TRANSFORMADA DE FOURIER Y ESPACIOS DE SOBOLEV EN $\mathbb{R}^n$

Luis Guillermo Ruiz Parra

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA
...

TRANSFORMADA DE FOURIER Y ESPACIOS DE SOBOLEV EN $\mathbb{R}^n$

Luis Guillermo Ruiz Parra

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de

Matemático

Asesor:

Dr. Carlos Alberto Banquet Brango

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA

...

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Los jurados abajo firmantes certifican que han leído y que aprueban el trabajo de grado titulado: **TRANSFORMADA DE FOURIER Y ESPACIOS DE SOBOLEV EN** $\mathbb{R}^n$, el cual es presentado por la estudiante **Luis Guillermo Ruiz Parra**.

Fecha: Diciembre de 2022

Asesor: ______________________
Dr. Carlos Alberto Banquet Brango

Carlos Reales
Jurado: ______________________
Dr. Carlos Alberto Reales Martínez

Jurado: ______________________
M. Sc. Jimmy Herlin Lloreda Zúñiga

A mi madre Irley.

Resumen

En el presente trabajo hacemos uso de uno de los operadores más importantes en el análisis de Fourier, el cual recibe el nombre de la Transformada de Fourier y mostramos algunas de sus propiedades. Luego, extendemos el operador transformada de Fourier a funcionales lineales continuos definidos sobre espacios de prueba, cuyos funcionales reciben el nombre de distribuciones, centraremos nuestro estudio en el caso particular de las denominadas distribuciones temperadas, ya que a través de estas distribuciones y los espacios L^p definiremos nuestro objetivo que son los llamados espacios de Sobolev y junto con ello demostraremos algunas de sus propiedades más importantes.

Palabras claves: Clase de Schwartz, distribuciones temperadas y espacios de Sobolev.

Abstract

In the present work we make use of one of the most important operators in Fourier analysis, which receives the name of Fourier Transform and we show some properties. Then, we extend the Fourier transform operator to continuous linear functionals defined on test spaces, whose functionals are called distributions, we will focus our study on the particular case of the so-called tempered distributions, since through these distributions and the spaces L^p we will define our objective, which are the so-called Sobolev spaces, and together with this we will demonstrate some of its most important properties.

Keywords: Schwartz class, tempered distributions and Sobolev spaces..

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a Dios por darme la fuerzas para salir adelante durante todo el transcurso de mi carrera y a mi madre Irley Parra por su apoyo incondicional, a mi padre Guillermo Ruiz, a mi hermano Iván Ruiz por todo el afecto y aporte que me han brindado, a la universidad de Córdoba por brindarme una gran formación académica, al profesor Carlos Alberto Banquet por todo su valioso tiempo, comentarios y sugerencias que me ayudaron en todo el desarrollo de este trabajo, a todos los docentes del departamento de matemáticas y estadísticas que me dieron clases durante todo mi proceso académico, a todos mis compañeros de estudio por los buenos y malos momentos vividos. Gracias a todos los que aportaron su granito de arena y ser parte de este gran logro en mi vida.

Montería, Colombia — Luis Guillermo Ruiz Parra

Agosto 2022.

Índice general

Tabla de Notaciones

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mu)$	Espacio de Lebesgue
$\lvert x\rvert$	$\lvert x\rvert = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$ donde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ o valor absoluto
$\lVert\cdot\rVert_X$	Norma sobre el espacio vectorial X
χ_E	Función caracteristica del conjunto E
$[r]$	La parte entera del número real r
$x \cdot y$	$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ donde $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n)$
$B(x_0, R)$	La bola de radio R y centro en $x_0 \in \mathbb{R}^n$
ω_{n-1}	El área superficial de la esfera unitaria $\mathbf{S}^{n-1}$
ν_n	El volumen de la bola unitaria $\{x \in \mathbb{R}^n : \lvert x\rvert < 1\}$
$\mu(A)$	La medida de Lebesgue del conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$
$\hat{f}, f^{\wedge}$	La transformada de Fourier de la función f
$f * g$	La convolución de f y g
$\bar{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$(\mathbb{Z}_0^+)^n$	Conjunto de los multi$-$índices
$\lvert\alpha\rvert$	$\lvert\alpha\rvert = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-índice
$C_0(\mathbb{R}^n)$	Funciones continuas que decaen en el infinito
$C^\infty(\mathbb{R}^n)$	Funciones infinitamente diferenciables
$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$	Funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$	Clase de Scwhartz
$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$	Espacio de las distribuciones temperadas
$H^s(\mathbb{R}^n)$	Espacio de Sobolev
$\partial_j^m f$	La m-ésima derivada parcial de $f(x_1, ..., x_n)$ con respecto a x_j
$\partial^\alpha f$	$\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$
x^α	$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$

Introducción

El estudio realizado por Lebesgue y Borel, trajo consigo una clase de espacios de funciones muy importantes en áreas como el análisis funcional y las EDPs, llamado espacios de Lebesgue L^p. La riqueza en propiedades de estos espacios les ha permitido a los matemáticos idear nuevas estructuras de espacios de funciones útiles en el estudio de EDPs.
Uno de los operadores más importante en el análisis de Fourier, recibe el nombre de transformada de Fourier, que debido a su avance a las distribuciones tuvo un crecimiento notorio, tanto que, con las propiedades fundamentales de la transformada de Fourier de distribuciones y los espacios L^p, se llega a la introducción de la definición de los espacios de Sobolev H^s. Espacios que al pasar del tiempo han mostrado ser los que reunen las condiciones necesarias para hallar soluciones de EDPs no lineales, fueron introducidos por Sergei L'vovich Sobolev (1930). Al definir las normas de Sobolev obtenemos estimaciones muy buenas que son herramientas muy usuales para probar la existencia y regularidad de soluciones para ecuaciones con derivadas parciales.

En el primer Capítulo, se enuncian definiciones y teoremas que resultan ser necesarios en el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 2, definimos el operador transformada de Fourier y mostramos algunas propiedades. Seguidamente, en el Capítulo 3, se introducen las funciones de Prueba y las distribuciones, nos centraremos en el estudio de las distribuciones temperadas, extendiendo así la transformada de Fourier para distribuciones temperadas. Finalmente, en el Capítulo 4, se da la definición de los espacios de Sobolev, y mostramos algunas de sus propiedades más importantes.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se darán algunas definiciones y se enunciarán algunos teoremas que serán de gran utilidad a lo largo de este trabajo, no se incluyen las demostraciones por ser temas clásicos del análisis matemático; sin embargo, daremos las referencias adecuadas donde se pueda consultar cualquier demostración.

1.1. Resultados de la Integral de Lebesgue

En esta sección introduciremos algunos resultados considerados muy usuales sobre la integral de Lebesgue.
Empezaremos dando la definición de una función Lebesgue medible.

Definición 1.1.1. Si $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ es una función medible, diremos que f es una función Lebesgue medible. Donde, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ denotan la $\sigma-$álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y la $\sigma-$álgebra de Borel en $\bar{\mathbb{R}}$ respectivamente.

Lema 1.1.1. (Lema de Fatou). Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones Lebesgue medibles en $\mathbb{R}^n$, tal que $f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\liminf_{k\to\infty} f_k \right) dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Demostración. Véase Jones [2 , Pág 129]. □

Teorema 1.1.2. (Teorema Convergencia Dominada Lebesgue). Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones Lebesgue medibles en $\mathbb{R}^n$, tal que $f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponga que la sucesión converge puntualmente en *c.t.p.* de $\mathbb{R}^n$ a la función f. Esto es

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k \quad \text{en} \quad c.t.p. \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^n .$$

Si existe una función $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $g \geq 0$ tal que

$$|f_k| \leq g \quad \text{en} \quad c.t.p. \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^n; \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N},$$

entonces $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Demostración. Véase Jones [2, Pág 133]. □

Definición 1.1.2. Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ es una función y $y \in \mathbb{R}^n$ fijo, definiremos la función $f_y : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ por

$$f_y(x) = f(x, y), \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

a la cual llamaremos sección de f determinada por y.
Para más información ver Jones [2 , Pág 180].

Teorema 1.1.3. (Teorema de Fubini). Sea f una función en $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Entonces la función $f_y \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_y(x) dx$$

existe en *c.t.p.* $y \in \mathbb{R}^n$. Además, $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(z) dz.$$

Demostración. Véase Jones [2 , Pág 189]. □

Teorema 1.1.4. (Teorema del Cambio de Variable). Sean A y B subconjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $\Phi : A \longrightarrow B$ una función biyectiva, tal que $\Phi, \Phi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que f es una función Lebesgue medible sobre B. Entonces $f \circ \Phi$ es una función Lebesgue medible sobre A y

$$\int_B f(y)dy = \int_A f(\Phi(x))|J(x)|dx. \tag{1.1}$$

Aquí, $|J(x)|$ es el determinante Jacobiano de Φ en x.

Demostración. Véase Jones [2 , Pág 502]. □

La fórmula (1.1) es se satisface en dos sentidos:

1. Si $f \geq 0$ entonces (1.1) se cumple,

2. En el caso general, $f \in L^1(B)$ si y sólo si $f \circ \Phi \in L^1(A)$, y entonces la fórmula es válida.

Teorema 1.1.5. Si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Una generalización del teorema anterior para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ es la siguiente:

Teorema 1.1.6. (Teorema del valor medio en $\mathbb{R}^n$). Sea $\Psi : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en A un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Sean $a \in A$ y $a + h \in A$. Si A contiene al segmento

$$I(a; a + h) = \{a + th : t \in [0, 1]\}$$

que une a con $a + h$. Entonces existe $c \in I(a; a + h)$ tal que,

$$\Psi(a + h) - \Psi(a) = \nabla\Psi(c) \cdot h.$$

Demostración. Véase Bredon [12, Pág 63.] □

1.2. Espacios $L^P(\mathbb{R}^n)$ y Convolución

Denotaremos por $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mu)$ **el espacio de Lebesgue** donde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es la $\sigma-$álgebra de Lebesgue y μ la medida de Lebesgue.

Definición 1.2.1. Sean $p \in [1, \infty)$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una función Lebesgue medible en $\mathbb{R}^n$. Diremos que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ o $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mu)$ si

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx < \infty.$$

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, la norma de f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ es el número

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{1/p}$$

Definición 1.2.2. Si $p = \infty$. Denotamos por $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ o $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mu)$ al conjunto de todas las funciones Lebesgue medibles esencialmente acotadas sobre $\mathbb{R}^n$. Además, la norma de una función $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es el número

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \quad \text{para} \quad c.t.p. \quad x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Si f es una función continua sobre $\mathbb{R}^n$ definimos $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Para $p \in [1, \infty]$, denotamos por p' al conjugado de Hölder de p el cual satisface

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Teorema 1.2.1. (**Desigualdad de Hölder**). Sean $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Demostración. Véase M. Ruzhansky [9 , Pág 230]. □

Como consecuencia de la desigualdad de Hölder tenemos el siguiente resultado

Corolario 1.2.2. Sean $p, q, r \in [1, \infty]$ con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ entonces $fg \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Además se tiene la estimación

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.2}$$

Demostración. Note que, $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$ y por desigualdad de Hölder

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |fg|^r dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^r |g|^r dx \leq \||f|^r\|_{p/r} \||g|^r\|_{q/r} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

Por lo que se satisface (1.2). □

Corolario 1.2.3. Si $1 \leq p < r < \infty$, entonces $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^r(\mathbb{R}^n)$. Además, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{p/r} \|f\|_\infty^{1-p/r}.$$

Demostración. Véase Jones [2, Pág 242.] □

Teorema 1.2.4. (**Teorema Riesz-Fischer**). Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mu)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Véase [2 , Pág 232]. □

Teorema 1.2.5. (**Densidad**). Para $1 \leq p < \infty$. Entonces $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Véase [2 , Pág 245]. □

Definición 1.2.3. Sean f y g funciones Lebesgue medibles sobre $\mathbb{R}^n$ denotamos por $f * g$ a la convolución de f y g definida como sigue

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

El operador convolución es conmutativo, asociativo y distributivo con respecto a la suma. Es decir,

1. $f * g = g * f$.

