{\beta+1} \right| < \frac{1}{\beta+1} \\ \Rightarrow \quad & -\frac{1}{\beta+1} < x_0 - \frac{1}{\beta+1} < \frac{1}{\beta+1} \\ \Rightarrow \quad & 0 < x_0 < \frac{2}{\beta+1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si $\beta < 1$, se tiene que $2\beta < 1 + \beta$, luego $\frac{2}{1+\beta} < \frac{1}{\beta}$. Por (2.3) podemos decir que $0 < x_0 < \frac{1}{\beta}$. Razonemos por inducción. Para $n = 1$.
Dado que $x_0 > 0$ entonces $f^1(x_0) = f(x_0) = \beta x_0 - g(x_0) = \beta x_0 - 1$. Luego, si $x_0 < \frac{1}{\beta}$, entonces $\beta x_0 < 1$ esto es $\beta x_0 - 1 < 0$ y asi $f(x_0) = \beta x_0 - 1 < 0$. Ahora,

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(\beta x_0 - 1) = \beta(\beta x_0 - 1) - g(\beta x_0 - 1) = \beta^2 x_0 - \beta - (-1).$$

Por lo tanto $f^2(x_0) = \beta^2 x_0 - \beta + 1$. Así

$$\begin{aligned} \left| f^2(x_0) - \frac{1}{\beta+1} \right| &= \left| \beta^2 x_0 - \beta + 1 - \frac{1}{\beta+1} \right| = \left| \beta^2 x_0 - \left(\beta - 1 + \frac{1}{\beta+1} \right) \right| \\ &= \left| \beta^2 x_0 - \frac{\beta^2 - 1 + 1}{\beta+1} \right| = \left| \beta^2 x_0 - \frac{\beta^2}{\beta+1} \right| \\ &= \beta^2 \left| x_0 - \frac{1}{\beta+1} \right|, \quad \text{ya que } \beta^2 > 0. \end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n = k$. Puesto que $\beta \in (0,1)$, etnoces $\beta^{2k} > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, esto es

$$\left| f^{2k}(x_0) - \frac{1}{\beta+1} \right| = \beta^{2k} \left| x_0 - \frac{1}{\beta+1} \right|,$$

y veamos que se cumple para $n = k+1$. En efecto, como

$$\left|f^{2k}(x_0) - \frac{1}{\beta+1}\right| = \beta^{2k}\left|x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right|.$$

Entonces

$$f^{2k}(x_0) = \pm\beta^{2k}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1}.$$

Si

$$f^{2k}(x_0) = \beta^{2k}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1},$$

notemos que

$$\begin{aligned}
& x_0 - \frac{1}{\beta+1} > -\frac{1}{\beta+1} \\
\Rightarrow\quad & \beta^{2k}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) > -\frac{\beta^{2k}}{\beta+1} \\
\Rightarrow\quad & \beta^{2k}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1} > -\frac{\beta^{2k}}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+1} \\
\Rightarrow\quad & \beta^{2k}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1} > -\frac{1-\beta^{2k}}{\beta+1} > 0 \\
\Rightarrow\quad & f^{2k}(x_o) = \beta^{2k}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{\beta^{2k}}{\beta+1} > 0,
\end{aligned}$$

luego $g\left(f^{2k}(x_0)\right) = 1$, de donde

$$\begin{aligned}
f^{2k+1}(x_o) &= \beta\left(\beta^{2k}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1}\right) - 1 \\
&= \beta^{2k+1}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{\beta}{\beta+1} - 1 \\
&= \beta^{2k+1}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{1}{\beta+1}.
\end{aligned}$$

Ahora, dado que $\beta \in (0,1)$ y

$$x_0 - \frac{1}{\beta+1} < \frac{1}{\beta+1},$$

entonces

$$
\begin{aligned}
& x_0 - \frac{1}{\beta+1} < \frac{1}{\beta+1} \\
\Rightarrow \quad & \beta^{2k+1}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) < \frac{\beta^{2k+1}}{\beta+1} \\
\Rightarrow \quad & \beta^{2k+1}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{1}{\beta+1} < \frac{\beta^{2k+1}}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+1} \\
\Rightarrow \quad & \beta^{2k}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{1}{\beta+1} < \frac{\beta^{2k+1}-1}{\beta+1} < 0 \\
\Rightarrow \quad & f^{2k+1}(x_o) = \beta^{2k+1}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{\beta^{2k}}{\beta+1} < 0,
\end{aligned}
$$

esto es $g\left(f^{2k+1}(x_0)\right) = -1$, y

$$
\begin{aligned}
f^{2k+2}(x_o) &= \beta\left(\beta^{2k+1}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{1}{\beta+1}\right) + 1 \\
&= \beta^{2k+2}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{\beta}{\beta+1} + 1 \\
&= \beta^{2k+2}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1}.
\end{aligned}
$$

Así

$$
f^{2(k+1)}(x_0) - \frac{1}{\beta+1} = \beta^{2(k+1)}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right).
$$

Ahora, si

$$
f^{2k}(x_0) = -\beta^{2k}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1},
$$

y razonando de forma análoga al caso anterior podemos verificar que

$$
\begin{aligned}
& f^{2k}(x_0) = -\beta^{2k}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1} > 0 \\
\Rightarrow \quad & f^{2k+1}(x_0) = -\beta^{2k+1}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{1}{\beta+1} < 0 \\
\Rightarrow \quad & f^{2k+2}(x_0) = -\beta^{2k+2}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1}.
\end{aligned}
$$

Así

$$
f^{2(k+1)}(x_0) - \frac{1}{\beta+1} = -\beta^{2(k+1)}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right).
$$

De donde

$$f^{2k}(x_0) = \pm\beta^{2k}\left(x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto

$$\left|f^{2n}(x_0) - \frac{1}{\beta+1}\right| = \beta^{2n}\left|x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Lema 2.1.2. Supongamos que $\beta \in (0,1)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \beta x - g(x)$ con g la función dada por (2.2). Si

$$0 < \left|x_0 + \frac{1}{\beta+1}\right| < \frac{1}{\beta+1}.$$

Entonces

$$\left|f^{2n}(x_0) + \frac{1}{\beta+1}\right| = \beta^{2n}\left|x_0 + \frac{1}{\beta+1}\right|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Razonando de forma análoga al **Lema 2.1.1** tenemos que $-\frac{1}{\beta} < x_0 < 0$. Luego usando inducción.

Para $n = 1$. Si $x_0 < 0$ entonces $f^1(x_0) = f(x_0) = \beta x_0 - g(x_0) = \beta x_0 + 1$. Luego, si $-\frac{1}{\beta} < x_0$, entonces $-1 < \beta x_0$ esto es $\beta x_0 + 1 > 0$ y asi $f(x_0) = \beta x_0 + 1 > 0$.

Ahora,

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(\beta x_0 + 1) = \beta(\beta x_0 + 1) - g(\beta x_0 + 1) = \beta^2 x_0 + \beta - 1.$$

Por lo tanto, $f^2(x_0) = \beta^2 x_0 + \beta - 1$. Así

$$\begin{aligned}
\left|f^2(x_0) + \frac{1}{\beta+1}\right| &= \left|\beta^2 x_0 + \beta - 1 + \frac{1}{\beta+1}\right| = \left|\beta^2 x_0 + \left(\beta - 1 + \frac{1}{\beta+1}\right)\right| \\
&= \left|\beta^2 x_0 + \frac{\beta^2 - 1 + 1}{\beta+1}\right| = \left|\beta^2 x_0 + \frac{\beta^2}{\beta+1}\right| \\
&= \beta^2\left|x_0 + \frac{1}{\beta+1}\right| \quad \text{ ya que } \beta^2 > 0.
\end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n = k$, esto es,

$$\left|f^{2k}(x_0) + \frac{1}{\beta+1}\right| = \beta^{2k}\left|x_0 + \frac{1}{\beta+1}\right|,$$

y veamos que se cumple para $n = k + 1$. En efecto, como

$$\left| f^{2k}(x_0) + \frac{1}{\beta + 1} \right| = \beta^{2k} \left| x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right|,$$

entonces

$$f^{2k}(x_0) = \pm\beta^{2k} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right) - \frac{1}{\beta + 1}.$$

Luego

$$f^{2k}(x_0) = \beta^{2k} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right) - \frac{1}{\beta + 1}.$$

De manera anáoga al **Lema 2.1.1** podemos verificar que

$$\begin{aligned} & f^{2k}(x_0) = \beta^{2k} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right) - \frac{1}{\beta + 1} < 0 \\ \Rightarrow \quad & f^{2k+1}(x_0) = \beta^{2k+1} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right) + \frac{1}{\beta + 1} > 0 \\ \Rightarrow \quad & f^{2k+2}(x_0) = \beta^{2k+2} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right) - \frac{1}{\beta + 1}. \end{aligned}$$

Así

$$f^{2(k+1)}(x_0) + \frac{1}{\beta + 1} = \beta^{2(k+1)} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right).$$

Ahora, si

$$f^{2k}(x_0) = -\beta^{2k} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right) - \frac{1}{\beta + 1}$$

entonces

$$\begin{aligned} & f^{2k}(x_0) = -\beta^{2k} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right) - \frac{1}{\beta + 1} < 0 \\ \Rightarrow \quad & f^{2k+1}(x_0) = -\beta^{2k+1} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right) + \frac{1}{\beta + 1} > 0 \\ \Rightarrow \quad & f^{2k+2}(x_0) = -\beta^{2k+2} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right) - \frac{1}{\beta + 1}, \end{aligned}$$

en consecuencia

$$f^{2(k+1)}(x_0) + \frac{1}{\beta + 1} = -\beta^{2(k+1)} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right),$$

de donde

$$f^{2k}(x_0) = \pm\beta^{2k} \left(x_0 + \frac{1}{\beta + 1} \right) - \frac{1}{\beta + 1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto

$$\left|f^{2n}(x_0)+\frac{1}{\beta+1}\right|=\beta^{2n}\left|x_0+\frac{1}{\beta+1}\right|, \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

$\square$

Lema 2.1.3. Supongamos que $\beta\in(0,1)$ y sea g la función dada por (2.2), entonces para cada $x_0\geq 0$ existe $n_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $f^i(x_0)=x_i\geq 0$, para $0\leq i\leq n_0$ y $f^{n_0+1}(x_0)=x_{n_0+1}<0$.

Demostración. Sea $x_0\geq 0$, entonces $x_1=\beta x_0-1$, luego $x_1<0$ si y solo si $x_0<\frac{1}{\beta}$. Por tanto, si $0\leq x_0<\frac{1}{\beta}$ podemos tomar $n_0=0$. Supongamos que $x_0\geq\frac{1}{\beta}$. Nótese que si $x_j\geq 0$ con $0\leq j\leq n_0$ entonces

$$\begin{aligned}
x_1&=\beta x_0-1,\\
x_2&=\beta^2x_0-\beta-1,\\
x_3&=\beta^3x_0-\beta^2-\beta-1,\\
&\vdots\\
x_j&=\beta^jx_0-\beta^{j-1}-\beta^{j-2}-\cdots-\beta-1,\\
&\vdots\\
x_{n_0}&=\beta^{n_0}x_0-\beta^{n_0-1}-\beta^{n_0-2}-\cdots-\beta^j-\beta^{j-1}-\beta^{j-2}-\cdots-\beta-1.
\end{aligned}$$

Como $x_0\geq\frac{1}{\beta}$, entonces $x_1=\beta x_0-1\geq 0$ y $x_2=\beta^2x_0-\beta-1$, luego $x_2<0$ si y solo si $\frac{1}{\beta}\leq x_0<\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}$, podemos tomar $n_0=1$.
Si $x_2\geq 0$, se tiene que $x_3=\beta^3x_0-\beta^2-\beta-1$, de donde $x_3<0$ si y solo si $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\leq x_0<\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^3}$ y se puede tomar $n_0=2$.