2. $(f * g) * h = f * (g * h)$.

3. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.

Como consecuencia de la definición anterior tenemos los siguientes resultados.

Teorema 1.2.6. (**Teorema de Young**). Sean $p, q, r \in [1, \infty]$ tales que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g$ existe en *c.t.p.* y $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Además

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demostración. Véase F. Linares, G.Ponce [8 , Pág 28]. □

Teorema 1.2.7. (**Identidad Aproximada**). Sea $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi_k dx = c$ existe;

2. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\phi_k| dx \leq M$ para alguna constante finita $M > 0$;

3. para todo $r > 0$,
$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{|x|\geq r} |\phi_k(x)| dx = 0.$$

Entonces para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$,

$$\lim_{k\to\infty} \|f * \phi_k - cf\|_p = 0.$$

Demostración. Véase [2 , Pág 285]. □

1.3. Algunos Resultados del Análisis Funcional

Definición 1.3.1. (Operador Lineal Acotado). Sean X y Y espacios normados y $L : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Diremos que L es un operador lineal acotado si existe un número real c tal que

$$\|Lx\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Teorema 1.3.1. Sean X y Y espacios normados y $L : X \longrightarrow Y$ un operador lineal, entonces:

1. L es continuo si y solo si L es acotado.

2. Si L es continuo en un solo punto entonces L es continuo.

Demostración. Véase [3 , Pág 97.] $\square$

Teorema 1.3.2. (Extensión Lineal Acotada). Sea $L : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado con X un espacio normado y Y un espacio de Banach. Entonces L tiene una extensión $\tilde{L} : \overline{X} \longrightarrow Y$ donde $\tilde{L}$ es un operador lineal acotado con norma $\|L\| = \|\tilde{L}\|$. Aquí, $\overline{X}$ denota la clausura de X.

Demostración. Véase [3 , Pág 100.] $\square$

Definición 1.3.2. (Funcional Lineal Acotado). Un funcional lineal $h : X \longrightarrow K$ donde X es un espacio normado y K es el campo escalar de X, es un funcional lineal acotado si existe c un número real tal que

$$|h(x)| \leq c\|x\|_X, \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Definición 1.3.3. (Espacio Dual X'). Sea X un espacio normado. Entonces el conjunto de todos los funcionales lineales acotados sobre X es un espacio normado, al cual llamaremos el espacio dual de X que denotaremos por X'.

Definición 1.3.4. (Operador$-$Adjunto de Hilbert L^*). Sea $L : H_1 \longrightarrow H_2$ un operador lineal acotado donde H_1, H_2 son espacios de Hilbert. Entonces el operador$-$adjunto de Hilbert de L denotado por L^* es el operador

$$L^* : H_2 \longrightarrow H_1$$

tal que para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$ se cumple que

$$\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^*y\rangle.$$

Capítulo 2

Transformada de Fourier de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$

En este capítulo presentamos la definición de la transformada de Fourier para funciones Lebesgue integrables, este operador se consiedra uno de los más importantes en el análisis de Fourier, demostraremos algunas de sus propiedades. Seguido que por medio de la transformada obtendremos la fórmula de inversión de Fourier y con ello algunas propiedades interesantes. Luego, restringimos la transformada de Fourier a una clase de funciones más pequeñas que recibirán el nombre de las clase de Schwartz, por último extendemos la definición de la transformada de Fourier a los espacios $L^2(\mathbb{R}^n)$ que recibirá el nombre de la transformada de Fourier-Plancherel.

2.1. Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

En esta sección definimos la transformada de Fourier de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ que fueron introducidas por el matemático frances Joseph Fourier en (J.B.J. Fourier [10],[11]) y demostraremos algunas de sus propiedades.

Definición 2.1.1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Fourier de f denotada por $\widehat{f}$ es la función $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx, \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Nótese que $\widehat{f}(\xi)$ está bien definida para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, ya que $|f(x)e^{-ix\cdot\xi}| = |f(x)|$.

Ahora continuamos con algunas propiedades de la transformada de Fourier. Antes de eso, introduciremos algunas notaciones. Para una función f medible en $\mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ fijo y $a > 0$ definiremos la traslación, dilatación y reflexión de f por

$$\begin{aligned}(\tau_y f)(x) &= f(x-y)\\ (\delta^a f)(x) &= f(ax)\\ \tilde{f}(x) &= f(-x).\end{aligned}$$

Proposición 2.1.1. Dadas funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$,$\eta, y \in \mathbb{R}^n$ y $a > 0$.

(1) $\widehat{bf+g}(\xi) = b\widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$ para todo $b \in \mathbb{C}$.   (Linealidad).

(2) $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(3) $\widehat{f}$ es una función continua en $\mathbb{R}^n$. Más aún $\widehat{f}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

(4) $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y además $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

(5) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \widehat{f}(0)$.

(6) $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

(7) Para $y \in \mathbb{R}^n$ fijo, $\widehat{\tau_{-y}f}(\xi) = e^{iy\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)$
Para $\eta \in \mathbb{R}^n$ fijo, $\widehat{e^{ix\cdot\eta}f(x)}(\xi) = (\tau_\eta \widehat{f})(\xi)$

(8) Sea T una matriz $n \times n$ invertible, denotamos por T^{tr} la transpuesta de T. Entonces
$$|\det T|\widehat{f(Tx)}(\xi) = \widehat{f}((T^{tr})^{-1}\xi).$$

(9) Si $a > 0$, entonces $a^{-n}\widehat{f(\frac{x}{a})}(\xi) = (\delta^a \widehat{f})(\xi)$

(10) Si T es una matriz ortogonal, entonces $\widehat{f \circ T}(\xi) = (\widehat{f} \circ T)(\xi)$

Demostración. 1. Se sigue de la linealidad de la integral de Lebesgue.

2. Note que, $|f(x)e^{-ix\cdot\xi}| = |f(x)|$ entonces $f(x)e^{-ix\cdot\xi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

   Así,

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)e^{-ix\cdot\xi}|dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \|f\|_1$$

   Por lo tanto, $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

3. Sean $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = \xi$.

   Ahora, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} f(x)e^{-ix\cdot\xi_k} = f(x)e^{-ix\cdot\xi}$.

   Por otro lado, $|f(x)e^{-ix\cdot\xi_k}| = |f(x)|$ y además $|f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $|f| \geq 0$ una función independiente de k. Luego, es posible elegir $|f|$ como una función dominante. Por lo que, el teorema 1.1.2 implica que

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{f}(\xi_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi_k}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f(x)e^{-ix\cdot\xi_k}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx = \widehat{f}(\xi).$$

   Así, $\widehat{f}$ es continua en ξ, dado que ξ fue tomada arbitraria se concluye que $\widehat{f}$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

   Ahora, para mostrar que $\widehat{f}$ es uniformemente continua, haremos uso de la siguiente desigualdad

$$|e^{it} - 1| \leq |t|, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.1}$$

   Note que, por la linealidad de la integral de Lebesgue tenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi') - \widehat{f}(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi'}dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[e^{-ix\cdot\xi'} - e^{-ix\cdot\xi}\right]dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\left[e^{ix\cdot(\xi-\xi')} - 1\right]dx.
\end{aligned}$$

   Por lo que,

$$|\widehat{f}(\xi') - \widehat{f}(\xi)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\left[e^{ix\cdot(\xi-\xi')} - 1\right]dx\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)||e^{ix\cdot(\xi-\xi')} - 1|dx.$$

Luego, para cualquier $r > 0$ y haciendo uso de la desigualdad en (2.1) , se tiene que

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi') - \widehat{f}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||e^{ix\cdot(\xi-\xi')} - 1|dx \\
&= \int_{|x|\leq r} |f(x)||e^{ix\cdot(\xi-\xi')} - 1|dx + \int_{|x|>r} |f(x)||e^{ix\cdot(\xi-\xi')} - 1|dx \\
&\leq \int_{|x|\leq r} |f(x)||x\cdot(\xi-\xi')|dx + \int_{|x|>r} 2|f(x)|dx \\
&\leq \int_{|x|\leq r} |f(x)||x||\xi-\xi'|dx + 2\int_{|x|>r} |f(x)|dx \\
&= |\xi-\xi'| \int_{|x|\leq r} |x||f(x)|dx + 2\int_{|x|>r} |f(x)|dx.
\end{aligned}$$

Si $\epsilon > 0$ dado, es posible elegir $r > 0$ tal que tengamos la siguiente estimación

$$\int_{|x|>r} |f(x)|dx \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Ahora, para $r > 0$ fijo, tomamos $\delta := \frac{\epsilon}{2\int_{|x|\leq r} |x||f(x)|dx} > 0$ tal que, si $|\xi - \xi'| \leq \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi') - \widehat{f}(\xi)| &\leq |\xi-\xi'| \int_{|x|\leq r} |x||f(x)|dx + 2\int_{|x|>r} |f(x)|dx \\
&\leq \delta \int_{|x|\leq r} |x||f(x)|dx + 2\int_{|x|>r} |f(x)|dx \\
&\leq \left(\frac{\epsilon}{2\int_{|x|\leq r} |x||f(x)|dx}\right) \int_{|x|\leq r} |x||f(x)|dx + 2\left(\frac{\epsilon}{4}\right) \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Lo cual muestra que $\widehat{f}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

4. Del inciso (2) se tiene que $\widehat{f}$ es una función continua en $\mathbb{R}^n$, por lo que

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|.$$

Ahora, en el inciso (1) se mostró que $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Luego,

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{|\widehat{f}(\xi)|\} \leq \|f\|_1 < \infty.$$

Por lo tanto, $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y además se tiene la estimación $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

5. Para $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $e^{-ix\cdot 0} = 1$. Así,

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot 0} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

6. Tomando $p = q = r = 1$, el teorema 1.2.6 nos garantiza que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

   Luego, aplicando el teorema de Fubini se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-ix\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) e^{-ix\cdot\xi} dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) e^{-i[y+(x-y)]\cdot\xi} dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) e^{-i[y\cdot\xi+(x-y)\cdot\xi]} dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) e^{-iy\cdot\xi} e^{-i(x-y)\cdot\xi} dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy\cdot\xi} dy \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) e^{-i(x-y)\cdot\xi} dx \\
&= \widehat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) e^{-i(x-y)\cdot\xi} dx \quad \text{Haciendo} \quad u = x - y \\
&= \widehat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} g(u) e^{-iu\cdot\xi} du \\
&= \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

7. Sea $y \in \mathbb{R}^n$ un punto fijo, entonces

$$\widehat{\tau_{-y} f(x)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) e^{-ix\cdot\xi} dx.$$

Por el teorema del Cambio de Variable en $\mathbb{R}^n$, haciendo $u = x + y$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau_{-y} f(x)}(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i(u-y)\cdot\xi} du \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{iy\cdot\xi} e^{-iu\cdot\xi} du \\
&= e^{iy\cdot\xi} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-iu\cdot\xi} du \\
&= e^{iy\cdot\xi} \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Ahora, para $\eta \in \mathbb{R}^n$ un punto fijo,

$$\widehat{e^{ix\cdot\eta} f(x)}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot(\xi-\eta)} dx = \widehat{f}(\xi - \eta) = \tau_\eta \widehat{f}(\xi).$$

8. Dado que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $f \circ T \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y por ser T una matriz invertible se tiene que $(T^{-1})^{tr} = (T^{tr})^{-1}$.

   Note que,

$$\begin{aligned}
|\det T| \widehat{f(Tx)}(\xi) &= |\det T| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Tx) e^{-ix\cdot\xi} dx \\
&= |\det T| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Tx) e^{-iT^{-1}Tx\cdot\xi} dx \quad \text{haciendo} \quad y = Tx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iT^{-1}y\cdot\xi} dx \quad \text{Operador-adjunto de Hilbert} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy\cdot(T^{-1})^{tr}\xi} dx \\
&= \widehat{f}((T^{-1})^{tr}\xi) \\
&= \widehat{f}((T^{tr})^{-1}\xi).
\end{aligned}$$

   Ya que el operador-adjunto de Hilbert de cualquier operador representado por una matriz es su transpuesta, la cual satisface

$$T^{-1}y \cdot \xi = y \cdot (T^{-1})^{tr}\xi.$$

9. Para $a > 0$ tome $T = \frac{1}{a} \mathrm{I}_{n\times n}$, donde $\mathrm{I}_{n\times n}$ denota la matriz identidad de tamaño $n \times n$, y note que $(T^{tr})^{-1} = a\,\mathrm{I}_{n\times n}$, además $\det T = a^{-n}$. Luego, por lo demostrado en el inciso anterior se tiene el resultado deseado.

10. Recordemos que para T una matriz ortogonal, $\det T = \pm 1$ y además $(T^{tr})^{-1} = T$. Por lo que, aplicando lo mostrado en el inciso (8) se obtiene el resultado.

$\square$

Definición 2.1.2. Sea f una función definida en $\mathbb{R}^n$ diremos que f es una función radial o radialmente simétrica, si existe $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ tal que $f(x) = \psi(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se observa que f es una función radial si depende solo de la norma $|x|$, es decir, si para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $|x| = |y|$, se debe tener que $f(x) = f(y)$.

Proposición 2.1.2. Sea f una función Lebesgue integrable en $\mathbb{R}^n$.

(1) f es una función radial si y solo si, $f \circ T = f$ para toda matriz ortogonal T.

(2) Si f es una función radial. Entonces $\widehat{f}$ también es una función radial.

Demostración. 1. Supongamos que f es una función radial, luego existe una función $\psi \geq 0$ tal que $f(x) = \psi(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Ahora, si T es una matriz ortogonal, entonces se satisface que $Ty \cdot Tx = x \cdot y$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. De donde, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$f(x) = \psi(|x|) = \psi(\sqrt{x \cdot x}) = \psi(\sqrt{Tx \cdot Tx}) = \psi(|Tx|) = f(Tx) = (f \circ T)(x).$$

Dado que T fue tomada arbitraria, se sigue que $f = f \circ T$ para toda matriz ortogonal T.

Recíprocamente, supongamos que $f = f \circ T$ para toda matriz ortogonal T.

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ con $|x_1| = |x_2|$, entonces existe una matriz ortogonal T tal que, $Tx_2 = x_1$. Así,

$$f(x_1) = f(Tx_2) = (f \circ T)(x_2) = f(x_2).$$

Por lo tanto, f es una función radial.

2. Sean $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi_1| = |\xi_2|$. Entonces existe alguna matriz ortogonal S tal que $S\xi_2 = \xi_1$. Dado que f es una función radial, se tiene que $f = f \circ S$. Por la proposición 2.1.1 inciso (10) se verifica

$$\widehat{f}(\xi_1) = \widehat{f}(S\xi_2) = (\widehat{f} \circ S)(\xi_2) = (\widehat{f \circ S})(\xi_2) = \widehat{f}(\xi_2).$$

Lo cual implica que $\widehat{f}$ es una función radial.

$\square$

Lema 2.1.3. (Lema Riemann Lebesgue). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Demostración. Para el resultado de este lema, haremos uso de la proposición 2.1.1 inciso (7) y escribiremos para $y \in \mathbb{R}^n$

$$e^{iy\cdot\xi}\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+y)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

Ahora, para $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo, tome $y = \pi\xi/|\xi|^2$ de modo que $e^{iy\cdot\xi} = e^{i\pi} = -1$. Por lo que,

$$\widehat{f}(\xi) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+y)e^{-ix\cdot\xi}dx. \tag{2.2}$$

Por definición tenemos que

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx. \tag{2.3}$$

Sumando (2.2) y (2.3), se tiene

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} [f(x) - f(x+y)]e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

De donde,

$$|\widehat{f}(\xi)| = \frac{1}{2}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} [f(x) - f(x+y)]e^{-ix\cdot\xi}dx\right| \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+y)|dx.$$

Note que, $|y| = \pi|\xi|^{-1}$ por lo que, $y \to 0$ cuando $|\xi| \to \infty$. Luego, la continuidad de la traslación en la norma $L^1(\mathbb{R}^n)$ (Ver [2 , Pág 180]) implica que, si $y \to 0$ entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+y)|dx \to 0,$$

Por tanto, $|\widehat{f}(\xi)| \to 0$ siempre que $|\xi| \to \infty$. $\square$

Proposición 2.1.4. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$, tal que $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j\widehat{f}(\xi) \quad \text{para todo} \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Demostración. Por definición, para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-ix\cdot\xi} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-ix\cdot\xi} dx_1 \cdots dx_n.$$

Aplicando el teorema de Fubini,

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-ix\cdot\xi} dx_j dx_1 \cdots dx_n.$$

Integrando por partes con respecto a x_j, y haciendo

$$u = e^{-ix\cdot\xi} \Rightarrow \frac{du}{dx_j} = -i\xi_j e^{-ix\cdot\xi}$$
$$dv = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \Rightarrow v = f(x);$$

tenemos que

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-ix\cdot\xi} dx_j = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\xi_j e^{-ix\cdot\xi}) dx_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} i\xi_j f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx_j.$$

Ya que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $f(x) \to 0$, cuando $|x| \to \infty$.

Por lo que,

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) &= i\xi_j \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx_j dx_1 \cdots dx_n \\
&= i\xi_j \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx_1 \cdots dx_n \\
&= i\xi_j \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx \\
&= i\xi_j \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Una aplicación del resultado anterior, el cual me permite convertir una EDP en una EDO se encuentra en F. Jones (Ver [2 , Pág 339]).

Proposición 2.1.5. Si $f, x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $j \in \{1, 2, ..., n\}$ fijo, entonces $\widehat{f}(\xi)$ es derivable con respecto a la $j-$ésima coordenada y además

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = -i\widehat{x_j f}(\xi)$$

Demostración. Para $\xi_j \in \mathbb{R}$ fijo, con ξ_j la $j-$ésima coordenada de $\xi \in \mathbb{R}^n$, definamos $g(x,\xi_j) = f(x)e^{-ix\cdot\xi}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Observe que $g(x,\xi_j) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g(x,\xi_j)$ es una función diferenciable en ξ_j.

Más aún,

$$\left|\frac{\partial g(x,\xi_j)}{\partial \xi_j}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial \xi_j} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\right| = \left|f(x)(-ix_j e^{-ix\cdot\xi})\right| = |x_j f(x)|\,;$$

con $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Por el resultado de diferenciación bajo el signo de la integral , se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-ix_j e^{-ix\cdot\xi})dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} ix_j f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= -i\widehat{x_j f}(\xi).
\end{aligned}$$

□

En el siguiente ejemplo, calculamos la transformada de Fourier de una función en el caso real.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = e^{-x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por definición, vemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-ix\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-ix\xi}dx \\
&= e^{-\xi^2/4}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(x+\frac{i\xi}{2}\right)^2}dx \\
&= e^{-\xi^2/4}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx \\
&= \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}, \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Ahora, en combinación con la proposición 2.1.1 inciso (9) para $a > 0$ fijo se tiene

$$\widehat{e^{-x^2/a}}(\xi) = \sqrt{a\pi} e^{-a\xi^2/4}.$$

En el caso particular si $a = 4$, digamos que $g(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\widehat{g}(\xi) = 2\pi e^{-\xi^2}.$$

Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\pi} e^{-x^2/4} dx = \widehat{g}(0) = 2\pi.$$

Proposición 2.1.6. Si $\prod_{j=1}^{n} f_j(x_j) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\widehat{\prod_{j=1}^{n} f_j(x_j)}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{f_j}(\xi_j).$$

Demostración. Aplicando el teorema de Fubini en reiteradas ocasiones, se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{\prod_{j=1}^{n} f_j(x_j)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) e^{-ix\cdot\xi} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) e^{-ix_1\xi_1 - ix_2\xi_2 - \cdots - ix_n\xi_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) e^{-ix_2\xi_2 - \cdots - ix_n\xi_n} dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2) e^{-ix_2\xi_2} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_n) e^{-ix_n\xi_n} dx_n \\
&= \widehat{f_1}(\xi_1) \widehat{f_2}(\xi_2) \cdots \widehat{f_n}(\xi_n) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \widehat{f_j}(\xi_j).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 2.1.7. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\widehat{\overline{f(-x)}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$, donde $\bar{f}$ denota el conjugado complejo de f. Además, si $\overline{f(-x)} = f(x)$ entonces $\widehat{f}$ es una función real valuada.

Demostración. Haciendo el cambio de variable $y = -x$ vemos que,

$$\begin{aligned}
\widehat{\overline{f(-x)}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)} e^{-ix\cdot\xi} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x) e^{ix\cdot\xi}} dx \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(-x) e^{ix\cdot\xi} dx} \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy\cdot\xi} dy} \\
&= \overline{\widehat{f}(\xi)}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\overline{f(-x)} = f(x)$ entonces para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, se cumple que

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)} e^{-ix\cdot\xi} dx = \widehat{\overline{f(-x)}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

Por lo que, $\widehat{f}$ es una función real valuada. $\square$

En lo siguiente daremos un ejemplo en el que hallamos la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$, en el cual es de gran utilidad la proposición 2.1.6.

Ejemplo 2. Definamos la función $f(x) = e^{-|x|^2}$ para todo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Note que,

$$f(x) = \prod_{j=1}^{n} e^{-x_j^2};$$

luego, la proposición 2.1.6 implica que,

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{\prod_{j=1}^{n} e^{-x_j^2}}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{e^{-x_j^2}}(\xi_j).$$

De lo mostrado en el primer ejemplo, tenemos que

$$\widehat{f}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\pi} e^{-\xi_j{}^2/4} = \pi^{n/2} e^{-|\xi|^2/4}.$$

Así, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\widehat{e^{-|x|^2}}(\xi) = \pi^{n/2} e^{-|\xi|^2/4}.$$

Ahora, sea $g(x) = \pi^{n/2} e^{-|x|^2/4}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por la proposición 2.1.6 y lo hecho en el ejemplo 1, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ obtenemos que

$$\widehat{g}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\sqrt{\pi} e^{-x_j^2/4}}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\sqrt{\pi} e^{-x_j^2}}(\xi_j) = \prod_{j=1}^{n} 2\pi e^{-\xi_j{}^2} = (2\pi)^n e^{-|\xi|^2}.$$

Y además, note que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \pi^{n/2} e^{-|x|^2/4} dx = \widehat{g}(0) = (2\pi)^n. \tag{2.4}$$

El cálculo de esta última integral será de mucha importancia en la siguiente sección.

Proposición 2.1.8. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

Demostración. Por definición

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} g(\xi) dx d\xi.$$

Ahora, por desigualdad de Hölder se tiene que

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi \right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{f}(\xi) g(\xi) \right| d\xi \leq \|\widehat{f}\|_\infty \|g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty;$$

lo cual implica que $\widehat{f} g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se sigue que, $f(x) g(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ por lo que es posible aplicar el teorema de Fubini.

Por tanto,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} g(\xi) dx d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-i\xi\cdot x} d\xi dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

$\square$

2.2. Teorema de Inversión

En esta sección trataremos de resolver el siguiente interrogante, el cual es, si dada la transformada de Fourier $\widehat{f}$ es posible determinar la función original f. Es decir,

podemos hallar una fórmula en la que se exprese a la función f en terminos de $\widehat{f}$.
Se darán varias versiones para el teorema de inversión en las cuales cada una de ellas establecen de algún modo que

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

Como consecuencia de la igualdad anterior se tendrán algunos resultados que serán de suma importancia.
Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una función fija a la cual queremos estudiar y g otra función tal que $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por la proposición 2.1.8 se cumple que,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y) dy.$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Reemplacemos g por la función $e^{ix\cdot\xi}g(-\xi)$, aplicando la proposición 2.1.1 incisos (7) y (8) se obtiene

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} g(-\xi) d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(x-y) dy.$$

Ahora, sea $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y para $0 < a < \infty$. Reemplacemos $e^{ix\cdot\xi}\phi(-a\xi)$ por $e^{ix\cdot\xi}g(-\xi)$ en la igualdad anterior y haciendo uso de la proposición 2.1.1 inciso (9) se tiene que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \phi(-a\xi) d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) a^{-n} \widehat{\phi}\left(\frac{x-y}{a}\right) dy. \tag{2.5}$$

Tomaremos la función ϕ de tal modo que satisfaga las siguientes propiedades

$$\phi \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

$$\widehat{\phi} \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

$$\phi(0) = 1$$

y que además ϕ sea una función continua y acotada en $\mathbb{R}^n$.
Para más simplicidad, denotaremos por Ω al conjunto de todas las funciones que satisfacen las condiciones anteriores. Una función ϕ que está en Ω, ya fue estudiada en el segundo ejemplo con $\phi(x) = e^{-|x|^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
En lo siguiente enunciaremos la primera versión del teorema de Inversión.