De forma recursiva tomamos $n_0=k$ si

$$x_0\in\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{\beta}\right)^i,\ \sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{\beta}\right)^i\right)=I_k,$$

esto es

$$x_0 \geq \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\beta}\right)^i = \left(\frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{\beta}\right)^k$$

entonces

$$\beta^k x_0 \geq \beta^{k-1} + \beta^{k-2} + \beta^{k-3} + \cdots \beta + 1,$$

y

$$x_k = \beta^k x_0 - \beta^{k-1} - \beta^{k-2} - \beta^{k-3} - \cdots \beta - 1 \geq 0.$$

Por lo tanto

$$x_{k+1} = \beta^{k+1} x_0 - \beta^k - \beta^{k-1} - \beta^{k-2} - \beta^{k-3} - \cdots \beta - 1.$$

Pero

$$x_0 < \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{\beta}\right)^i = \left(\frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{\beta}\right)^k + \left(\frac{1}{\beta}\right)^{k+1},$$

entonces

$$\beta^{k+1} x_0 < \beta^k + \beta^{k-1} + \beta^{k-2} + \beta^{k-3} + \cdots \beta + 1,$$

y

$$x_{k+1} = \beta^{k+1} x_0 - \beta^k - \beta^{k-1} - \beta^{k-2} - \beta^{k-3} - \cdots \beta - 1 < 0.$$

Así, $x_{k+1} < 0$. Ahora solo nos resta probar que

$$\left[0, \frac{1}{\beta}\right) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = [0, \infty).$$

En efecto. Claramente

$$\left[0, \frac{1}{\beta}\right) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subseteq [0, \infty).$$

Sea $x \in [0, \infty)$, si $0 \leq x < \frac{1}{\beta}$, se cumple. Supongamos que $\frac{1}{\beta} \leq x < \infty$, entonces podemos tomar $k = [\![\lambda_{(\beta,x)}]\!]$, y veamos que

$$\lambda_{(\beta,x)} = \frac{\ln(x - \beta x + 1)}{-\ln(\beta)} \geq 1.$$

En efecto. Ya que si $\lambda_{(\beta,x)} < 1$, como $\beta < 1$, se tiene que $-\ln(\beta) > 0$ y además

$$\begin{aligned}
\ln(x - \beta x + 1) &< -\ln(\beta) \\
\ln(x - \beta x + 1) &< \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \\
x - \beta x + 1 &< \frac{1}{\beta} \\
x(1-\beta) &< \frac{1}{\beta} - 1 \\
x(1-\beta) &< \frac{1-\beta}{\beta} \\
x &< \frac{1-\beta}{\beta(1-\beta)} \qquad \text{ya que} \qquad 1-\beta > 0 \\
x &< \frac{1}{\beta},
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo, ya que $\frac{1}{\beta} \leq x$. Por lo tanto $\lambda_{(\beta,x)} \geq 1$.

Ahora, si $k = [\![\lambda_{(\beta,x)}]\!]$, entonces

$$\begin{aligned}
k \leq \frac{\ln(x - \beta x + 1)}{-\ln(\beta)} &< k + 1 \\
k + 1 \leq \frac{\ln(x - \beta x + 1) - \ln(\beta)}{-\ln(\beta)} &< k + 2 \\
-(k+1)\ln(\beta) \leq \ln(x - \beta x + 1) - \ln(\beta) &< -(k+2)\ln(\beta) \\
\ln\left(\frac{1}{\beta^{k+1}}\right) \leq \ln\left(\frac{x - \beta x + 1}{\beta}\right) &< \ln\left(\frac{1}{\beta^{k+2}}\right) \\
\frac{1}{\beta^{k+1}} \leq \frac{x}{\beta} - x + \frac{1}{\beta} &< \frac{1}{\beta^{k+2}} \\
\frac{1}{\beta^{k+1}} - \frac{1}{\beta} \leq \frac{x}{\beta} - x &< \frac{1}{\beta^{k+2}} - \frac{1}{\beta} \\
\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^{k+2}} < x - \frac{x}{\beta} &\leq \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^{k+1}} \\
\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^{k+2}} < x\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) &\leq \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^{k+1}} \\
\frac{\frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{\beta}} \leq x &< \frac{\frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{k+2}}{1 - \frac{1}{\beta}} \qquad \text{ya que} \qquad 1 - \frac{1}{\beta} < 0 \\
\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{i} \leq x &< \sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{i}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in I_k$. Así

$$\left[0, \frac{1}{\beta}\right) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = [0, \infty).$$

$\square$

Lema 2.1.4. Supongamos que $\beta \in (0,1)$ y sea g la función dada por (2.2), entonces para cada $x_0 < 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^i(x_0) = x_i < 0$ para $0 \leq i \leq n_0$ y $f^{n_0+1}(x_0) = x_{n_0+1} \geq 0$.

Demostración. La demostración es totalmente análoga a la del **Lema 2.1.3**.
Si $0 > x_0 \geq -\frac{1}{\beta}$, tomamos $n_0 = 0$. Si $x_0 < -\frac{1}{\beta}$ tomamos $n_0 = k$ con

$$x_0 \in \left[-\sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{\beta}\right)^i \ , \ -\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\beta}\right)^i\right) = I_k,$$

de forma análoga al lema anterior se tiene que para $x_i < 0$ con $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n_0\}$, entonces $x_{n_0+1} \geq 0$. Y además

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \cup \left[-\frac{1}{\beta}, 0\right) = (-\infty, 0).$$

En efecto. Claramente

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \cup \left[-\frac{1}{\beta}, 0\right) \subseteq (-\infty, 0).$$

Sea $x \in (-\infty, 0)$, si $-\frac{1}{\beta} \leq x < 0$. se cumple. Supongamos que $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\beta}\right)$, entonces podemos tomar k como la parte entera superior de $\varphi_{(\beta,x)}$ donde

$$\varphi_{(\beta,x)} = \frac{\ln(x\beta - x + 1)}{-\ln(\beta)} > 0,$$

luego

$$
\begin{aligned}
k &< \frac{\ln(x\beta - x + 1)}{-\ln(\beta)} \leq k+1 \\
k+1 &< \frac{\ln(x\beta - x + 1) - \ln(\beta)}{-\ln(\beta)} \leq k+2 \\
-(k+1)\ln(\beta) &< \ln(x\beta - x + 1) - \ln(\beta) \leq -(k+2)\ln(\beta) \\
\ln\left(\frac{1}{\beta^{k+1}}\right) &< \ln\left(\frac{x\beta - x + 1}{\beta}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{\beta^{k+2}}\right) \\
\frac{1}{\beta^{k+1}} &< x - \frac{x}{\beta} + \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\beta^{k+2}} \\
\frac{1}{\beta^{k+1}} - \frac{1}{\beta} &< x - \frac{x}{\beta} \leq \frac{1}{\beta^{k+2}} - \frac{1}{\beta} \\
\frac{1}{\beta^{k+1}} - \frac{1}{\beta} &< x\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \leq \frac{1}{\beta^{k+2}} - \frac{1}{\beta} \\
\frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{k+2} - \frac{1}{\beta}}{1 - \frac{1}{\beta}} &\leq x < \frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{k+1} - \frac{1}{\beta}}{1 - \frac{1}{\beta}} \qquad \text{ya que} \quad 1 - \frac{1}{\beta} < 0 \\
-\left(\frac{\frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{k+2}}{1 - \frac{1}{\beta}}\right) &\leq x < -\left(\frac{\frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{\beta}}\right) \\
-\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{i} &\leq x < -\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{i}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $x \in I_k$. Así

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \cup \left[-\frac{1}{\beta}, 0\right) = (-\infty, 0).$$

□

Teorema 2.1.5. Supongamos que $\beta \in (0,1)$. Entonces la órbita $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)$ es periódica y estable con período 2. Además para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, la órbita $\mathcal{O}(x_0)$ es asintóticamente periódica con

$$L(x_0) = \left\{\frac{1}{\beta+1} \text{ , } -\frac{1}{\beta+1}\right\}.$$

Demostración. Primero consideremos $f(x) = \beta x - g(x)$, entonces a (2.1), la podemos reescribir de la siguiente manera

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Ahora, si $\beta > 0$, entonces $\frac{1}{\beta+1} > 0$ y $g\left(\frac{1}{\beta+1}\right) = 1$. De donde

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\beta+1}\right) &= \beta\left(\frac{1}{\beta+1}\right) - g\left(\frac{1}{\beta+1}\right) = \beta\left(\frac{1}{\beta+1}\right) - 1 \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right) - \left(\frac{\beta+1}{\beta+1}\right) = \frac{\beta-\beta-1}{\beta+1} = -\frac{1}{\beta+1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

De forma análoga, si $\beta > 0$, entonces $-\frac{1}{\beta+1} < 0$ y $g\left(-\frac{1}{\beta+1}\right) = -1$. Así

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\beta+1}\right) &= \beta\left(-\frac{1}{\beta+1}\right) - g\left(-\frac{1}{\beta+1}\right) = \left(\frac{-\beta}{\beta+1}\right) - (-1) \\ &= \left(\frac{-\beta}{\beta+1}\right) + \left(\frac{\beta+1}{\beta+1}\right) = \frac{-\beta+\beta+1}{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Luego, de (2.4) y (2.5) se tiene que

$$f\left(\frac{1}{\beta+1}\right) = -\frac{1}{\beta+1}, \qquad f\left(-\frac{1}{\beta+1}\right) = \frac{1}{\beta+1}.$$

Nótese que

$$\begin{aligned} f^0\left(\frac{1}{\beta+1}\right) &= \frac{1}{\beta+1}, \\ f^1\left(\frac{1}{\beta+1}\right) &= f\left(\frac{1}{\beta+1}\right) = -\frac{1}{\beta+1}, \\ f^2\left(\frac{1}{\beta+1}\right) &= f\left(f^1\left(\frac{1}{\beta+1}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{\beta+1}\right) = \frac{1}{\beta+1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Esto implica que

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta+1}\right) = \left\{\frac{1}{\beta+1}, -\frac{1}{\beta+1}, \dots\right\},$$

es una órbita periódica de (2.1) con período 2.

Mostremos que $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)$ es estable. Sea $\epsilon > 0$ dado y $\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{\beta+1}, \epsilon\right\}$. Veamos que

$$\text{si} \quad 0 < \left|x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left|x_n - \frac{1}{\beta+1}\right| < \epsilon. \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

En efecto, si $0 < \left|x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right| < \delta$, con $\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{\beta+1}, \epsilon\right\}$ por **Lema 2.1.1** y dado que $\delta \leq \frac{1}{\beta+1}$ y $\delta \leq \epsilon$ se tiene

$$\left|f^{2n}(x_0) - \frac{1}{\beta+1}\right| = \beta^{2n}\left|x_0 - \frac{1}{\beta+1}\right| < \beta^{2n}\delta < \delta \leq \epsilon. \tag{2.8}$$

Esto muestra que $\frac{1}{\beta+1}$ es un punto fijo estable de la dinámica $x_{n+1} = f^2(x_n)$.