Teorema 2.2.1. (Teorema de Sumabilidad en $L^1(\mathbb{R}^n)$). Sean $\phi \in \Omega$ y $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces el siguiente limite existe en el sentido de convergencia $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\phi(-a\xi)d\xi = cf(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

donde,

$$c = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x)dx.$$

Demostración. Para $0 < a < \infty$, incluiremos la siguiente notación

$$(\widehat{\phi})_a(y) = a^{-n}\widehat{\phi}\left(\frac{y}{a}\right).$$

Por lo que la ecuación (2.5) nos queda,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\phi(-a\xi)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)(\widehat{\phi})_a(x-y)dy = \left(f * (\widehat{\phi})_a\right)(x).$$

Verifiquemos algunas propiedades de la familia de funciones $\{(\widehat{\phi})_a\}$.

En efecto,

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\phi})_a(x)dx\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} a^{-n}\widehat{\phi}\left(\frac{x}{a}\right)dx\right| \leq a^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{\phi}\left(\frac{x}{a}\right)\right|dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}(u)|du = \|\widehat{\phi}\|_1 < \infty.$$

Lo cual implica que $(\widehat{\phi})_a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $a > 0$, pues $\widehat{\phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(\widehat{\phi})_a|dx \leq \|\widehat{\phi}\|_1.$$

Ahora,

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\phi})_a(x)dx = \lim_{a\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} a^{-n}\widehat{\phi}\left(\frac{x}{a}\right)dx = \lim_{a\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(u)du = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(u)du < \infty.$$

Por último, para $r > 0$ fijo y haciendo el cambio de variable $y = \frac{x}{a}$ tenemos

$$\int\limits_{|x|\geq r} |(\widehat{\phi})_a(x)|dx = \int\limits_{|x|\geq r} a^{-n}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{x}{a}\right)\right|dx = \int\limits_{|y|\geq \frac{r}{a}} |\widehat{\phi}(y)|dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}(y)|\chi_{B(0,\frac{r}{a})^c}(y)dy.$$

Note que, cuando $a \to 0$ entonces $\frac{r}{a} \to \infty$, por lo que $\chi_{B(0,\frac{r}{a})^c} \to 0$.

Por el teorema 1.1.2 se tiene que

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{|x|\geq r} |(\widehat{\phi})_a(x)|dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lim_{a\to 0}|\widehat{\phi}(y)|\chi_{B(0,\frac{r}{a})^c}(y)dy = 0.$$

Por lo tanto, el teorema 1.2.7 de identidad aproximada implica que,

$$\lim_{a\to 0} \|f * (\widehat{\phi})_a - cf\|_1 = 0;$$

donde,

$$c = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x)dx.$$

Esto es, $f * (\widehat{\phi})_a \to cf$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Teorema 2.2.2. (Teorema Inversión de Fourier). Si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para *c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

Demostración. Continuaremos con la misma notación introducida en el teorema anterior. Dado que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y ϕ es continua y acotada, el teorema 1.1.2 implica que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{a\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \phi(-a\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \lim_{a\to 0} \phi(-a\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

Ya que, $\lim_{a\to 0} \phi(-a\xi) = \phi(0) = 1$ por ser ϕ continua.
Por otro lado, en el teorema de sumabilidad en $L^1(\mathbb{R}^n)$ se probó que $f * (\widehat{\phi})_a \longrightarrow cf$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$, donde $c = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x)dx$. Además de eso, por el Corolario Riesz-Fischer (veáse [2, Pág 234]) existe una subsucesión, digamos $a_k \to 0$ cuando $k \to \infty$ tal que, en *c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \phi(-a_k\xi) d\xi = cf(x).$$

Por lo tanto, concluimos que para *c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^n$

$$cf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

Note que, c es independiente de la función ϕ, esto debido a la arbitrariedad de ϕ . Ahora, si escogemos $\phi(x) = e^{-|x|^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $\phi \in \Omega$, por la igualdad en (2.4) tenemos que

$$c = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \pi^{n/2} e^{-|x|^2/4} dx = (2\pi)^n.$$

Así, para *c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

$\square$

El resultado anterior responde a nuestra incógnita de interés en esta sección. Sín pérdida de generalidad diremos que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

Como consecuencia del teorema de inversión, se tiene

Corolario 2.2.3. Si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces f es continua y acotada en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Dado que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, por el teorema de inversión, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi. \tag{2.6}$$

Luego, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x)| \leq (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| d\xi = (2\pi)^{-n} \|\widehat{f}\|_1 < \infty;$$

lo cual implica que f es una función acotada en $\mathbb{R}^n$. De la ecuación (2.6) la función f se puede ver cómo la transformada de Fourier de $\widehat{f}$. Esto es, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \hat{\widehat{f}}(-x).$$

De donde, la continudad de f en $\mathbb{R}^n$ se obtiene de manera análoga a como se mostró en la proposición 2.1.1 inciso (3). $\square$

Corolario 2.2.4. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{f}(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Entonces $f(x) = 0$ en *c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. De la hipótesis $\widehat{f}(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\|\widehat{f}\|_1 = 0$ y por ende $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Luego, el teorema de inversión implica que, para *c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi;$$

de donde,

$$0 \leq |f(x)| \leq (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| d\xi = (2\pi)^{-n} \|\widehat{f}\|_1 = 0.$$

Por lo tanto, $f(x) = 0$ en *c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Un resultado del teorema de inversión es una fórmula correspondiente para la transformada de Fourier de un producto. De manera más precisa, se tiene

Teorema 2.2.5. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y además, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{fg}(\xi) = (2\pi)^{-n} (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi).$$

Demostración. Por corolario 2.2.3 se tiene que f es una función acotada en $\mathbb{R}^n$ y dado que $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Luego, por teorema de inversión

$$\widehat{fg}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) e^{-ix\cdot\xi} dx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\eta) e^{ix\cdot\eta} g(x) e^{-ix\cdot\xi} d\eta dx.$$

Ya que, $\widehat{f}(\eta) g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ podemos aplicar el teorema de Fubini, así que

$$\begin{aligned} \widehat{fg}(\xi) &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\eta) \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-ix\cdot(\xi-\eta)} dx d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\eta) \widehat{g}(\xi - \eta) d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi). \end{aligned}$$

$\square$

2.3. Funciones de Clase Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

En esta sección, introduciremos las funciones de la clase de Schwartz en $\mathbb{R}^n$. En términos generales, una función es de Schwartz si es suave(infinitamente diferenciable) y todas sus derivadas decaen más rápido que el recíproco de cualquier polinomio en el infinito. De manera más precisa, damos la siguiente definición.

Definición 2.3.1. Sea $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ una función complejo valuada, diremos que f es de clase Schwartz, si para cada par de multi-índices $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_0^+)^n$ existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\alpha}\partial^{\beta} f(x)| = C_{\alpha,\beta} < \infty.$$

Donde $\rho_{\alpha,\beta}(f)$ son llamada seminormas de Schwartz de f. Denotaremos por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todas las funciones de clase Schwartz, así

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) : \rho_{\alpha,\beta}(f) < \infty \quad \text{para todo} \quad \alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_0^+)^n\}.$$

A continuación daremos una caracterización de las funciones de clase Schwartz que será muy útil al final de esta sección.
Para una función $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, diremos que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si, y solo si para todo entero positivo N y para todo α muti-índice, existe una costante $C_{\alpha,N}$ tal que

$$|\partial^{\alpha} f(x)| \leqslant C_{\alpha,N}(1 + |x|)^{-N}. \tag{2.7}$$

En efecto, para N entero positivo se tiene que la función $\frac{(1+|x|)^N}{1+|x|^N}$ es acotada. Luego, existe $M > 0$ tal que, $(1 + |x|)^N \leqslant M(1 + |x|^N)$. Por lo que, para α multi-índice tenemos,

$$\begin{aligned}(1 + |x|)^N|\partial^{\alpha} f(x)| \leqslant M(1 + |x|^N)|\partial^{\alpha} f(x)| &= M(|\partial^{\alpha} f(x)| + |x|^N|\partial^{\alpha} f(x)|)\\ &\leqslant M(\tilde{C}_{\alpha} + C'_{\alpha,N})\\ &= C_{\alpha,N};\end{aligned}$$

donde, $C_{\alpha,N} := M(\tilde{C}_{\alpha} + C'_{\alpha,N})$.
De la arbitrariedad de N y α se sigue que $|\partial^{\alpha} f(x)| \leqslant C_{\alpha,N}(1 + |x|)^{-N}$.
Observe que, el recíproco no es más que la definición de una función de clase Schwartz.

Proposición 2.3.1. Si $1 < p < \infty$. Entonces

$$C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Sea $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y además existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Ahora, para α, β multi-índice se

tiene que $x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, se sigue que $x^\alpha \partial^\beta f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Luego, existe $M_{\alpha,\beta} > 0$ constante tal que, $|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leqslant M_{\alpha,\beta}$ para todo $x \in K$.
Así,

$$\|x^\alpha \partial^\beta f(x)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = \sup_{x \in K} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leqslant M_{\alpha,\beta} < \infty;$$

de la arbitrariedad de α y β, se tiene que $\|x^\alpha \partial^\beta f(x)\|_\infty < \infty$ para todo $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_0^+)^n$.
Por lo tanto, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
Para la otra inclusión, supongamos que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Tomando $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = (0, \cdots, 0)$ existe $C_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} > 0$, tal que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\tilde{\alpha}} \partial^{\tilde{\beta}} f(x)| \leqslant C_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} < \infty;$$

es decir, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx &\leqslant \int\limits_{|x| \leqslant 1} |f(x)| dx + \int\limits_{|x| \geqslant 1} |f(x)| dx \\
&= \int\limits_{|x| \leqslant 1} |f(x)| dx + \int\limits_{|x| \geqslant 1} |x|^{n+1} |f(x)| |x|^{-(n+1)} dx \\
&\leqslant C_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \int\limits_{|x| \leqslant 1} dx + C_{n,\tilde{\beta}} \int\limits_{|x| \geqslant 1} |x|^{-(n+1)} dx \\
&= C_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \nu_n + C_{n,\tilde{\beta}} \omega_{n-1} \\
&= C_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \nu_n + n C_{n,\tilde{\beta}} \nu_n \\
&= C \nu_n < \infty; \quad \text{donde} \quad C := C_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} + n C_{n,\tilde{\beta}}.
\end{aligned}$$

Aquí, ν_n y ω_{n-1} estan dados en L.Grafakos [1] Apendice A3. Así, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
La última inclusión, no es más que un caso particular del corolario 1.2.3. Por lo que se obtiene el resultado. □

El siguiente ejemplo garantiza que la inclusión $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ debe ser estrictamente, es decir, daremos una función que pertenezca a la clase de Schwartz y que no está en el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto.