Razonando de forma análoga tenemos que $-\frac{1}{\beta+1}$ es un punto fijo estable de la dinámica $x_{n+1} = f^2(x_n)$. Sea $\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{\beta+1}, \epsilon\right\}$. Entonces

$$\text{si} \quad 0 < \left|x_0 - \left(-\frac{1}{\beta+1}\right)\right| = \left|x_0 + \frac{1}{\beta+1}\right| < \delta. \tag{2.9}$$

Puesto que $\delta \leq \frac{1}{\beta+1}$ y $\delta \leq \epsilon$, por **Lema 2.1.2** se tiene que

$$\left|f^{2n}(x_0) + \frac{1}{\beta+1}\right| = \beta^{2n}\left|x_0 + \frac{1}{\beta+1}\right| < \left|x_0 + \frac{1}{\beta+1}\right| < \delta \leq \epsilon. \tag{2.10}$$

Esto muestra que $-\frac{1}{\beta+1}$ es un punto fijo estable de la dinámica $x_{n+1} = f^2(x_n)$.

Ahora si $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $x_0 \geq 0$ o $x < 0$.

- Si $x_0 \geq 0$, podemos probar la siguiente afirmación.

  Afirmación 2.1.1.

  $$x_{n_0+2n} - \frac{1}{\beta+1} = \beta^{2n}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

  En efecto. Por **Lema 2.1.3** tenemos que para cada $x_0 \geq 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \geq 0$, para cada $0 \leq i \leq n_0$ y $x_{n_0+1} < 0$, entonces $x_{n_0} \geq 0$, de donde $g(x_{n_0+1}) = -1$. y $x_{n_0+1} = \beta x_{n_0} - 1 < 0$.
  Por inducción, si $n = 1$ entonces

  $$x_{n_0+2} = \beta x_{n_0+1} - g(x_{n_0+1}) = \beta(\beta x_{n_0} - 1) - (-1) = \beta^2 x_{n_0} - \beta + 1$$

  entonces

  $$\begin{aligned} x_{n_0+2} - \frac{1}{\beta+1} &= \beta^2 x_{n_0} - \beta + 1 - \frac{1}{\beta+1} = \beta^2 x_{n_0} - \left(\beta - 1 + \frac{1}{\beta+1}\right) \\ &= \beta^2 x_{n_0} - \left(\frac{\beta^2 - 1 + 1}{\beta+1}\right) = \beta^2 x_{n_0} - \left(\frac{\beta^2}{\beta+1}\right) = \beta^2\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora supongamos que se cumple para $n = k$, esto es

$$x_{n_0+2k} - \frac{1}{\beta+1} = \beta^{2k}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right),$$

y veamos que se cumple para $n = k+1$. En efecto. Notemos que

$$x_{n_0+2k} = \beta^{2k}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1}, \qquad \text{por } \textbf{H.I}.$$

Como $x_{n_0} \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
&\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) \geq -\frac{1}{\beta+1} \\
\Rightarrow\quad &\beta^{2k}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) \geq -\frac{\beta^{2k}}{\beta+1}, \\
\Rightarrow\quad &\beta^{2k}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1} \geq -\frac{\beta^{2k}}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+1}, \\
\Rightarrow\quad &\beta^{2k}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1} \geq \frac{1-\beta^{2k}}{\beta+1} > 0,
\end{aligned}$$

de donde $x_{n_0+2k} > 0$. Entonces $g(x_{n_0+2k}) = 1$. Por tanto

$$\begin{aligned}
x_{n_0+2k+1} &= \beta\left(\beta^{2k}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1}\right) - 1 \\
&= \beta^{2k+1}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{\beta}{\beta+1} - 1 \\
&= \beta^{2k+1}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{1}{\beta+1}.
\end{aligned}$$

Ahora, como $\beta x_{n_0} - 1 < 0$, entonces $x_{n_0} < \frac{1}{\beta}$, esto es $\beta^{2k+1}x_{n_0} < \beta^{2k}$. Así $\beta^{2k+1}x_{n_0}(\beta+1) < \beta^{2k}(\beta+1)$ $(*)$.

Dado que $\beta < 1$ se tiene que $\beta^{2k} < 1$, luego $\beta^{2k+1} + \beta^{2k} < 1 + \beta^{2k+1}$, por tanto $\beta^{2k}(\beta+1) < 1 + \beta^{2k+1}$ $(*,*)$. Luego por $(*)$ y $(*,*)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\beta^{2k+1}x_{n_0}(\beta+1) < 1 + \beta^{2k+1} \\
\Rightarrow\quad &\beta^{2k+1}x_{n_0}(\beta+1) - \beta^{2k+1} - 1 < 0, \\
\Rightarrow\quad &\beta^{2k+1}x_{n_0} - \frac{\beta^{2k+1}}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+1} < 0, \\
\Rightarrow\quad &\beta^{2k+1}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{1}{\beta+1} < 0.
\end{aligned}$$

Esto es $x_{n_0+2k+1} < 0$, de donde $g(x_{n_0+2k+1}) = -1$. Se sigue que

$$\begin{aligned} x_{n_0+2k+2} &= \beta\left(\beta^{2k+1}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{1}{\beta+1}\right) + 1 \\ &= \beta^{2k+2}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{\beta}{\beta+1} + 1 \\ &= \beta^{2k+2}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1}. \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que

$$x_{n_0+2(k+1)} - \frac{1}{\beta+1} = \beta^{2(k+1)}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Así,

$$x_{n_0+2n} - \frac{1}{\beta+1} = \beta^{2n}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Queda demostrada la afirmación.

Ahora tomando límites en ambos lados tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(x_{n_0+2n} - \frac{1}{\beta+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\beta^{2n}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) \\ &= \left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right)\lim_{n\to\infty}\beta^{2n} \\ &= \left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_0+2n} = \frac{1}{\beta+1}. \tag{2.12}$$

Ahora, mostremos la siguiente afirmación.

Afirmación 2.1.2.

$$x_{n_0+1+2n} + \frac{1}{\beta+1} = \beta^{2n+1}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En efecto. Para $n=1$, por **Lema 2.1.3**, si $x_{n_0} \geq 0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $x_{n_0+1} = \beta x_{n_0} - 1 < 0$, luego $x_{n_0+2} = \beta^2 x_{n_0} - \beta + 1 > 0$, ya que $\beta^2 x_{n_0} \geq 0$ y $-\beta + 1 > 0$, entonces

$$x_{n_0+1+2} = \beta x_{n_0+2} - g(x_{n_0+2}) = \beta(\beta^2 x_{n_0} - \beta + 1) - 1 = \beta^3 x_{n_0} - \beta^2 + \beta - 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} x_{n_0+1+2} + \frac{1}{\beta+1} &= \beta^3 x_{n_0} - \beta^2 + \beta - 1 + \frac{1}{\beta+1} = \beta^3 x_{n_0} - \left(\beta^2 - \beta + 1 - \frac{1}{\beta+1}\right) \\ &= \beta^3 x_{n_0} - \left(\frac{\beta^3 - \beta^2 + \beta + \beta^2 - \beta + 1 - 1}{\beta+1}\right) = \beta^3 x_{n_0} - \frac{\beta^3}{\beta+1} \\ &= \beta^3 \left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que se cumple para $n = k$, esto es

$$x_{n_0+1+2k} + \frac{1}{\beta+1} = \beta^{2k+1}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right),$$

y veamos que se cumple para $n = k+1$. En efecto. notemos que

$$x_{n_0+1+2k} = \beta^{2k+1}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{1}{\beta+1}, \qquad \text{por } \mathbf{H.I}.$$

Razonando de manera similar a la afirmación anterior podemos verificar que

$$\begin{aligned} & x_{n_0+1+2k} = \beta^{2k+1}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{1}{\beta+1} < 0 \\ \Rightarrow \quad & x_{n_0+2+2k} = \beta^{2k+2}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) + \frac{1}{\beta+1} > 0, \\ \Rightarrow \quad & x_{n_0+3+2k} = \beta^{2k+3}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right) - \frac{1}{\beta+1}. \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que

$$x_{n_0+1+2(k+1)} + \frac{1}{\beta+1} = \beta^{2(k+1)+1}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia

$$x_{n_0+1+2n} + \frac{1}{\beta+1} = \beta^{2n+1}\left(x_{n_0} - \frac{1}{\beta+1}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De esta manera, queda demostrada la afirmación.

Luego, de manera similar a (2,12) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_0+1+2n} = -\frac{1}{\beta+1}.$$

De donde,

$$L(x_0) = \left\{\frac{1}{\beta+1}\ ,\ -\frac{1}{\beta+1}\right\} \quad \text{para} \quad x_0 \geq 0.$$

- Si $x_0 < 0$, por **Lema 2.1.4** la prueba es totalmente análoga al caso anterior, esto es $x_i < 0$ con $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n_0\}$ tal que $x_{n_0} < 0$ y $x_{n_0+1} \geq 1$, entonces

$$x_{n_0+2n} + \frac{1}{\beta+1} = \beta^{2n}\left(x_{n_0} + \frac{1}{\beta+1}\right), \tag{2.13}$$

$$x_{n_0+2n+1} - \frac{1}{\beta+1} = \beta^{2n}\left(x_{n_0} + \frac{1}{\beta+1}\right). \tag{2.14}$$

Por (2,13) y (2,14) respectivamente, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_0+2n} = -\frac{1}{\beta+1}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_{n_0+2n+1} = \frac{1}{\beta+1}.$$

Así

$$L(x_0) = \left\{-\frac{1}{\beta+1}\ ,\ \frac{1}{\beta+1}\right\} \quad \text{para} \quad x_0 < 0.$$

De lo anterior tenemos que para $x_0 \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$L(x_0) = \left\{\frac{1}{\beta+1}\ ,\ -\frac{1}{\beta+1}\right\}.$$

□

Teorema 2.1.6. Supongamos que $\beta = 1$. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, la órbita $\mathcal{O}(x_0)$ de (2.1) es eventualmente periódica con período 2. Esto es que exite $n_0 \geq 1$ tal que $x_{n_0} = x_{n_0+2}$ y además

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots\}$$

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $x_0 \geq 0$ o $x_0 < 0$.