Ejemplo 3. Sea $f(x) = e^{-x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es claro que $e^{-x^2} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ por ser la compuesta de funciones infinitamente diferenciables.
Por otro lado, $\partial^{\alpha}(e^{-x^2}) = p(x)e^{-x^2}$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_0^+$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado α, del análisis se tiene $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x^2} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, se sigue que

$$|x^{\beta}\partial^{\alpha}(e^{-x^2})| = |x^{\beta}p(x)(e^{-x^2})| = |q(x)e^{-x^2}| < C_{\alpha,\beta} \quad \text{para todos} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_0^+,$$

aquí $q(x)$ es un polinomio de grado $\alpha + \beta$.
Así,

$$||x^{\beta}\partial^{\alpha}(e^{-x^2})||_{\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^{\beta}\partial^{\alpha}(e^{-x^2})| < \infty \quad \text{para todos} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_0^+ .$$

Lo cual muestra que $e^{-x^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Ahora, como el soporte de e^{-x^2} es el conjunto de todos los números reales, es decir, $\mathrm{Supp}(e^{-x^2}) = \mathbb{R}$, esto implica que $f(x) = e^{-x^2}$ no pertenece al conjunto $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$.

Ahora, daremos la definición de convergencia en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.3.2. Sean $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Diremos que la sucesión f_k converge a f en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si para cada par de multi$-$índices α y β tenemos que

$$\rho_{\alpha,\beta}(f_k - f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\alpha}(\partial^{\beta}(f_k - f))(x)| \to 0 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Ejemplo 4. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo y $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Definiremos la sucesión de funciones $f_k(x) = f(x + x_0/k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Veamos que $f_k \to f$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ cuando $k \to \infty$.
Por el teorema del valor medio en $\mathbb{R}^n$ existe, $\xi = x + \theta(x_0/k - x)$ con $\theta \in [0, 1]$, tal que

$$f(x + x_0/k) - f(x) = \nabla f(\xi) \cdot \left(\frac{x_0}{k}\right),$$

Si $\epsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x + x_0/k) - f(x)| &= \left|\nabla f(\xi) \cdot \left(\frac{x_0}{k}\right)\right| \\ &\leq |\nabla f(\xi)| \left|\frac{x_0}{k}\right| \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| \left|\frac{x_0}{k}\right| \\ &\leq C \left|\frac{x_0}{k}\right| < \epsilon, \quad \text{cuando} \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

De donde, $\|f(x+x_0/k)-f(x)\|_\infty \to 0$ cuando $k\to\infty$. Es decir, $f(x+x_0/k)\to f(x)$ uniformemente. De manera análoga se prueba $\partial_j f(x+x_0/k)\to \partial_j f(x)$ uniformemente para todo $j=1,2,...,n$. Por inducción, se tiene que $\partial_j^{\beta_j} f(x+x_0/k)\to \partial_j^{\beta_j} f(x)$ uniformemente para todo $j=1,2,...,n$, aplicando este último paso en reiteradas ocasiones se muestra que $\partial^\beta f(x+x_0/k)\to\partial^\beta f(x)$ donde la convergencia es uniforme. Por lo que, $\rho_{\alpha,\beta}(f_k-f)=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha(\partial^\beta(f_k-f))(x)|\to 0, \quad \text{cuando} \quad k\to\infty.$

Proposición 2.3.2. Sean $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Si $f_k\to f$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f_k\to f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1\le p\le\infty$. Además, existe una constante $c_{p,n}>0$ tal que

$$\|\partial^\beta f\|_p \le c_{p,n}\sum_{|\alpha|\le\left[\frac{n+1}{p}\right]+1}\rho_{\alpha,\beta}(f) \tag{2.8}$$

para toda f para la cual $\sum\limits_{|\alpha|\le\left[\frac{n+1}{p}\right]+1}\rho_{\alpha,\beta}(f)<\infty$.

Demostración. Note que, para $p<\infty$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|\partial^\beta f\|_p &= \left(\int_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\beta f(x)|^p dx\right)^{1/p}\\
&\le \left(\int_{|x|\le 1}|\partial^\beta f(x)|^p dx+\int_{|x|\ge 1}|x|^{n+1}|\partial^\beta f(x)|^p|x|^{-(n+1)}dx\right)^{1/p}\\
&\le \left(\|\partial^\beta f\|_\infty^p\int_{|x|\le 1}dx+\sup_{|x|\ge 1}|x|^{n+1}|\partial^\beta f(x)|^p\int_{|x|\ge 1}|x|^{-(n+1)}dx\right)^{1/p}\\
&= \left(\nu_n\|\partial^\beta f\|_\infty^p+\omega_{n-1}\sup_{|x|\ge 1}|x|^{n+1}|\partial^\beta f(x)|^p\right)^{1/p}\\
&\le \tilde{c}_p\left({\nu_n}^{1/p}\|\partial^\beta f\|_\infty+{\omega_{n-1}}^{1/p}\sup_{|x|\ge 1}|x|^{\left[\frac{n+1}{p}\right]+1}|\partial^\beta f(x)|\right).
\end{aligned}$$

Ahora, sea $m=\left[\frac{n+1}{p}\right]+1$, entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{|x|\ge 1}|x|^m|\partial^\beta f(x)| \le \sup_{|x|\ge 1}c_{n,m}\sum_{|\alpha|=m}|x^\alpha\partial^\beta f(x)| &\le c_{n,m}\sum_{|\alpha|=m}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta f(x)|\\
&\le c_{n,m}\sum_{|\alpha|\le m}\rho_{\alpha,\beta}(f)
\end{aligned}$$

y además,

$$\|\partial^\beta f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\beta f(x)| = \rho_{0,\beta}(f) \le \sum_{|\alpha|\le m} \rho_{\alpha,\beta}(f). \tag{2.9}$$

Así,

$$\|\partial^\beta f\|_p \le c_{p,n} \sum_{|\alpha|\le m} \rho_{\alpha,\beta}(f) \quad \text{con} \quad c_{p,n} := \tilde{c}_p({\nu_n}^{1/p} + {\omega_{n-1}}^{1/p} c_{n,m}).$$

De (2.9) se tiene para el caso cuando $p=\infty$. De esta manera se sigue inmediatamente que si $f_k \to f$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f_k \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Lo que termina la prueba. $\square$

Proposición 2.3.3. Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ y $x_j f$ están en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ para cada $j = 1, 2, ..., n$.

Demostración. De la hipótesis de que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $\|x^\alpha \partial^\beta f(x)\|_\infty < \infty$ para todo $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_0^+)^n$.
Luego, para $\gamma, \eta \in (\mathbb{Z}_0^+)^n$ multi$-$índice

$$\begin{aligned}
\|x^\gamma \partial^\eta (\partial_j f)(x)\|_\infty &= \|x^\gamma \partial_1^{\eta_1}\partial_2^{\eta_2}\cdots\partial_n^{\eta_n}(\partial_j f)(x)\|_\infty \\
&= \|x^\gamma \partial_1^{\eta_1}\partial_2^{\eta_2}\cdots\partial_j^{\eta_j+1}\cdots\partial_n^{\eta_n} f(x)\|_\infty \\
&= \|x^\gamma \partial^{\tilde{\eta}} f(x)\|_\infty < \infty; \quad \text{donde} \quad \tilde{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_j + 1, \cdots, \eta_n).
\end{aligned}$$

Así, $\|x^\gamma \partial^\eta (\partial_j f)(x)\|_\infty < \infty$ para todo $\gamma, \eta \in (\mathbb{Z}_0^+)^n$. Por lo que, $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
Por otro lado, para ς, ϱ multi$-$índice y haciendo uso de la fórmula de Leibniz se tiene

$$\begin{aligned}
\|x^\varsigma \partial^\varrho (x_j f)(x)\|_\infty &= \|x^\varsigma \partial_1^{\varrho_1}\cdots\partial_j^{\varrho_j}\cdots\partial_n^{\varrho_n}(x_j f)(x)\|_\infty \\
&= \|x^\varsigma \partial_1^{\varrho_1}\cdots\partial_n^{\varrho_n}(\partial_j^{\varrho_j}(x_j f))(x)\|_\infty \\
&= \left\| x^\varsigma \partial_1^{\varrho_1}\cdots\partial_n^{\varrho_n}\left(\sum_{k=0}^{\varrho_j}\binom{\varrho_j}{k}\partial_j^k x_j \partial_j^{\varrho_j-k} f(x)\right)\right\|_\infty \\
&= \|x^\varsigma \partial_1^{\varrho_1}\cdots\partial_n^{\varrho_n}(x_j\partial_j^{\varrho_j} f(x) + \varrho_j \partial_j^{\varrho_j-1} f(x))\|_\infty \\
&= \|x^{\tilde{\varsigma}}\partial^\varrho f(x) + \varrho_j x^\varsigma \partial^{\tilde{\varrho}} f(x)\|_\infty \\
&\leqslant \|x^{\tilde{\varsigma}}\partial^\varrho f(x)\|_\infty + \varrho_j \|x^\varsigma \partial^{\tilde{\varrho}} f(x)\|_\infty < \infty;
\end{aligned}$$

donde, $\tilde{\varsigma} = (\varsigma_1, \cdots, \varsigma_j + 1, \cdots, \varsigma_n)$ y $\tilde{\varrho} = (\varrho_1, \cdots, \varrho_j - 1, \cdots, \varrho_n)$ con $\varrho_j \geqslant 1$.
Así, $\|x^\varsigma \partial^\varrho (x_j f)(x)\|_\infty < \infty$ para todo ς, ϱ multi$-$índice. Por tanto, $x_j f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Corolario 2.3.4. Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\partial^\beta f, x^\alpha f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ para $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_0^+)^n$.

Demostración. De la proposición 2.3.3 y haciendo inducción se tiene que

$$\partial_j^{\beta_j} f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad x_j^{\alpha_j} f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{para todo} \quad j = 1, ..., n.$$

Por lo que, aplicando lo anterior en reiteradas ocasiones se obtiene el resultado. □

Proposición 2.3.5. Sean $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_0^+)^n$ un multi-índice. Entonces

(1) $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$.

(2) $\partial^\beta \widehat{f}(\xi) = (-1)^{|\beta|} \widehat{(ix)^\beta f}(\xi)$.

Demostración. 1. Dado que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que f satisface las condiciones de la proposición 2.1.4 esto es,

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi) \quad \text{para todo} \quad j = 1, \cdots, n.$$

de lo anterior y aplicando inducción sobre α_j tenemos que

$$\widehat{\partial_j^{\alpha_j} f}(\xi) = (i\xi_j)^{\alpha_j} \widehat{f}(\xi) \quad \text{para todo} \quad j = 1, \cdots, n.$$

Por lo que, aplicando lo anterior en reiteradas ocasiones obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) &= \widehat{\partial_1^{\alpha_1} \partial^{\tilde{\alpha}} f}(\xi) \quad \text{donde} \quad \tilde{\alpha} = (0, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \\
&= (i\xi_1)^{\alpha_1} \widehat{\partial^{\tilde{\alpha}} f}(\xi) \\
&= (i\xi_1)^{\alpha_1} \widehat{\partial_2^{\alpha_2} \partial^{\tilde{\tilde{\alpha}}} f}(\xi) \quad \text{donde} \quad \tilde{\tilde{\alpha}} = (0, 0, \alpha_3, \cdots, \alpha_n) \\
&= (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \widehat{\partial^{\tilde{\tilde{\alpha}}} f}(\xi) \\
&\ \ \vdots \\
&= (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \cdots (i\xi_n)^{\alpha_n} \widehat{f}(\xi) \\
&= (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

2. De la hipótesis de que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que f satisface las condiciones de la proposición 2.1.5 es decir que,

$$\partial_j \widehat{f}(\xi) = -i\widehat{x_j f}(\xi) \quad \text{para todo} \quad j = 1, \cdots, n.$$

Por lo anterior y haciendo inducción sobre β_j se sigue que

$$\partial_j^{\beta_j}\widehat{f}(\xi) = (-1)^{\beta_j}\widehat{(ix_j)^{\beta_j}f}(\xi) \quad \text{para todo} \quad j = 1, \cdots, n.$$

Por lo tanto, aplicando lo anterior en reiteradas ocasiones se tiene que

$$\begin{aligned}
\partial^\beta \widehat{f}(\xi) &= \partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}\widehat{f}(\xi) \\
&= \partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_{n-1}^{\beta_{n-1}}(-1)^{\beta_n}\widehat{(ix_n)^{\beta_n}f}(\xi) \\
&= (-1)^{\beta_n}\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_{n-1}^{\beta_{n-1}}\widehat{(ix_n)^{\beta_n}f}(\xi) \\
&= (-1)^{\beta_n}(-1)^{\beta_{n-1}}\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_{n-2}^{\beta_{n-2}}\widehat{g}(\xi) \quad \text{donde} \quad g = (ix_{n-1})^{\beta_{n-1}}(ix_n)^{\beta_n}f \\
&\ \ \vdots \\
&= (-1)^{\beta_n}\cdots(-1)^{\beta_1}\widehat{h}(\xi) \quad \text{donde} \quad h = (ix_1)^{\beta_1}\cdots(ix_n)^{\beta_n}f \\
&= (-1)^{|\beta|}\widehat{(ix)^\beta f}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.6. Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Además, el operador $\wedge : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ genera una biyección de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Para γ, κ multi-índice, aplicando la proposición anterior incisos (2),(1) y la proposición 2.1.1 inciso (4) tenemos que

$$\|\xi^\gamma\partial^\kappa\widehat{f}(\xi)\|_\infty = \|\xi^\gamma\widehat{x^\kappa f}(\xi)\|_\infty = \|\widehat{\partial^\gamma x^\kappa f}(\xi)\|_\infty \leqslant \|\partial^\gamma x^\kappa f\|_1 < \infty.$$

Esto debido a que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, luego el corolario 2.3.4 implica que $x^\kappa f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, por lo que nuevamente por el mismo corolario se tiene que $\partial^\gamma x^\kappa f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, veamos que $\wedge : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es un operador biyectivo.

Inyectividad: Sean $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que $\widehat{f} = \widehat{g}$. Por el teorema de inversión de Fourier

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}d\xi = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(\xi)e^{i\xi\cdot x}d\xi = g(x).$$

Así, $f = g$.

Sobreyectividad: Supongamos que $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Definamos

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{i\xi\cdot x}d\xi.$$

Note que, $f(x) = (2\pi)^{-n}\widehat{g}(-x)$, por lo mostrado en la primera parte se tiene que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Luego, por teorema de inversión de Fourier $f(x) = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{f}}(-x)$ de donde, $\hat{\hat{f}}(-x) = \widehat{g}(-x)$ es decir, $\widehat{f}$ y g tienen igual transformada de Fourier, debido a la inyectividad de $\wedge$ se concluye que $\widehat{f} = g$. $\square$

Proposición 2.3.7. Sean $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Si $f_k \to f$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{f_k} \to \widehat{f}$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Si $f_k \to f$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ veamos que $x^\gamma f_k \to x^\gamma f$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ para todo $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ multi$-$índice.
Para α, β multi$-$índices, aplicando la regla de Leibniz tenemos que

$$\begin{aligned}\|x^\alpha(\partial^\beta(x_j f_k - x_j f))(x)\|_\infty &= \|x^\alpha[\partial^\beta(x_j(f_k - f))](x)\|_\infty \\ &\leqslant \|x^{\tilde{\alpha}}(\partial^\beta(f_k - f))(x)\|_\infty + \beta_j\|x^\alpha(\partial^{\tilde{\beta}}(f_k - f))(x)\|_\infty \to 0,\end{aligned}$$

donde $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_j + 1, ..., \alpha_n)$ y $\tilde{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_j - 1, ..., \beta_n)$ con $\beta_j \geq 1$.
Haciendo inducción obtenemos que $x_j^{\gamma_j} f_k \to x_j^{\gamma_j} f$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, por lo anterior en reiteradas ocasiones se tiene $x^\gamma f_k \to x^\gamma f$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
Luego, para γ, β multi$-$índices por proposición 2.3.5 y la desigualdad (2.8)

$$\begin{aligned}\|\xi^\gamma(\partial^\beta(\widehat{f_k} - \widehat{f}))(\xi)\|_\infty &= \|(\partial^\beta x^\gamma(f_k - f))^\wedge(\xi)\|_\infty \\ &\leq \|\partial^\beta(x^\gamma(f_k - f))(x)\|_1 \\ &\leq c_n \sum_{|\alpha|\leq n+2} \rho_{\alpha,\beta}(x^\gamma f_k - x^\gamma f) \to 0, \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

$\square$

Ahora, mostraremos que la clase de Schwartz es cerrada bajo ciertas operaciones.

Proposición 2.3.8. Sean $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $fg \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Además,

$$\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g)$$

para todo α multi-índice.

Demostración. Fijamos f y g en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Sea $\alpha = e_j = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ con 1 en la $j-$ésima coordenada y 0 en las demás. Veamos que $\partial_j(f * g) = (\partial_j f) * g$.
En efecto,

$$\begin{aligned}\partial_j(f * g)(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f * g)(x + he_j) - (f * g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{f(x + he_j - y) - f(x - y)}{h}\right] g(y)dy.\end{aligned}$$

Por teorema del valor medio, existe $\bar{x} := (x - y) + \theta he_j$ con $\theta \in [0, 1]$ tal que

$$\frac{f(x + he_j - y) - f(x - y)}{h} = \partial_j f(\bar{x}).$$

De donde,

$$\left|\left[\frac{f(x + he_j - y) - f(x - y)}{h}\right] g(y)\right| = |\partial_j f(\bar{x})g(y)| = |\partial_j f(\bar{x})||g(y)| \le \|\partial_j f\|_\infty |g(y)|.$$

Note que, $\|\partial_j f\|_\infty |g(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pues $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Así, $\|\partial_j f\|_\infty |g(y)|$ se puede elegir como una función dominante independiente de h. Por teorema 1.1.2 se tiene que

$$\begin{aligned}\partial_j(f * g)(x) &= \lim_{h\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{f(x + he_j - y) - f(x - y)}{h}\right] g(y)dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x + he_j - y) - f(x - y)}{h}\right] g(y)dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x + he_j - y) - f(x - y)}{h}\right] g(y)dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_j f)(x - y)g(y)dy \\ &= ((\partial_j f) * g)(x).\end{aligned}$$

Esto es, $\partial_j(f * g) = (\partial_j f) * g$ para $\alpha = e_j = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$. Haciendo inducción sobre $m \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $\partial_j^m(f * g) = (\partial_j^m f) * g$, por lo que aplicando esto en reiteradas ocasiones obtenemos que $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g$ para todo α multi$-$índice. Lo cual implica que $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Ahora, para cada $N > 0$ existe una constante $C_N > 0$ tal que

$$|(f * g)(x)| = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)g(y)|dy \le C_N \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |x - y|)^{-N}(1 + |y|)^{-N-n-1}dy. \quad (2.10)$$

Del hecho que, $|x| \leq |x-y| + |y| + |y||x-y|$ entonces

$$(1 + |x-y|)^{-N} \leq (1 + |x|)^{-N}(1 + |y|)^{N}.$$

Por lo que en (2.10) obtenemos que

$$|(f * g)(x)| \leq C_N(1 + |x|)^{-N} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|)^{-n-1} dy = C'_N(1 + |x|)^{-N}.$$

Lo cual muestra que $f * g$ decae más rápido que $(1 + |x|)^{-N}$ en el infinito, de la arbitrariedad de $N > 0$ se sigue que $f * g$ decae más rápido que el recíproco de cualquier polinomio en el infinito. Debido que $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g$, reemplazando f por $\partial^\alpha f$, se tiene que $\partial^\alpha(f * g)$ decaen más rápido que el recíproco de cualquier polonimio en el infinito. Por la caracterización de las clase de Schwartz en (2.7) se obtiene que $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, vemos que el producto de dos funciones en la clase de Schwartz es también una función de clase Schwartz. Si $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ por definición $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, de aquí $fg \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Aplicando la regla de Leibniz para α un milti$-$índice tenemos que

$$|\partial^\alpha(fg)| = \left| \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g) \right| \leq \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta f| |\partial^{\alpha-\beta} g|$$

Luego, para $\alpha \in (\mathbb{Z}_0^+)^n$ y $N > 0$ existe $C_{\beta,N} > 0$ con $\beta \leq \alpha$ tal que

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(fg)| &\leq \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta f| |\partial^{\alpha-\beta} g| \\ &\leq C_{\beta,N}(1 + |x|)^{-N} C_\alpha \\ &= C'_{\alpha,N}(1 + |x|)^{-N} \quad \text{con} \quad C'_{\alpha,N} := C_{\beta,N} C_\alpha. \end{aligned}$$

De la arbitrariedad de α y $N > 0$ se concluye que $\partial^\alpha(fg)$ decaen más rápido que el recíproco de cualquier polinomio en el infinito. Por la caracterización en (2.7) se tiene que $fg \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. □

2.4. La transformada de Fourier-Plancherel en $L^2(\mathbb{R}^n)$

La idea principal de esta sección, es definir la transformada de Fourier de una función en $L^2(\mathbb{R}^n)$, esta nueva definición recibirá el nombre de transformada de Fourier-

Plancherel. Como consecuencia demostraremos algunas de sus propiedades, que serán de buen provecho a lo largo de este trabajo.

En lo siguiente, demostraremos algunos teoremas que conllevan a la definición de la transformada en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.4.1. Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|\widehat{f}\|_2$.

Demostración. Para $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, la proposición 2.3.8 garantiza que $fg \in \mathscr{S}$ y por teorema 2.2.5 se tiene, para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{fg}(\eta) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\eta - \xi)d\xi.$$

Evaluando lo anterior en $\eta = 0$ tenemos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(-\xi)d\xi.$$

Tomando $g(x) = \overline{f(x)}$, el conjugado complejo de $f(x)$. Por la proposición 2.1.7 $\widehat{g}(-\xi) = \widehat{\overline{f}}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$. Por lo que,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}dx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}d\xi$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2dx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

La última igualdad recibe el nombre de IDENTIDAD DE PARSEVAL. De donde, $\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|\widehat{f}\|_2$. □

Teorema 2.4.2. (Plancherel). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y además $\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|\widehat{f}\|_2$.

Demostración. Por la densidad de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, existe una sucesión de funciones $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que, $\lim\limits_{k\to\infty} \phi_k = f$ tanto en $L^1(\mathbb{R}^n)$ como en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego,

$$\|\widehat{\phi_k} - \widehat{f}\|_\infty \leq \|\phi_k - f\|_1 \to 0, \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Es decir, $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{\phi_k}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ uniformemente para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Ahora, para cada $k, j \in \mathbb{N}$ la función $\phi_k - \phi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, por lo que sastisface la identidad de Parseval,

$$(2\pi)^{-n/2}\|\widehat{\phi_k} - \widehat{\phi_j}\|_2 = \|\phi_k - \phi_j\|_2 \to 0, \quad \text{siempre que} \quad k, j \to \infty. \tag{2.11}$$

De este modo, para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $k, j \geq N$ entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi_k}(\xi) - \widehat{\phi_j}(\xi)|^2 d\xi \leq \epsilon.$$

Si hacemos que $j \to \infty$ y aplicamos el lema 1.1.1, se sigue que si, $k \geq N$ entonces

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi_k}(\xi) - \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \liminf_{j\to\infty} |\widehat{\phi_k}(\xi) - \widehat{\phi_j}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi_k}(\xi) - \widehat{\phi_j}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi_k}(\xi) - \widehat{\phi_j}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\|\widehat{\phi_k} - \widehat{f}\|_2 \to 0, \quad \text{cuando} \quad k \to \infty. \tag{2.12}$$

De (2.11) tenemos que $\left\{\widehat{\phi_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y de (2.12) se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{\phi_k} = \widehat{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, lo cual implica que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Además,

$$\begin{aligned}
\|f\|_2 = \|\lim_{k\to\infty} \phi_k\|_2 &= \lim_{k\to\infty} \|\phi_k\|_2 \\
&= \lim_{k\to\infty} (2\pi)^{-n/2}\|\widehat{\phi_k}\|_2 \\
&= (2\pi)^{-n/2} \lim_{k\to\infty} \|\widehat{\phi_k}\|_2 \\
&= (2\pi)^{-n/2}\|\lim_{k\to\infty} \widehat{\phi_k}\|_2 \\
&= (2\pi)^{-n/2}\|\widehat{f}\|_2.
\end{aligned}$$

$\square$

El anterior resultado muestra que la transformada de Fourier define un operador lineal y acotado en $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dado que $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por teorema 1.3.2 existe una única extensión de la transformada sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ que denotaremos por $\mathscr{F}$ a la cual llamaremos la transformada de Fourier-Plancherel.