- Si $x_0 \geq 0$ y $\beta = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ donde $f^i(x_0) = x_i \geq 0$ con $0 \leq i \leq n_0$ tal que $x_{n_0} \geq 0$ y $x_{n_0+1} < 0$. En efecto. Sea $x_0 \geq 0$ y $\beta = 1$, entonces para $f^i(x_0) = x_i \geq 0$ con $0 \leq i \leq n_0$, se tiene que $g(x_i) = 1$ y

$$\begin{aligned}
x_1 &= \beta x_0 - g(x_0) = x_0 - 1 \geq 0 \\
x_2 &= \beta x_1 - g(x_1) = (x_0 - 1) - 1 = x_0 - 2 \geq 0 \\
x_3 &= \beta x_2 - g(x_2) = (x_0 - 2) - 1 = x_0 - 3 \geq 0 \\
x_4 &= \beta x_3 - g(x_3) = (x_0 - 3) - 1 = x_0 - 4 \geq 0 \\
x_5 &= \beta x_4 - g(x_4) = (x_0 - 4) - 1 = x_0 - 5 \geq 0 \\
&\vdots \\
x_{n_0} &= \beta x_{n_0-1} - g(x_{n_0-1}) = (x_0 - (n_0 - 1)) - 1 = x_{n_0-1} - n_0 \geq 0.
\end{aligned}$$

  Ahora, tomemos $n_0 = [\![x_0]\!]$, esto es $n_0 \leq x_0 < n_0 + 1$, luego $x_{n_0} = x_0 - n_0 \geq 0$ y $x_{n_0+1} = x_0 - n_0 - 1 < 0$. Por lo tanto,

$$x_{n_0+2} = x_{n_0+1} - g(x_{n_0}) = x_{n_0+1} + 1 = x_0 - n_0 - 1 + 1 = x_0 - n_0 = x_{n_0}.$$

  Así $x_{n_0+2} = x_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

- Si $x_0 < 0$ y $\beta = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ donde $f^i(x_0) = x_i < 0$ con $0 \leq i \leq n_0$ tal que $x_{n_0} < 0$ y $x_{n_0+1} \geq 0$. En efecto. Sea $x_0 < 0$ y $\beta = 1$, entonces para

$f^i(x_0) = x_i < 0$ con $0 \leq i \leq n_0$, se tiene que $g(x_i) = -1$ y además

$$\begin{aligned}
x_1 &= \beta x_0 - g(x_0) = x_0 + 1 < 0 \\
x_2 &= \beta x_1 - g(x_1) = (x_0 + 1) + 1 = x_0 + 2 < 0 \\
x_3 &= \beta x_2 - g(x_2) = (x_0 + 2) + 1 = x_0 + 3 < 0 \\
x_4 &= \beta x_3 - g(x_3) = (x_0 + 3) + 1 = x_0 + 4 < 0 \\
x_5 &= \beta x_4 - g(x_4) = (x_0 + 4) + 1 = x_0 + 5 < 0 \\
&\vdots \\
x_{n_0} &= \beta x_{n_0-1} - g(x_{n_0-1}) = (x_0 + (n_0 - 1)) + 1 = x_{n_0-1} + n_0 < 0.
\end{aligned}$$

Ahora, tomemos n_0 como la parte entera superior de $-x_0$, esto es $n_0 < -x_0 \leq n_0 + 1$, luego $x_{n_0} = x_0 + n_0 < 0$ y $x_{n_0+1} = x_0 + n_0 + 1 \geq 0$. Es decir,

$$x_{n_0+2} = x_{n_0+1} - g(x_{n_0}) = x_{n_0+1} - 1 = x_0 + n_0 + 1 - 1 = x_0 + n_0 = x_{n_0}.$$

Luego $x_{n_0+2} = x_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por lo tanto, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ existe un entero $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $x_{n_0+2} = x_{n_0}$. Así, la órbita

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots\}$$

de (2,1) es eventualmente periódica con período 2.

□

Ahora consideramos el caso cuando $\beta > 1$.

Teorema 2.1.7. Sea $\beta \in (1, \infty)$. Entonces (2.1) tiene un punto fijo, y órbitas periódicas de períodos 2 y 4. Suponga que hay un entero positivo k tal que

$$\beta^{2k} - 2\beta^{2k-2} + 1 > 0, \tag{2.15}$$

entonces, (2.1) tiene una órbita periódica de período $2k$. Suponga que hay un entero positivo k tal que

$$\beta^{2k+1} - 2\beta^{2k-1} - 1 \geq 0, \tag{2.16}$$

entonces, (2.1) tiene una órbita periódica de período $2k+1$.

Demostración. Sea $f(x) = \beta x - g(x)$. Notemos que si $\beta > 1$, entonces $\beta - 1 > 0$, lo que implica que $\frac{1}{\beta-1} > 0$, por lo tanto $g\left(\frac{1}{\beta-1}\right) = 1$. Así

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\beta-1}\right) &= \beta\left(\frac{1}{\beta-1}\right) - g\left(\frac{1}{\beta-1}\right) = \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right) - 1 \\ &= \frac{\beta}{\beta-1} - \frac{\beta-1}{\beta-1} = \frac{\beta-\beta+1}{\beta-1} = \frac{1}{\beta-1}. \end{aligned}$$

De lo anterior, tenemos que $\frac{1}{\beta-1}$ es un punto fijo de (2.1); como en la prueba del **Teorema 2.1.5** (véase (2.4), (2.5) y (2.6)) tenemos que $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)$ es una órbita periódica de período 2 de (2.1).

Ahora, nótese que,

$$f^0\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) = \frac{\beta+1}{\beta^2+1}.$$

Dado que $\beta > 1$, entonces $\beta^2 > \beta$, luego $\beta^2+1 > \beta+1$, de donde $0 < \frac{\beta+1}{\beta^2+1} < 1$, por lo tanto $g\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) = 1$. De lo anterior se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} f^1\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) &= f\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) = \beta\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) - g\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) = \beta\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) - 1 \\ &= \left(\frac{\beta^2+\beta}{\beta^2+1}\right) - \left(\frac{\beta^2+1}{\beta^2+1}\right) = \left(\frac{\beta^2+\beta-\beta^2-1}{\beta^2+1}\right) = \frac{\beta-1}{\beta^2+1} \end{aligned}$$

Como $\beta > 1$, entonces $\beta - 1 > 0$ y $\beta^2+1 > 0$, por tanto $\frac{\beta-1}{\beta^2+1} > 0$, lo que implica que $g\left(\frac{\beta-1}{\beta^2+1}\right) = 1$. Así

$$
\begin{aligned}
f^2\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) &= f\left(f^1\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right)\right) = f\left(\frac{\beta-1}{\beta^2+1}\right) = \beta\left(\frac{\beta-1}{\beta^2+1}\right) - g\left(\frac{\beta-1}{\beta^2+1}\right) \\
&= \beta\left(\frac{\beta-1}{\beta^2+1}\right) - 1 = \left(\frac{\beta^2-\beta}{\beta^2+1}\right) - \left(\frac{\beta^2+1}{\beta^2+1}\right) \\
&= \left(\frac{\beta^2-\beta-\beta^2-1}{\beta^2+1}\right) = \left(\frac{-(\beta+1)}{\beta^2+1}\right).
\end{aligned}
$$

Similar al caso anterior tenemos lo siguiente $\beta+1>0$, entonces $-(\beta+1)<0$, de donde $\frac{-(\beta+1)}{\beta^2+1}<0$, por lo tanto $g\left(\frac{-(\beta-1)}{\beta^2+1}\right)=-1$. Luego

$$
\begin{aligned}
f^3\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) &= f\left(f^2\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right)\right) = f\left(\frac{-(\beta+1)}{\beta^2+1}\right) = \beta\left(\frac{-(\beta+1)}{\beta^2+1}\right) - g\left(\frac{-(\beta+1)}{\beta^2+1}\right) \\
&= \beta\left(\frac{-(\beta+1)}{\beta^2+1}\right) - (-1) = \left(\frac{-\beta^2-\beta}{\beta^2+1}\right) + \left(\frac{\beta^2+1}{\beta^2+1}\right) \\
&= \left(\frac{-\beta^2-\beta+\beta^2+1}{\beta^2+1}\right) = \frac{1-\beta}{\beta^2+1}.
\end{aligned}
$$

Puesto que $\beta>1$, entonces $1-\beta<0$, luego $\frac{1-\beta}{\beta^2+1}<0$, por lo tanto $g\left(\frac{1-\beta}{\beta^2+1}\right)=-1$. Luego

$$
\begin{aligned}
f^4\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) &= f\left(f^3\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right)\right) = f\left(\frac{1-\beta}{\beta^2+1}\right) = \beta\left(\frac{1-\beta)}{\beta^2+1}\right) - g\left(\frac{1-\beta}{\beta^2+1}\right) \\
&= \beta\left(\frac{1-\beta}{\beta^2+1}\right) - (-1) = \left(\frac{\beta-\beta^2}{\beta^2+1}\right) + \left(\frac{\beta^2+1}{\beta^2+1}\right) \\
&= \left(\frac{\beta-\beta^2+\beta^2+1}{\beta^2+1}\right) = \frac{\beta+1}{\beta^2+1}.
\end{aligned}
$$

De lo anterior se tiene que $f^4\left(\dfrac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) = \dfrac{\beta+1}{\beta^2+1}$, por lo tanto,

$$
\mathcal{O}\left(\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\right) = \left\{\frac{\beta+1}{\beta^2+1}\ ,\ \frac{\beta-1}{\beta^2+1}\ ,\ \frac{-(\beta+1)}{\beta^2+1}\ ,\ \frac{1-\beta}{\beta^2+1}\ ,\ \frac{\beta+1}{\beta^2+1}\ ,\ \ldots\right\}
$$

es una órbita periódica de período 4 de (2.1).

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $x_0 \geq 0$ o $x_0 < 0$.

- Si $x_0 \geq 0$ y suponemos que (2.15) se cumple. Construiremos una órbita periódica $\mathcal{O}(x_0)$ de período $2k$ tal que

$$\begin{aligned} x_0 > 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 < 0, \quad x_3 < 0, \quad (-1)^i x_i > 0 \\ \forall i = 4, 5, \ldots, 2k-1, \quad x_{2k} = x_0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta x_0 - 1 \geq 0, \\ x_2 &= \beta^2 x_0 - \beta - 1 < 0, \\ x_3 &= \beta^3 x_0 - \beta^2 - \beta + 1 < 0, \\ x_4 &= \beta^4 x_0 - \beta^3 - \beta^2 + \beta + 1 > 0, \\ x_5 &= \beta^5 x_0 - \beta^4 - \beta^3 + \beta^2 + \beta - 1 < 0, \\ &\vdots \\ x_{2k-1} &= \beta^{2k-1} x_0 - \beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \beta^{2k-6} + \cdots - 1 \\ x_{2k} &= \beta^{2k} x_0 - \beta^{2k-1} - \beta^{2k-2} + \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} - \beta^{2k-5} + \beta^{2k-6} - \cdots + 1. \end{aligned}$$

Nótese que $\beta > 1$, entonces $\beta^{2k} > 1$, de donde $\beta^{2k} - 1 > 0$ para $\forall k \in \mathbb{N}$.

Como $x_{2k} = x_0$, se sigue que

$$\begin{aligned} x_{2k} &= \beta^{2k} x_0 - \beta^{2k-1} - \beta^{2k-2} + \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} - \beta^{2k-5} + \cdots + 1 \\ x_0 &= \beta^{2k} x_0 - \beta^{2k-1} - \beta^{2k-2} + \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} - \beta^{2k-5} + \cdots + 1 \\ x_0 - \beta^{2k} x_0 &= -\beta^{2k-1} - \beta^{2k-2} + \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} - \beta^{2k-5} + \beta^{2k-6} - \cdots + 1 \\ \beta^{2k} x_0 - x_0 &= \beta^{2k-1} + \beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} - \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \beta^{2k-6} + \cdots - 1 \\ x_0(\beta^{2k} - 1) &= \beta^{2k-1} + \beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} - \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \beta^{2k-6} + \cdots - 1 \\ x_0 &= \frac{\beta^{2k-1} + \beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} - \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \beta^{2k-6} + \cdots - 1}{\beta^{2k} - 1}. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{\beta^{2k-1}+\beta^{2k-2}-\beta^{2k-3}-\beta^{2k-4}+\beta^{2k-5}-\beta^{2k-6}+\cdots-1}{\beta^{2k}-1}\\
&= \frac{(\beta+1)\beta^{2k-1}+\beta^{2k-2}-\beta^{2k-3}-\beta^{2k-4}+\beta^{2k-5}-\beta^{2k-6}+\cdots-1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)}\\
&= \frac{\beta^{2k}+\beta^{2k-1}-\beta^{2k-2}-\beta^{2k-3}+\cdots-\beta+\beta^{2k-1}+\beta^{2k-2}-\beta^{2k-3}-\cdots-1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)}\\
&= \frac{\beta^{2k}+2\beta^{2k-1}-2\beta^{2k-3}-1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Dado que $\beta > 1$, entonces $\beta^{2k} > 1$, además $2\beta^{2k-1} > 2\beta^{2k-3}$ con $k \geq 3$, esto es $\beta^{2k}+2\beta^{2k-1}-2\beta^{2k-3}-1 > 0$. Por lo tanto

$$x_0 = \frac{\beta^{2k}+2\beta^{2k-1}-2\beta^{2k-3}-1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)} > 0. \tag{2.19}$$

De lo anterior tenemos que $g(x_0) = 1$ y $x_1 = \beta x_0 - 1$, reemplazando x_0 tenemos que

$$\begin{aligned}
x_1 &= \beta\left(\frac{\beta^{2k}+2\beta^{2k-1}-2\beta^{2k-3}-1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)}\right)-1\\
&= \frac{\beta^{2k+1}+2\beta^{2k}-2\beta^{2k-2}-\beta-\left(\beta^{2k+1}+\beta^{2k}-\beta-1\right)}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)}\\
&= \frac{\beta^{2k+1}+2\beta^{2k}-2\beta^{2k-2}-\beta-\beta^{2k+1}-\beta^{2k}+\beta+1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)}\\
&= \frac{\beta^{2k}-2\beta^{2k-2}+1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)}\\
&> 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Nótese que si $\beta > 1$, entonces $2\beta^{2k-1} > 2$ y $2\beta^{2k-2} > 2\beta^{2k-3}$ con $k \geq 3$, esto es

$$2\beta^{2k-1}+2\beta^{2k-2} > 2\beta^{2k-3}+2,$$

$$2\beta^{2k-1}-2\beta^{2k-3}-1 > -2\beta^{2k-2}+1,$$

$$\beta^{2k}+2\beta^{2k-1}-2\beta^{2k-3}-1 > \beta^{2k}-2\beta^{2k-2}+1,$$

$$x_0 = \frac{\beta^{2k}+2\beta^{2k-1}-2\beta^{2k-3}-1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)} > \frac{\beta^{2k}-2\beta^{2k-2}+1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)} = x_1.$$

De donde $x_1 < x_0$. Análogamente a (2.18)

$$x_{2k-1} = \beta^{2k-1}x_0 - \beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \beta^{2k-6} + \cdots - 1.$$

Sea

$$\lambda_\beta = -\beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \beta^{2k-6} + \cdots - 1,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_\beta &= \frac{(\beta+1)(-\beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \beta^{2k-6} + \cdots - 1)}{\beta+1} \\
&= \frac{-\beta^{2k-1} - \beta^{2k-2} + \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} - \cdots - \beta - \beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} + \cdots - 1}{\beta+1} \\
&= \frac{-\beta^{2k-1} - 2\beta^{2k-2} + 2\beta^{2k-4} - 1}{\beta+1} \\
&= \frac{(\beta^{2k-1})(-\beta^{2k-1} - 2\beta^{2k-2} + 2\beta^{2k-4} - 1)}{(\beta+1)(\beta^{2k}-1)} \\
&= \frac{-\beta^{4k-1} - 2\beta^{4k-2} + 2\beta^{4k-4} - \beta^{2k} + \beta^{2k-1} + 2\beta^{2k-2} - 2\beta^{2k-4} + 1}{(\beta+1)(\beta^{2k}-1)}.
\end{aligned}$$

Luego, $x_{2k-1} = \beta^{2k-1}x_0 + \lambda_\beta$, esto es

$$\begin{aligned}
x_{2k-1} &= \beta^{2k-1}\left(\frac{\beta^{2k} + 2\beta^{2k-1} - 2\beta^{2k-3} - 1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)}\right) + \lambda_\beta \\
&= \frac{\beta^{4k-1} + 2\beta^{4k-2} - 2\beta^{4k-4} - \beta^{2k-1}}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)} + \\
&\quad + \frac{-\beta^{4k-1} - 2\beta^{4k-2} + 2\beta^{4k-4} - \beta^{2k} + \beta^{2k-1} + 2\beta^{2k-2} - 2\beta^{2k-4} + 1}{(\beta+1)(\beta^{2k}-1)} \\
&= \frac{-\beta^{2k} + 2\beta^{2k-2} - 2\beta^{2k-4} + 1}{(\beta+1)(\beta^{2k}-1)} \\
&< 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Puesto que por (2.15) $0 < \beta^{2k} - 2\beta^{2k-2} + 1$, entonces $-\beta^{2k} + 2\beta^{2k-2} < 1 \quad (*)$, y dado que $\beta > 1$, se tiene que $2\beta^{2k-4} \geq 2$ para todo $k \geq 3$, luego $-2\beta^{2k-4} \leq -2$. Así $-2\beta^{2k-4} + 1 \leq -1 \quad (**)$, sumando en las inecuaciones $\quad (*), (**)$ miembro a miembro tenemos que $-\beta^{2k} + 2\beta^{2k-2} - 2\beta^{2k-4} + 1 < 0$, y dado que

$((\beta+1)(\beta^{2k}-1)) > 0$, se sigue que $x_{2k-1} < 0$.

Haciendo el mismo razonamiento para x_{2i-2} y x_{2i-1} con $i \in \{3,4,5,6,\cdots,k\}$ $k \geq 3$, se tiene que

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= \frac{-\beta^{2k} + 2\beta^{2i-2} - 2\beta^{2i-4} + 1}{(\beta+1)(\beta^{2k}-1)} < 0, \\ x_{2i-2} &= \frac{\beta^{2k} + 2\beta^{2i-3} - 2\beta^{2i-5} - 1}{(\beta+1)(\beta^{2k}-1)} > 0, \end{aligned}$$

Ahora, como $1 < \beta$, entonces para $k \geq 3$, se tiene que $2 < 2\beta^{2k-2}$ y $2\beta^{2i-5} < \beta^{2i-3}$ con $i \in \{3,4,5,6,\cdots,k\}$, luego

$$\begin{gathered} 2\beta^{2k-i} + 2 < \beta^{2k-i} + 2\beta^{2k-2}, \\ \beta^{2k} - 2\beta^{2k-2} + 1 < \beta^{2k} + \beta^{2i-3} - 2\beta^{2i-5} - 1, \\ x_1 = \frac{\beta^{2k} - 2\beta^{2k-2} + 1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)} < \frac{\beta^{2k} + \beta^{2i-3} - 2\beta^{2i-5} - 1}{(\beta^{2k}-1)(\beta+1)} = x_{2i-2}. \end{gathered}$$

Así, $x_1 < x_{2i-2}$ con $k \geq 3$ y $i \in \{3,4,5,6,\cdots,k\}$. Dado que $x_1 < x_0$, entonces

$$x_1 = \text{mín}\{x_0, x_1, x_4, x_6, \cdots, x_{2k-2}\}.$$

De manera análoga se prueba que $x_2 < x_{2k-1}$ y $x_{2i-3} < x_{2i-1}$ para $i \in \{3,4,5,6,\cdots,k\}$ y $k \geq 3$. De donde

$$x_{2k-1} = \text{máx}\{x_2, x_3, x_5, x_7, \cdots, x_{2k-1}\}.$$

Por lo tanto, si se se cumple (2.15), la órbita $\mathcal{O}(x_0)$ donde x_0 está definida por (2.19) satisface a (2.17) y es una órbita periódica de período $2k$ para (2.1).

De forma similar al caso anterior, supongamos que $x_0 \geq 0$ y (2.16) se cumple. Construiremos una órbita periódica $\mathcal{O}(x_0)$ de período $2k+1$ tal que

$$\begin{gathered} x_0 \geq 0, \quad x_1 < 0, \quad x_2 < 0, \quad (-1)^i x_i < 0, \\ \forall i = 3,4,5,\cdots,2k. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
x_1 &= \beta x_0 - 1 < 0,\\
x_2 &= \beta^2 x_0 - \beta + 1 < 0,\\
x_3 &= \beta^3 x_0 - \beta^2 + \beta + 1 > 0,\\
x_4 &= \beta^4 x_0 - \beta^3 + \beta^2 + \beta - 1 < 0,\\
x_5 &= \beta^5 x_0 - \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 - \beta + 1 > 0,\\
&\vdots\\
x_{2k} &= \beta^{2k} x_0 - \beta^{2k-1} + \beta^{2k-2} + \beta^{2k-3} - \beta^{2k-4} + \beta^{2k-5} - \cdots - 1,\\
x_{2k+1} &= \beta^{2k+1} x_0 - \beta^{2k} + \beta^{2k-1} + \beta^{2k-2} - \beta^{2k-3} + \beta^{2k-4} - \beta^{2k-5} + \cdots + 1
\end{aligned}$$

Puesto que $x_{2k+1} = x_0$. De forma similar al caso anterior podemos verificar que para $k \geq 2$ y $i \in \{2, 3, 4, 5, \cdots, k\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{\beta^{2k+1} - 2\beta^{2k-1} - 1}{(\beta+1)(\beta^{2k+1} - 1)} \geq 0,\\
x_1 &= \frac{-\beta^{2k+1} - 2\beta^{2k} + 1}{(\beta+1)(\beta^{2k+1} - 1)} < 0,\\
x_{2i-1} &= \frac{\beta^{2k+1} - 2\beta^{2i-3} - 1}{(\beta^{2k+1} - 1)(\beta+1)} > 0,\\
x_{2i} &= \frac{-\beta^{2k+1} - 2\beta^{2i-2} + 1}{(\beta^{2k+1} - 1)(\beta+1)} < 0.
\end{aligned}$$

Dado que $-2\beta^{2i-1} < -2\beta^{2i-3}$ para $k \geq 2$ y $i \in \{2, 3, 4, 5, \cdots, k\}$, entonces $x_0 < x_{2k-1}$, y

$$x_0 = \text{mín}\{x_0, x_3, x_5, x_7, \cdots, x_{2i-1}\}.$$

De forma similar podemos ver que $x_1 < x_{2i-2} < x_{2i}$, para $k \geq 2$ y $i \in \{2, 3, 4, 5, \cdots, k\}$ esto es,

$$x_{2k} = \text{máx}\{x_1, x_2, x_4, x_6, \cdots, x_{2k}\}.$$

Por lo tanto, se cumple (2.16). La órbita $\mathcal{O}(x_0)$ satisface a (2.22) y es una órbita periódica de período $2k + 1$ para (2.1).