Para un poco más de exactitud tenemos lo siguiente:

Teorema 2.4.3. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\mathscr{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y además se tiene

$$\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|\mathscr{F}(f)\|_2. \tag{2.13}$$

Demostración. Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, por densidad existe $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de funciones (En particular tome $\phi_k = f\chi_{B(0,k)}$), tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \phi_k = f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para $k, j \in \mathbb{N}$ la función $\phi_k - \phi_j \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ y por identidad de Parseval,

$$(2\pi)^{-n/2}\|\widehat{\phi_k} - \widehat{\phi_j}\|_2 = \|\phi_k - \phi_j\|_2 \to 0, \quad \text{siempre que} \quad k, j \to \infty.$$

De donde, se concluye que la sucesión de funciones $\left\{\widehat{\phi_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ forman una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por lo que, el teorema de Riesz-Fischer garantiza la existencia de $\mathscr{F} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{\phi_k} = \mathscr{F} \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^n).$$

Note que, para $\phi_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ se satisface Parseval $\|\phi_k\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|\widehat{\phi_k}\|_2$ entonces

$$\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|\mathscr{F}(f)\|_2.$$

Esta función $\mathscr{F}$ es la que llamaremos la transformada de Fourier-Plancherel de f.

Ahora, veamos que $\mathscr{F}$ es independiente de la elección de la sucesión de funciones $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

En efecto, supongamos que existe otra sucesión digamos $\{\phi'_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \phi'_k = f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego, existe $\mathscr{F}' \in L^2(\mathbb{R}^n)$, tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{\phi'_k} = \mathscr{F}'$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Se sigue que, $\phi_k - \phi'_k \to f - f = 0$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{\phi_k} - \widehat{\phi'_k} \to \mathscr{F} - \mathscr{F}'$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por identidad de Parseval se tiene que

$$0 = \|\phi_k - \phi'_k\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|\widehat{\phi_k} - \widehat{\phi'_k}\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|\mathscr{F} - \mathscr{F}'\|_2.$$

Esto es, $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$ en *c.t.p.*, es decir, $\mathscr{F}$ y $\mathscr{F}'$ representan el mismo elemento en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, $\mathscr{F}$ es independiente de la sucesión $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

A continuación, daremos formalmente la definición de la transformada de Fourier-Plancherel para una función en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.4.1. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, denotaremos $\mathscr{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a la transformada de Fourier-Plancherel, que definiremos por

$$\mathscr{F}(f) = \lim_{k\to\infty} \widehat{\phi_k} \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^n);$$

donde, $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que, $\lim\limits_{k\to\infty} \phi_k = f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Además, se satisface la identidad de Parseval, es decir, $\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|\mathscr{F}(f)\|_2$.

En algunas ocasiones haremos uso de la notación $\mathscr{F}(f) = \widehat{f}$ para la transformada de Fourier-Plancherel, siempre y cuando se de explícitamente que la función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Observe que esta definición y notación son consistentes con la transformada de Fourier original definida en la sección 2.1, pues si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces simplemente escogemos la sucesión $\phi_k = f$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora, discutiremos el teorema de inversión para la transformada de Fourier-Plancherel. Recordemos que de la sección 2.2 se tiene que

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{f}}(-x). \tag{2.14}$$

Para una función g se introdujo la notación $\tilde{g}(x) = g(-x)$. Por lo que, la ecuación anterior nos quedaría $\tilde{f} = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{f}}$.

Teorema 2.4.4. (Teorema Inversión de Fourier-Plancherel). Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f(x) = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{f}}(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces existe una sucesión de funciones $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_k \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por definición de la transformada de

Fourier-Plancherel tenemos que $\widehat{\phi_k} \to \widehat{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Debido a que, $\left\{\widehat{\phi_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y por la definición de $\hat{\hat{f}}$ obtenemos que

$$\hat{\hat{\phi}}_k \to \hat{\hat{f}} \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^n) \tag{2.15}$$

Ahora, dado que el teorema de inversión es válido para funciones que estan en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, vemos que

$$\hat{\hat{\phi}}_k = (2\pi)^n \tilde{\phi}_k \to (2\pi)^n \tilde{f} \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^n) \tag{2.16}$$

De (2.15) y (2.16) se tiene $\tilde{f} = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{f}}$. □

Teorema 2.4.5. La transformada de Fourier-Plancherel $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ es una biyección de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que $\widehat{f} = \widehat{g}$. Por el teorema inversión de Fourier-Plancherel

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{f}}(-x) = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{g}}(-x) = g(x).$$

Así, $f = g$. Lo cual muestra la inyectividad de $\mathscr{F}$.
Para la sobreyectividad de $\mathscr{F}$ supongamos que $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Definamos

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\widehat{g}(-x)$$

y observe que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego, por teorema de inversión de Fourier-Plancherel $f(x) = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{f}}(-x)$ de donde, $\hat{\hat{f}}(-x) = \widehat{g}(-x)$ es decir, $\widehat{f}$ y g tienen igual transformada de Fourier-Plancherel, debido a la inyectividad de $\mathscr{F}$ se concluye que $\widehat{f} = g$.
Por tanto, si $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la única función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ que satisface $\widehat{f} = g$ está dada por la fórmula

$$f = (2\pi)^{-n}\tilde{\hat{g}}$$

. □

Teorema 2.4.6. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$

Demostración. El teorema 1.2.6 garantiza que $\widehat{f * g} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego, para g que está en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tomemos una sucesión de funciones $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que, $\phi_k \to g$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, por definición de $\widehat{g}$ se tiene $\widehat{\phi_k} \to \widehat{g}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. De la proposición 2.1.1 inciso (6) se cumple que

$$\widehat{f * \phi_k} = \widehat{f}\widehat{\phi_k}; \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Nuevamente, el teorema de 1.2.6 implica que

$$\|f * \phi_k - f * g\|_2 = \|f * (\phi_k - g)\|_2 \leq \|f\|_1 \|\phi_k - g\|_2 \to 0$$

en $L^2(\mathbb{R}^n)$, siempre que $k \to \infty$. Luego, por identidad de Parseval

$$(2\pi)^{-n/2} \|\widehat{f * \phi_k} - \widehat{f * g}\|_2 = \|f * \phi_k - f * g\|_2 \to 0 \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^n).$$

De donde,

$$\widehat{f * \phi_k} \to \widehat{f * g} \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^n). \tag{2.17}$$

Por otro lado, del corolario 1.2.2 se sigue que

$$\|\widehat{f}\widehat{\phi_k} - \widehat{f}\widehat{g}\|_2 = \|\widehat{f}(\widehat{\phi_k} - \widehat{g})\|_2 \leq \|\widehat{f}\|_\infty \|\widehat{\phi_k} - \widehat{g}\|_2 \leq \|f\|_1 \|\widehat{\phi_k} - \widehat{g}\|_2 \to 0 \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^n).$$

Esto es,

$$\widehat{f * \phi_k} = \widehat{f}\widehat{\phi_k} \to \widehat{f}\widehat{g} \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^n). \tag{2.18}$$

Por tanto, de (2.17) y (2.18) se concluye que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$. ◻

Proposición 2.4.7. Si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x) dx.$$

Demostración. De la hipótesis $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, por desigualdad de Hölder tenemos $\widehat{f}g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ahora, aplicando el teorema inversión para $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x) e^{ix\cdot\xi} dx d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(x) e^{ix\cdot\xi} dx d\xi.
\end{aligned}$$

Debido a que, $\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ es posible aplicar el teorema de Fubini y el teorema inversión para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Por lo que,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(x)e^{ix\cdot\xi}dxd\xi \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\widehat{g}(x)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx.\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 2.4.8. Si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\widehat{fg}(\xi) = (2\pi)^{-n}\widehat{f} * \widehat{g}(\xi)$.

Demostración. Dado que $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la desigualdad de Hölder nos garantiza que $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Luego, por teorema inversión para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\widehat{fg}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)e^{-ix\cdot\xi}dx = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\eta)e^{ix\cdot\eta}g(x)e^{-ix\cdot\xi}d\eta dx.$$

Ya que, $\widehat{f}(\eta)g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ podemos aplicar el teorema de Fubini, así que

$$\begin{aligned}\widehat{fg}(\xi) &= (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\eta)\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-ix\cdot(\xi-\eta)}dxd\eta \\ &= (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\eta)\widehat{g}(\xi-\eta)d\eta \\ &= (2\pi)^{-n}(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi).\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.4.9. Para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

Demostración. Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$|z+w|^2 = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2.$$

Aplicamos la identidad de Parseval a la función $f+g \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f+g|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f+g}|^2 d\xi$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^2 + f\overline{g} + \overline{f}g + |g|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}|^2 + \widehat{f}\overline{\widehat{g}} + \overline{\widehat{f}}\widehat{g} + |\widehat{g}|^2 d\xi.$$

De donde, por identidad de Parseval para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\overline{g} + \overline{f}g dx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\overline{\widehat{g}} + \overline{\widehat{f}}\widehat{g} d\xi. \tag{2.19}$$

Reemplazando ig por g en la ecuación anterior

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\overline{ig} + \overline{f}igdx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\overline{\widehat{ig}} + \overline{\widehat{f}}\widehat{ig}d\xi$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} -if\overline{g} + i\overline{f}gdx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} -i\widehat{f}\overline{\widehat{g}} + i\overline{\widehat{f}}\widehat{g}d\xi.$$

y cancelando el factor i nos queda

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} -f\overline{g} + \overline{f}gdx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} -\widehat{f}\overline{\widehat{g}} + \overline{\widehat{f}}\widehat{g}d\xi. \tag{2.20}$$

Por lo que, restandole la identidad (2.20) a la identidad (2.19) obtenemos el resultado deseado. □

Teorema 2.4.10. (Desigualdad Hausdorff-Young). Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. Entonces $\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ y

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq (2\pi)^{n/p'} \|f\|_p.$$

Demostración. De las estimaciones de la proposición 2.1.1 inciso (4) $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ y de la ecuación (2.13) $\|\mathscr{F}(f)\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|f\|_2$. Por el teorema de interpolación de Riesz-Thorin ver ([8 ,Pág 27]). Concluimos que la transformada de Fourier es un operador lineal acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} = 0 + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}; \quad \theta \in (0,1)$$

con norma

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq 1^{1-\theta}(2\pi)^{n\theta/2}\|f\|_p = (2\pi)^{n/p'}\|f\|_p.$$

□

Capítulo 3

Espacio de las Distribuciones Temperadas

En este capítulo daremos una introducción a la clase de las distribuciones en particular las llamadas distribuciones temperadas. Dado que el espacio de Schwartz es cerrado bajo las operaciones básicas del análisis, y por dualidad extendemos estas operaciones a las distribuciones temperadas y demostraremos algunas de sus propiedades. Además, se hace más fácil trabajar con funcionales que actuán sobre espacios de funciones.

3.1. Espacios de Funciones de Prueba

En esta sección introduciremos los espacios de funciones de prueba, entre ellos tenemos los siguientes, el espacio de las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto que denotaremos por $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones de Schwartz denotado por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ que fue estudiado en la sección 2.3 y por último el espacio de las funciones suaves(infinitamente diferenciables) que denotaremos por $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Observe que para estos espacios se tiene la siguiente inclusión

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

A continuación definiremos la convergencia en cada uno de estos espacios.

Definición 3.1.1. Sean $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de funciones y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Diremos que $f_k \to f$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ si, y solo si, $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{|x|\leq N} |\partial^\alpha(f_k - f)(x)| = 0$ para todo α multi-índice y todo $N = 1, 2, ...$

Definición 3.1.2. Sean $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de funciones y $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Diremos que $f_k \to f$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si, y solo si, $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha\partial^\beta(f_k - f)(x)| = 0$ para todo α y β multi-índices.