- Si $x_0 < 0$, totalmente análogo al caso anterior. Supongamos que (2.15) se cumple. Construiremos una órbita periódica $\mathcal{O}(x_0)$ de período $2k$ tal que

$$\begin{gathered} x_0 < 0, \quad x_1 \leq 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0, \quad (-1)^i x_i < 0, \\ \forall i = 4, 5, \ldots, 2k-1, \quad x_{2k} = x_0. \end{gathered} \tag{2.23}$$

$$x_0 = \frac{-(\beta^{2k} + 2\beta^{2k-1} - 2\beta^{2k-3} - 1)}{(\beta^{2k} - 1)(\beta + 1)} < 0, \tag{2.24}$$

$$x_1 = \frac{-(\beta^{2k} - 2\beta^{2k-2} + 1)}{(\beta^{2k} - 1))(\beta + 1)} < 0, \tag{2.25}$$

$$x_{2k-1} = \frac{\beta^{2k} - 2\beta^{2k-2} + 2\beta^{2k-4} - 1}{(\beta + 1)(\beta^{2k} - 1)} > 0. \tag{2.26}$$

También se puede verificar que

$$x_1 = \text{máx}\{x_0, x_1, x_2, x_4, x_6, \cdots, x_{2k-2}\},$$

$$x_{2k-1} = \text{mín}\{x_2, x_3, x_5, x_7, \cdots, x_{2k-1}\}.$$

Por lo tanto, se verifica (2.15). La órbita $\mathcal{O}(x_0)$ donde x_0 está definida por (2.24) satisface (2.23) y es una órbita periódica de período $2k$ para (2.1).

De forma similar al caso anterior, supongamos que $x_0 < 0$ y (2.16) se cumple. Construiremos una órbita periódica $\mathcal{O}(x_0)$ de período $2k+1$ tal que

$$\begin{gathered} x_0 \leq 0, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad (-1)^i x_i > 0, \\ \forall i = 3, 4, 5, \cdots, 2k. \end{gathered} \tag{2.27}$$

También podemos verificar que

$$x_0 = \frac{-(\beta^{2k+1} - 2\beta^{2k-1} - 1)}{(\beta + 1)(\beta^{2k+1} - 1)} \leq 0,$$

$$x_{2k} = \frac{-\beta^{2k+1} - 2\beta^{2k-2} + 1}{(\beta^{2k+1} - 1)(\beta + 1)} > 0.$$

y además

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \text{máx}\{x_0, x_3, x_5, x_7, x_9, \cdots, x_{2k-1}\} \\
x_{2k} &= \text{mín}\{x_1, x_2, x_4, x_6, \cdots, x_{2k}\}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se satiface (2.16). La órbita $\mathcal{O}(x_0)$ cumple con (2.27) y es una órbita periódica de período $2k+1$ para (2.1).

$\square$

Observación 1. Si $\beta > 1$, entonces (2.15) siempre se cumple para $k = 1, 2$. Consideremos el siguiente polinomio

$$
P_k(x) = x^{2k} - 2x^{2k-2} + 1 = 0 \qquad \forall k \geq 3. \tag{2.28}
$$

Luego, por un simple cálculo podemos ver que

$$
\begin{aligned}
P_k\left(\sqrt{2 - \frac{2}{k}}\right) &= \left(2 - \frac{2}{k}\right)^k - 2\left(2 - \frac{2}{k}\right)^{k-1} + 1 \\
&= \left(2 - \frac{2}{k}\right)^{k-1}\left(2 - \frac{2}{k} - 2\right) + 1 \\
&= \left(2 - \frac{2}{k}\right)^{k-1}\left(-\frac{2}{k}\right) + 1 \\
&= 1 - \frac{2}{k}\left(2 - \frac{2}{k}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

Ahora veamos que

$$
P_k\left(\sqrt{2 - \frac{2}{k}}\right) < 0 \quad \forall k \geq 3 \quad \iff \quad \left(2 - \frac{2}{k}\right)^{k-1} > \frac{k}{2} \qquad k \geq 3.
$$

En efecto. Para $k = 3$, tenemos que

$$\begin{aligned} 32 &> 27, \\ \frac{16}{9} &> \frac{3}{2}, \\ \left(\frac{4}{3}\right)^2 &> \frac{3}{2}, \\ \left(\frac{6-2}{3}\right)^{3-1} &> \frac{3}{2}, \\ \left(2-\frac{2}{3}\right)^{3-1} &> \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que se cumple para $k = n$ y veamos que se cumple para $k = n+1$. En efecto. Por **H.I** tenemos que

$$\left(2-\frac{2}{n}\right)^{n-1} > \frac{n}{2} \qquad \forall n \geq 3 \tag{2.29}$$

Nótese que para $n \geq 3$, se tiene que $2 - \frac{2}{n} > 0$ multiplicamos este número en la desigualdad (2.29), lo cual permite

$$\begin{aligned} \left(2-\frac{2}{n}\right)\left(2-\frac{2}{n}\right)^{n-1} &> \left(2-\frac{2}{n}\right)\frac{n}{2}, \\ \left(2-\frac{2}{n}\right)^{n} &> n-1. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Ahora bién, tenemos que

$$\begin{aligned} n &\geq 3, \\ 2n-2 &\geq n+1, \\ 2(n-1) &\geq n+1, \\ n-1 &\geq \frac{n+1}{2}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Luego por (2.30) y (2.31) se tiene que

$$\left(2-\frac{2}{n}\right)^{n} > \frac{n+1}{2}, \qquad \forall n \geq 3.$$

Así
$$P_k\left(\sqrt{2-\frac{2}{k}}\right)<0 \qquad \forall k\geq 3.$$
Es fácil ver que $P_k(\sqrt{2})=1>0$, luego por **Teorema 1.2.1** existe $\alpha_k\in\left(\sqrt{2-\frac{2}{k}},\sqrt{2}\right)$ tal que $P_k(\alpha_k)=0$. Además
$$\lim_{k\to\infty}\sqrt{2-\frac{2}{k}}=\sqrt{2}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{k\to\infty}\alpha_k=\sqrt{2}\ .$$
De todo lo anterior, se concluye que (2.15) siempre se cumple para $\beta\geq\sqrt{2}$.

Ahora, consideremos el siguiente polinomio
$$Q_k(x)=x^{2k+1}-2x^{2k-1}-1.$$
Es fácil ver que $Q_k(\sqrt{2})=-1<0$. También podemos calcular $Q_k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, esto es
$$\begin{aligned}
Q_k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}-1\\
&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-2\right)-1\\
&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-1\\
&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)-1.
\end{aligned}$$
Claramente
$$Q_k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\geq 0,\quad \forall k\in\mathbb{N} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}\geq\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$
De lo anterior tenemos que si $k=1$, entonces $Q_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=0$ y $Q_k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)>0$ para todo $k\geq 2$. Luego $Q_k(\sqrt{2})<0<Q_k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ para todo $k\geq 2$, entonces por **Teorema 1.2.1** existe $\lambda_k\in\left(\sqrt{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ tal que $Q_k(\lambda_k)=0$, para todo $k\geq 2$. Se quiere probar que $Q_k(\beta)\geq 0$ si $\beta\geq\lambda_k$. Notemos que

$$\begin{aligned}
Q_k'(x)&=(2k+1)x^{2k}-2(2k-1)x^{2k-2}\\
&=x^{2k-2}[x^2(2k+1)-(4k-2)].
\end{aligned}$$

Si $k \geq 2$ entonces

$$Q_k'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \quad \text{o} \quad x = \pm\sqrt{\frac{4k-2}{2k+1}}.$$

Como nos interesa las raices positivas, podemos considerar

$$x_k = \sqrt{\frac{4k-2}{2k+1}} = \sqrt{2 - \frac{4}{2k+1}} \qquad \text{con} \quad k \geq 2.$$

Es fácil verificar que $Q_k'(x) < 0$ si $x \in (0, x_k)$ y $Q_k'(x) > 0$ si $x \in (x_k, +\infty)$ para todo $k \geq 2$. Por lo tanto $Q_k(x)$ es creciente en $(x_k, +\infty)$ para todo $k \geq 2$, en particular en $\left(\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \subset (x_k, +\infty)$. Como $\lambda_k \in \left(\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, entonces $Q_k(x) \geq Q_k(\lambda_k)$ para todo $x \geq \lambda_k$. De todo lo anterior, se concluye que (2.16) siempre se cumple para $\beta \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Con base en la **Observación 1** y el **Teorema 2.1.7** tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.8. Si (2.15) se cumple, (2.1) tiene órbitas periódicas de período $2k, 2k-2, 2k-4, \ldots, 4, 2$ y un punto fijo. Si (2.16) se cumple (2.1) tiene órbitas periódicas de período $2k+1, 2k+3, 2k+5, \ldots$. Especificamente para $\beta \in [\sqrt{2}, \infty)$, (2.1) tiene órbita periódica de períodos pares arbitrarios; para $\beta \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$, (2.1) tiene órbita periódica de períodos impares arbitrarios

Demostración. Supongamos que $\beta \in [\sqrt{2}, \infty)$, por la **Observación 1** se tiene que $\beta > \alpha_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y (2.15) siempre se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$, en particular para $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Luego por **Teorema 2.1.7**, se sigue que (2.1) tiene órbitas periódicas de período $2i$, es decir (2.1) tiene órbita periódica de períodos pares arbitrarios, y $\frac{1}{\beta-1}$ es un punto fijo de (2.1).

Supongamos que $\beta \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$, por la **Observación 1** se tiene que $\beta > \lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y (2,16) siempre se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$, en particular para $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Luego por **Teorema 2.1.7**, se sigue que (2.1) tiene órbita periódica de períodos impares arbitrarios. $\square$

2.2. g es una función sigmoidea

En esta sección trabajaremos con una no linealidad g sigmoidea, es decir, una función tal que existen constantes positivas r y ϵ tales que

$$\begin{aligned} |g(x)-1| &\leq \epsilon \quad si \quad x \geq r, \\ |g(x)+1| &\leq \epsilon \quad si \quad x \leq -r. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Lema 2.2.1. Sean $\beta \in \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \infty\right)$ y $g(x)$ la función dada por (2.2). Entonces la órbita $\mathcal{O}\left(\frac{\beta^2+\beta-1}{\beta^3-1}\right)$ es periódica con período tres.

Demostración. En efecto. Dado que $\beta > 1$, entonces $\beta^2 > \beta > 1$, de donde $\beta^2 + \beta - 1 > 0$, y puesto que $\beta^3 - 1 > 0$, se sigue que $x_0 = \frac{\beta^2+\beta-1}{\beta^3-1} \geq 0$. Así

$$f(x_0) = \beta\left(\frac{\beta^2+\beta-1}{\beta^3-1}\right) - 1 = \left(\frac{\beta^3+\beta^2-\beta-\beta^3+1}{\beta^3-1}\right) = \frac{\beta^2-\beta+1}{\beta^3-1}.$$

Tenemos que $f(x_0) = \frac{\beta^2-\beta+1}{\beta^3-1} \geq 0$, luego

$$f^2(x_0) = \beta\left(\frac{\beta^2-\beta+1}{\beta^3-1}\right) - 1 = \left(\frac{\beta^3-\beta^2+\beta-\beta^3+1}{\beta^3-1}\right) = \frac{-\beta^2+\beta+1}{\beta^3-1}.$$

Ahora, dado que $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2\beta - 1 > \sqrt{5}, \\ &\Rightarrow \quad 4\beta^2 - 4\beta + 1 > 5, \\ &\Rightarrow \quad 4\beta^2 - 4\beta - 4 > 0, \\ &\Rightarrow \quad \beta^2 - \beta - 1 > 0, \\ &\Rightarrow \quad -\beta^2 + \beta + 1 < 0. \end{aligned}$$

Y puesto que $\frac{1}{\beta^3-1} > 0$, entonces $f^2(x_0) = \dfrac{-\beta^2+\beta+1}{\beta^3-1} < 0$, de donde

$$f^3(x_0) = \beta\left(\frac{-\beta^2+\beta+1}{\beta^3-1}\right)+1 = \left(\frac{-\beta^3+\beta^2+\beta+\beta^3-1}{\beta^3-1}\right) = \frac{\beta^2+\beta-1}{\beta^3-1} = x_0.$$

Esto es

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{\beta^2-\beta+1}{\beta^3-1} > 0,\\ f^2(x_0) &= \frac{-\beta^2+\beta+1}{\beta^3-1} < 0,\\ f^3(x_0) &= \frac{\beta^2+\beta-1}{\beta^3-1} = x_0 > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la órbita $\mathcal{O}\left(\frac{\beta^2+\beta-1}{\beta^3-1}\right)$ es una órbita periódica de período tres.

$\square$

Teorema 2.2.2. Supongamos que $\beta \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{,}\ \infty\right)$, $r \in \left(0\ \text{,}\ \frac{(\beta^2-\beta-1)}{(\beta^3-1)}\right)$, g es continua en $\mathbb{R}$ y satisface (2.32). Si

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\beta^2}\left(1+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^4}\right)\left(\frac{\beta^2-\beta-1}{\beta^3-1}-r\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{\beta^2}\left(3+\frac{4}{\beta}+\frac{4}{\beta^2}+\frac{2}{\beta^3}+\frac{1}{\beta^4}\right)\\ &+\frac{2\epsilon}{\beta^2}\left(1+\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\beta^4}\right)\left(\frac{\beta^2-\beta-1}{\beta^3-1}-r\right) \leq \left(\frac{\beta^2-\beta-1}{\beta^3-1}-r\right)^2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces la ecuación (2.1) tiene una órbita periódica de período m.

Demostración. Primero probaremos que (2.1) tiene una órbita periódica de período 3. En efecto, reescribimos (2.1) como

$$\begin{aligned} & x_{n+1} = \beta x_n - g(x_n)\\ \Rightarrow\quad & \beta x_n = x_{n+1} + g(x_n),\\ \Rightarrow\quad & x_n = \frac{x_{n+1}+g(x_n)}{\beta},\\ \Rightarrow\quad & x_n = \frac{1}{\beta}x_{n+1} + \frac{1}{\beta}g(x_n). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Ahora, mostremos que

$$y_{n+1} = \frac{1}{\beta} y_n + \frac{1}{\beta} g(y_{n-2}), \tag{2.35}$$

tiene una solución $\{y_n^*\}$ de período 3. Entonces $\mathcal{O}(y_0)$ es una órbita periódica de período 3 de (2.1).

Si y_{-2}, y_{-1}, y_0 están dados por (2.35), tenemos

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{\beta} y_0 + \frac{1}{\beta} g(y_{-2}),\\
y_2 &= \frac{1}{\beta^2} y_0 + \frac{1}{\beta^2} g(y_{-2}) + \frac{1}{\beta} g(y_{-1}),\\
y_3 &= \frac{1}{\beta^3} y_0 + \frac{1}{\beta^3} g(y_{-2}) + \frac{1}{\beta^2} g(y_{-1}) + \frac{1}{\beta} g(y_0).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Luego, definimos una función $\mathcal{H} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\mathcal{H}(y_1, y_2, y_3) = (z_1, z_2, z_3)$ donde

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{\beta} y_3 + \frac{1}{\beta} g(y_1),\\
z_2 &= \frac{1}{\beta^2} y_3 + \frac{1}{\beta^2} g(y_1) + \frac{1}{\beta} g(y_2),\\
z_3 &= \frac{1}{\beta^3} y_3 + \frac{1}{\beta^3} g(y_1) + \frac{1}{\beta^2} g(y_2) + \frac{1}{\beta} g(y_3).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Ahora, sea $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$, dada por

$$\overline{y}_1 = f^2(x_0) = \frac{-\beta^2 + \beta + 1}{\beta^3 - 1} < 0,$$

$$\overline{y}_2 = f(x_0) = \frac{\beta^2 - \beta + 1}{\beta^3 - 1} > 0,$$

$$\overline{y}_3 = f^3(x_0) = \frac{\beta^2 + \beta - 1}{\beta^3 - 1} > 0.$$

Del **Lema 2.2.1**, podemos reescribir a $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$ y $\overline{y}_3$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}\overline{y}_3 - \frac{1}{\beta} &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2 + \beta - 1}{\beta^3 - 1}\right) - \frac{\beta^3 - 1}{\beta(\beta^3 - 1)} = \frac{-\beta^3 + \beta^2 + \beta}{\beta(\beta^3 - 1)} = \frac{\beta(-\beta^2 + \beta + 1)}{\beta(\beta^3 - 1)}\\
&= \frac{-\beta^2 + \beta + 1}{\beta^3 - 1} = \overline{y}_1.
\end{aligned}$$

De manera similar para $\overline{y}_2$ y $\overline{y}_3$. Así

$$\begin{aligned}
\overline{y}_1 &= \frac{1}{\beta}\overline{y}_3 - \frac{1}{\beta}, \\
\overline{y}_2 &= \frac{1}{\beta^2}\overline{y}_3 - \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}, \\
\overline{y}_3 &= \frac{1}{\beta^3}\overline{y}_3 - \frac{1}{\beta^3} + \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}\right).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Si $\sqrt{(y_1 - \overline{y}_1)^2 + (y_2 - \overline{y}_2)^2 + (y_3 - \overline{y}_3)^2} \leq \delta_0 = \frac{\beta^2-\beta-1}{\beta^3-1} - r$, entonces

$$(y_1 - \overline{y}_1)^2 + (y_2 - \overline{y}_2)^2 + (y_3 - \overline{y}_3)^2 \leq \delta_0^2 \tag{2.39}$$

y puesto que $y_2 \neq \overline{y}_2$ e $y_3 \neq \overline{y}_3$, entonces $(y_2 - \overline{y}_2)^2 + (y_3 - \overline{y}_3)^2 > 0$, de donde

$$\begin{aligned}
& (y_1 - \overline{y}_1)^2 < \delta_0^2, \\
\Rightarrow \quad & y_1 - \overline{y}_1 < \delta_0, \\
\Rightarrow \quad & y_1 < \overline{y}_1 + \delta_0, \\
\Rightarrow \quad & y_1 < \frac{-\beta^2 + \beta + 1}{\beta^3 - 1} + \frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta^3 - 1} - r, \\
\Rightarrow \quad & y_1 < -r.
\end{aligned}$$

De manera similar para y_2 e y_3, esto es.

$$\begin{aligned}
& y_1 \leq \overline{y}_1 + \delta_0 = -r, \\
& y_2 \geq \overline{y}_2 - \delta_0 = \frac{\beta^2 - \beta + 1}{\beta^3 - 1} - \frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta^3 - 1} + r = \frac{2}{\beta^3 - 1} + r \geq r, \\
& y_3 \geq \overline{y}_3 - \delta_0 = \frac{\beta^2 + \beta - 1}{\beta^3 - 1} - \frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta^3 - 1} + r = \frac{2\beta}{\beta^3 - 1} + r \geq r,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

En vista de (2.37), (2.38), obtenemos

$$\begin{aligned}
z_1 - \overline{y}_1 &= \frac{1}{\beta}y_3 + \frac{1}{\beta}g(y_1) - \left(\frac{1}{\beta}\overline{y}_3 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}y_3 - \frac{1}{\beta}\overline{y}_3 + \frac{1}{\beta}g(y_1) + \frac{1}{\beta} \\
&= \frac{1}{\beta}(y_3 - \overline{y}_3) + \frac{1}{\beta}(g(y_1) + 1).
\end{aligned}$$

Luego por (2.39) se tiene que $|y_3 - \overline{y_3}| < \delta_0$. Y notando (2.32), tenemos que

$$\begin{aligned}|z_1 - \overline{y}_1| &= \left|\frac{1}{\beta}(y_3 - \overline{y}_3) + \frac{1}{\beta}(g(y_1)+1)\right| \leq \frac{1}{\beta}|y_3 - \overline{y}_3| + \frac{1}{\beta}|g(y_1)+1| \\ &\leq \frac{1}{\beta}\delta_0 + \frac{1}{\beta}\epsilon.\end{aligned}$$

De forma análoga

$$|z_2 - \overline{y}_2| \leq \frac{1}{\beta^2}\delta_0 + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right)\epsilon,$$

$$|z_3 - \overline{y}_3| \leq \frac{1}{\beta^3}\delta_0 + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3}\right)\epsilon.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}(z_1 - \overline{y}_1)^2 &\leq \left(\frac{1}{\beta}\delta_0 + \frac{1}{\beta}\epsilon\right)^2 = \frac{1}{\beta^2}\delta_0^2 + \frac{2\epsilon\delta_0}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}\epsilon^2. \\ (z_2 - \overline{y}_2)^2 &\leq \left(\frac{1}{\beta^2}\delta_0 + \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}\right)\epsilon\right)^2 \\ &= \frac{1}{\beta^4}\delta_0^2 + \frac{2\delta_0\epsilon}{\beta^2}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right) + \frac{\epsilon^2}{\beta^2}\left(1 + \frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right). \\ (z_3 - \overline{y}_3)^2 &\leq \left(\frac{1}{\beta^3}\delta_0 + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3}\right)\epsilon\right)^2 \\ &= \frac{1}{\beta^6}\delta_0^2 + \frac{2\delta_0\epsilon}{\beta^2}\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4}\right) + \frac{\epsilon^2}{\beta^2}\left(1 + \frac{2}{\beta} + \frac{3}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4}\right).\end{aligned}$$

Luego por (2.33)

$$\begin{aligned}(z_1 - \overline{y}_1)^2 + (z_2 - \overline{y}_2)^2 + (z_3 - \overline{y}_3)^2 \leq &\frac{1}{\beta^2}\left(1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^4}\right)\delta_0^2 + \\ &+ \frac{\epsilon^2}{\beta^2}\left(3 + \frac{4}{\beta} + \frac{4}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4}\right) + \\ &+ \frac{2\delta_0\epsilon}{\beta^2}\left(1 + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4}\right) \\ &\leq \left(\frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta^3 - 1} - r\right)^2 \\ &= \delta_0^2.\end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{H}$ mapea

$$N(\overline{y}, \delta_0) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : (y_1 - \overline{y}_1)^2 + (y_2 - \overline{y}_2)^2 + (y_3 - \overline{y}_3)^2 \leq \delta_0^2\},$$

en $N(\overline{y}, \delta_0)$. Luego, por el **Teorema 1.2.5** $\mathcal{H}$ tiene un punto fijo $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) \in N(\overline{y}, \delta_0)$. Así $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (z_1, z_2, z_3)$ si y solo si $y_{-2} = y_1^*$, $y_{-1} = y_2^*$ y $y_0 = y_3^*$, esto es

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{\beta} y_3 + \frac{1}{\beta} g(y_1), \\
y_2 &= \frac{1}{\beta^2} y_3 + \frac{1}{\beta^2} g(y_1) + \frac{1}{\beta} g(y_2), \\
y_3 &= \frac{1}{\beta^3} y_3 + \frac{1}{\beta^3} g(y_1) + \frac{1}{\beta^2} g(y_2) + \frac{1}{\beta} g(y_3).
\end{aligned}$$

Lo cual implica que es una solución periódica de período 3 de (2.35). Se sigue que para $0 \leq n \leq 3$, tenemos que

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= \frac{1}{\beta} y_n + \frac{1}{\beta} g(y_{n+1}), \\
\beta y_{n+1} &= y_n + g(y_{n+1}), \\
y_n &= \beta y_{n+1} - g(y_{n+1}).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Por lo tanto podemos ver la equivalencia que tiene (2.41) con (2.1) ya que $y_0 = y_3$ y

$$y_1 = \beta y_2 - g(y_2) \quad \text{mientras que} \quad x_3 = \beta x_2 - g(x_2).$$

$$y_2 = \beta y_0 - g(y_0) \quad \text{mientras que} \quad x_1 = \beta x_0 - g(x_0).$$

$$y_3 = \beta y_1 - g(y_1) \quad \text{mientras que} \quad x_2 = \beta x_1 - g(x_1).$$

Como y_n y x_n están bajo las mismas condiciones de g y β, además $y_1 = x_3 = x_0$, $y_2 = x_1$ y $y_3 = x_2$, entonces la solución de (2.41) también es es una solución de (2.1) periódica de período 3 de (2.1). Luego por **Teorema 1.2.4** se tiene que, para cada $m \in \mathbb{N}$ la ecuación (2.1) tiene una órbita periódica de período m.

$\square$

Ejemplo 3. Sea $g_c(x)$ la función dada en el **Ejemplo 1**, entonces

$$|g_c(x) - 1| = \left| \frac{1 - e^{-cx} - 1 - e^{-cx}}{1 + e^{-cx}} \right| = \left| \frac{-2e^{-cx}}{1 + e^{-cx}} \right| = \frac{2e^{-cx}}{1 + e^{-cx}}. \tag{2.42}$$

Ahora, si $x, c, r \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq r > 0$ con $c > 0$, y dado que $(1 + e^{-cx}) \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} -cx &\leq -cr \\ e^{-cx} &\leq e^{-cr} \\ e^{-cx} &\leq e^{-cr}(1 + e^{-cx}) \\ 2e^{-cx} &\leq 2e^{-cr}(1 + e^{-cx}) \\ \frac{2e^{-cx}}{1 + e^{-cx}} &\leq 2e^{-cr}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Así, de (2.42) y (2.45), se tiene que $|g_c(x) - 1| \leq 2e^{-cr}$ si $x \geq r > 0$.

Razonando de forma análoga, tenemos que

$$|g_c(x) + 1| = \left| \frac{1 - e^{-cx} + 1 + e^{-cx}}{1 + e^{-cx}} \right| = \left| \frac{2}{1 + e^{-cx}} \right| = \frac{2}{1 + e^{-cx}}. \tag{2.44}$$

Si $x \leq -r < 0$, entonces

$$\begin{aligned} cr &\leq -cx \\ e^{cr} &\leq e^{-cx} \\ e^{cr} &\leq 1 + e^{-cx} \\ 2e^{cr} &\leq 2(1 + e^{-cx}) \\ \frac{2}{1 + e^{-cx}} &\leq 2e^{-cr}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Luego, por (2.42) y (2.45), se tiene que $|g_c(x) + 1| \leq 2e^{-cr}$ si $x \leq -r < 0$.

Ahora, tomemos $0 < \epsilon < 2$, entonces $1 < \frac{2}{\epsilon}$, se sigue que $\ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right) > 0$, y dado que $r > 0$, de donde $\frac{1}{r} > 0$. Sea $c \geq \frac{1}{r} \ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right) > 0$, luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right) &\leq c \\ \ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right) &\leq cr \\ \frac{2}{\epsilon} &\leq e^{cr} \\ 2e^{-cr} &\leq \epsilon \end{aligned} \tag{2.46}$$

Luego, por (2.46), se tiene que

$$|g_c(x) - 1| \leq \epsilon, \quad \text{si} \quad x \geq r$$

$$|g_c(x) + 1| \leq \epsilon, \quad \text{si} \quad x \leq -r$$

Asumiremos que $\beta \in \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\ , \infty\right)$, $r \in \left(0\ , \frac{(\beta^2-\beta-1)}{(\beta^3-1)}\right)$ y claramente $g_c(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, entonces por (2.32) podemos decir que $g_c = g$. Y por **Teorema 2.2.2**

$$x_{n+1} = \beta x_n - g_c(x_n), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

tiene órbitas periódicas de períodos arbitrarios, siempre que (2.33) se cumpla.

Veamos que si tomamos $\beta = 2$, $c = 12$ y $x_0 = 0.434$ del ejemplo anterior, tenemos que $x_{n+1} = \beta x_n - g_c(x_n), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots,$ tiene órbitas periódicas de período 56, como se muestra en la siguiente gráfica.

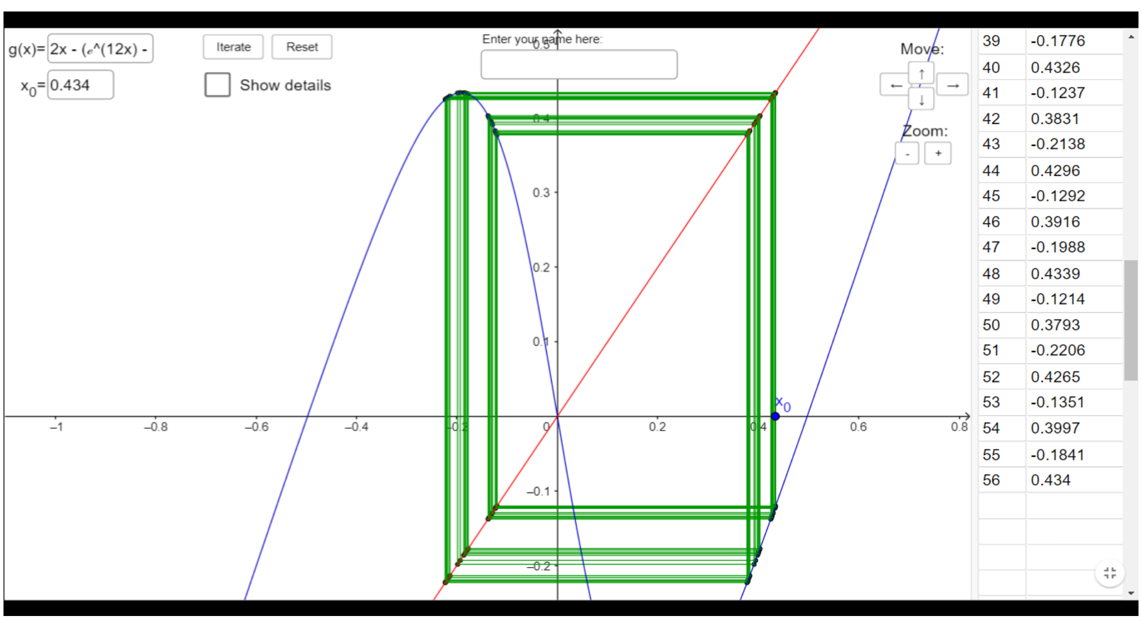


Figura 2.1:

Ahora, tomemos $\beta = 4$, $c = 15$ y $x_0 = 0.166$ del ejemplo anterior, tenemos que $x_{n+1} = \beta x_n - g_c(x_n), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$, tiene órbitas periódicas de período 39, como se muestra en la siguiente gráfica.

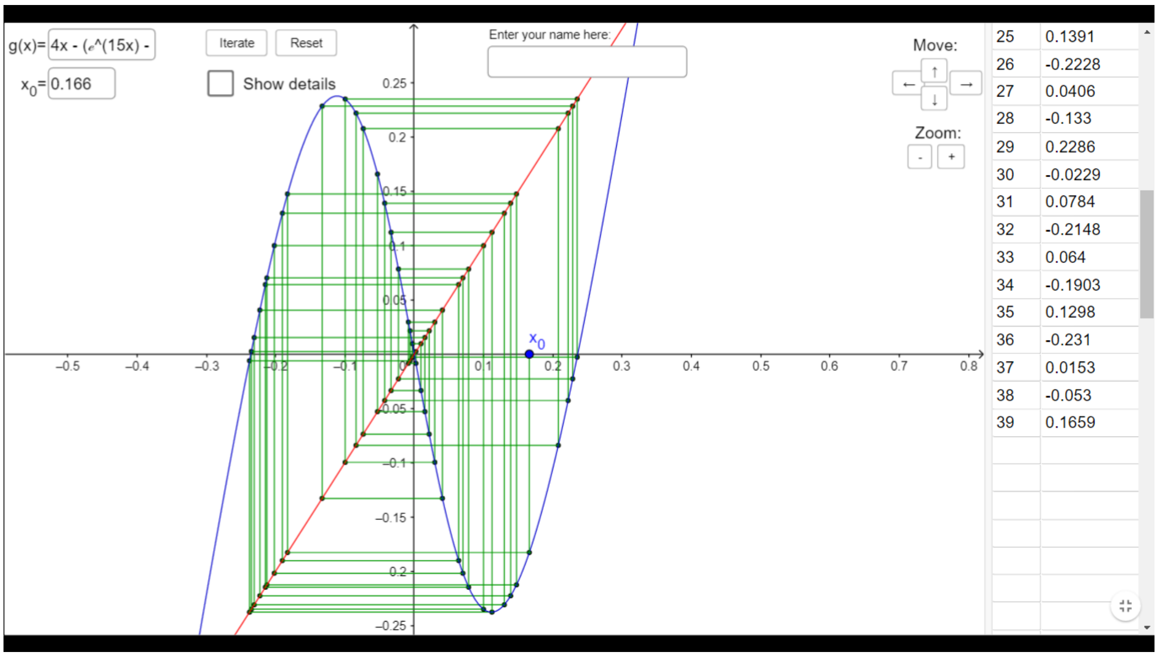


Figura 2.2:

Bibliografía

[1] Z. Zhou, *Periodic orbits on discrete dynamical systems.* Computers & Mathematics with Applications. Vol. 45. pp. 1155-1161. Elsevier. 2003.

[2] R. Holmgren, *A first course in discrete dynamical systems.* Springer Science & Business Media. (2000).

[3] R. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems.* Chapman and Hall/CRC.1989.

[4] Rudin, Walter and Sánchez, Miguel Irán Alcerreca and Aguirre, Luis Briseño *Principios de análisis matemático*, McGraw-Hill 515 R835 1981, 1966.

[5] A.N. Sharkovsky, A.G. Kolyada, *Dynamics of one-dimensional maps.*, Vol. 407. Springer Science & Business Media.

[6] L. Tien-Yien, A. Yorke, The American Mathematical Monthly. *"Period three implies chaos"*, **82** (1975), 985-992.

[7] Robert F Brown *A topological introduction to nonlinear analysis.* Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, Springer, 1993.

[8] Bartle, Robert G and Sherbert, Donald R *Introduction to real analysis*, Wiley New York, fourth edition, 2010.

[9] Wade, William R *An Introduction to Analysis*, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, fourth edition, 2010.