Definición 3.1.3. Sean $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de funciones y $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que soporte$(f_k) \subseteq B$ para toda $k \in \mathbb{N}$, con B conjunto compacto. Diremos que $f_k \to f$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ si, y solo si, $\lim\limits_{k\to\infty} \|\partial^\alpha(f_k - f)(x)\|_\infty = 0$ para todo α multi-índice.

Note que, la convergencia en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ implica la convergencia en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, la cual implica convergencia en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3.2. Espacios de Funcionales sobre Espacios de Prueba

En esta sección presentaremos los espacios duales definidos sobre los espacios de funciones de prueba vistos en la sección anterior. Es decir, los espacios de funcionales lineales continuos sobre los conjuntos de funciones de prueba, a cada uno de estos espacios los denotaremos por:

$$(C_c^\infty(\mathbb{R}^n))' = \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$
$$(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))' = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$
$$(C^\infty(\mathbb{R}^n))' = \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n).$$

Por definición de la topología sobre los espacios duales, tenemos

$$T_k \to T \quad \text{en} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow T_k, T \in \mathscr{D}' \quad \text{y} \quad T_k(f) \to T(f) \quad \text{para toda} \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$
$$T_k \to T \quad \text{en} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow T_k, T \in \mathscr{S}' \quad \text{y} \quad T_k(f) \to T(f) \quad \text{para toda} \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$
$$T_k \to T \quad \text{en} \quad \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow T_k, T \in \mathscr{E}' \quad \text{y} \quad T_k(f) \to T(f) \quad \text{para toda} \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Para los espacios duales se tiene la siguiente inclusión

$$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Definición 3.2.1. Los elementos del espacio $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ son llamados distribuciones. Los elementos de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ son llamados distribuciones temperadas y por último los elementos del espacio $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ son llamados distribuciones con soporte compacto.

La acción de una distribución temperada u sobre una función de clase Schwartz f es representada por alguna de las siguientes maneras

$$\langle u, f \rangle = u(f).$$

En lo siguiente, damos una caracterización de las distribuciones temperadas, que es muy útil desde un punto de vista práctico.

Proposición 3.2.1. Sea u un funcional lineal sobre $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ sí, y solo si existen $C > 0$ y k, m enteros positivos tal que

$$|\langle u, f \rangle| \leq C \sum \rho_{\alpha,\beta}(f) \quad \text{con } |\alpha| \leq m, |\beta| \leq k; \quad \text{para toda} \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.1}$$

Demostración. Si se satisface (3.1) se tiene que u es un funcional lineal continuo en 0, por teorema 1.3.1 se sigue que u es continuo. Así, $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Recíprocamente, tenemos que la familia de conjuntos $\{\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) < \delta\}$ donde α y β son multi-índices y $\delta > 0$, forman una subbase para la topología en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (ver Grafakos [1, Pág 106]). Sea $B(0, 1)$ la bola abierta de centro en 0 y radio 1 en $\mathbb{C}$, como u es un funcional continuo entonces $u^{-1}(B_1(0))$ es un abierto en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, luego existen m, k enteros postivos y $\delta > 0$ con $|\alpha| \leq m$ y $|\beta| \leq k$, tales que

$$u^{-1}(B_1(0)) = \bigcup \{\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) < \delta\} \quad \text{con} \quad |\alpha| \leq m, |\beta| \leq k.$$

Por lo que, si $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq k$ y $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi) < \delta$ entonces $\varphi \in u^{-1}(B_1(0))$, esto es, $\langle u, \varphi \rangle \in B_1(0)$, es decir $|\langle u, \varphi \rangle| \leq 1$. Haciendo $C = 1/\delta$ y de la arbitrariedad de $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se satisface (3.1). $\square$

3.3. Distribuciones Temperadas $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

En esta sección, centramos nuestro estudio en el espacio de las distribuciones temperadas. Debido a que vía estas distribuciones definimos los espacio de Sobolev en $\mathbb{R}^n$ y además son las de mayor utilidad en el análisis armónico.

Definición 3.3.1. Diremos que $u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ es una distribución temperada, es decir, $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si

1. u es lineal, es decir, $u(b\varphi + \phi) = bu(\varphi) + u(\phi)$ para todas $\varphi, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y todo $b \in \mathbb{C}$,

2. u es continuo, es decir, si para cualquier sucesión $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, entonces $u(\phi_k) \to 0$ siempre que $k \to \infty$.

Toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ define una distribución temperada vía la identificación $f \longrightarrow u_f$ donde u_f es el funcional definido por

$$u_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

Definición 3.3.2. Sea $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos la transformada de Fourier $\widehat{u}$ y la transformada de Fourier inversa $\check{u}$ de una distribución temperada u por

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle \quad \text{y} \quad \langle \check{u}, \varphi \rangle = \langle u, \check{\varphi} \rangle, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Definición 3.3.3. La masa de Dirac en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ que será denotada por δ_{x_0}, está definida por

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \quad \text{para toda} \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

A continuación daremos un ejemplo en el cual calculamos la transformada de Fourier de la función masa de Dirac en un punto x_0.

Ejemplo 5. De la definición anterior se tiene que para $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$, por lo que

$$\langle \widehat{\delta_{x_0}}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{-ix\cdot x_0}dx, \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

esto es, $\widehat{\delta_{x_0}}$ es posible identificarla con la función $e^{-ix\cdot x_0}$. Ahora, en el caso particular cuando $x_0 = 0$, entonces $\widehat{\delta_0} = 1$.

Ahora, supongamos que $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y α un multi-indice. Integrando por partes $|\alpha|$ veces obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x)g(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\partial^\alpha g)(x)dx. \tag{3.3}$$

Si queremos definir la derivada de una distribución temperada u, tendriamos que dar una definición que extienda la definición de la derivada de la función y que satisgafa (3.3). Para $g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, las integrales en (3.3) se interpretan como acciones de distribuciones sobre funciones. Usaremos (3.3) simplemente para definir la derivada de una distribución.

Definición 3.3.4. Sea $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y α un milti-indice. Definimos

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

Si u es una función, la derivada de u en el sentido de las distribuciones se denominan derivadas distribucionales de orden $|\alpha|$.

Ejemplo 6. Se mostró que $\widehat{\delta_0} = 1$. Más general, para cualquier multi−índice α veamos que

$$\widehat{\partial^\alpha \delta_0} = (ix)^\alpha.$$

En efecto, para $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\partial^\alpha \delta_0}, \varphi \rangle &= \langle \partial^\alpha \delta_0, \widehat{\varphi} \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \partial^\alpha \widehat{\varphi} \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, (-1)^{|\alpha|} \widehat{(ix)^\alpha \varphi} \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \widehat{(ix)^\alpha \varphi} \rangle \\
&= \widehat{(ix)^\alpha \varphi}(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (ix)^\alpha \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

Del calculo anterior es posible identificar a $\widehat{\partial^\alpha \delta_0}$ como la función $(ix)^\alpha$.

Definición 3.3.5. Sean T una matriz invertible, $y \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Para una distribución temperada u definimos lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc} \tau_y u & \text{traslación de} & u & \text{por} \quad \langle \tau_y u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-y}\varphi \rangle, \\ \delta^r u & \text{dilatación de} & u & \text{por} \quad \langle \delta^r u, \varphi \rangle = \langle u, r^{-n}\delta^{1/r}\varphi \rangle, \\ \tilde{u} & \text{reflexión de} & u & \text{por} \quad \langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{\varphi} \rangle. \end{array}$$

Además, definimos la composición de una matriz invertible T con una distribución temperada u como sigue

$$\langle u \circ T, \varphi \rangle = |\det T|^{-1} \langle u, \varphi \circ T^{-1} \rangle; \quad \text{donde} \quad \varphi \circ T^{-1}(x) = \varphi(T^{-1}x).$$

A continuación daremos un ejemplo en el cual se ilustra la reflexión, dilatación y traslación de una distribución temperada.

Ejemplo 7. La masa de Dirac en el origen coincide con su reflexión, es decir $\delta_0 = \tilde{\delta_0}$. Además, $\delta^r \delta_0 = r^{-n}\delta_0$ y $\tau_y \delta_0 = \delta_y$.
En efecto, para $\varphi \in \mathscr{S}\,\mathbb{R}^n$

$$\langle \tilde{\delta_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \tilde{\varphi} \rangle = \tilde{\varphi}(0) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Por otro lado, para $\varphi \in \mathscr{S}\,\mathbb{R}^n$

$$\langle \delta^r \delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, r^{-n}\delta^{1/r}\varphi \rangle = r^{-n}\langle \delta_0, \delta^{1/r}\varphi \rangle = r^{-n}\delta_0(\delta^{1/r}\varphi) = r^{-n}\delta_0(\varphi) = \langle r^{-n}\delta_0, \varphi \rangle.$$

Por último, para $\varphi \in \mathscr{S}\,\mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^n$ un punto fijo

$$\langle \tau_y \delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \tau_{-y}\varphi \rangle = \delta_0(\tau_{-y}\varphi) = \varphi(y) = \delta_y(\varphi) = \langle \delta_y, \varphi \rangle.$$

Definición 3.3.6. Sea $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Definimos la convolución $\psi * u$ por

$$\langle \psi * u, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{\psi} * \varphi \rangle, \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Ejemplo 8. Sea $u = \delta_{x_0}$ como en la definción 3.3.3. y $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\psi * \delta_{x_0} = \tau_{x_0}\psi.$$

En efecto, para $\varphi \in \mathscr{S}\,\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\langle \psi * \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \langle \delta_{x_0}, \tilde{\psi} * \varphi\rangle &= (\tilde{\psi} * \varphi)(x_0) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\psi}(x_0 - x)\varphi(x)dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x - x_0)\varphi(x)dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\tau_{x_0}\psi)(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Así, es posible identificar a $\psi * \delta_{x_0}$ como la función $\tau_{x_0}\psi$.

Ahora definiremos el producto de una función con una distribución temperada.

Definición 3.3.7. Sean $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos el producto hu de h y u por

$$\langle hu, \varphi\rangle = \langle u, h\varphi\rangle, \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Esta defnción es posible extenderla para una función $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que tiene como maximo un crecimiento polinomial en el infinito, al igual que todas sus derivadas. Es decir, para todo α multi-índice se cumple que $|(\partial^\alpha h)(x)| \leq C_\alpha(1+|x|)^{k_\alpha}$ para algunos $C_\alpha, k_\alpha > 0$.

En lo siguiente veremos una propiedad de la convolución.

Teorema 3.3.1. Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\psi * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$(\psi * u)(x) = \langle u, \tau_x\tilde{\psi}\rangle, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \psi * u, \varphi\rangle &= \langle u, \tilde{\psi} * \varphi\rangle \\
&= u\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\psi}(\cdot - y)\varphi(y)dy\right) \\
&= u\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\tau_y\tilde{\psi})(\cdot)\varphi(y)dy\right) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle u, \tau_y\tilde{\psi}\rangle\varphi(y)dy.
\end{aligned}$$

Verifiquemos la última igualdad. Esto es justificado por la continuidad de u y el hecho de que la suma de Riemann de la integral $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\tau_y\tilde{\psi})(\cdot)\varphi(y)dy$ converge a la integral $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle u, \tau_y\tilde{\psi}\rangle\varphi(y)dy$ en la topología de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Para cada $N = 1, 2, ...,$ considere una partición de $[-N, N]^n$ en $(2N^2)^n$ cubos $\mathcal{Q}_m$ de longitud de lado $1/N$ y sea y_m el centro de cada $\mathcal{Q}_m$. Ahora, para α, β multi$-$índices mostremos que

$$D_N(x) = \sum_{m=1}^{(2N^2)^n} x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\psi}(x-y_m)\varphi(y_m)\mu(\mathcal{Q}_m) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\psi}(x-y)\varphi(y)dy$$

converge a 0 en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ cuando $N \to \infty$. Para $m = 1, .., (2N^2)^n$, por teorema del valor medio en $\mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\psi}(x-y_m)\varphi(y_m)\mu(\mathcal{Q}_m) - \int\limits_{\mathcal{Q}_m} x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\psi}(x-y)\varphi(y)dy \\
&= \int\limits_{\mathcal{Q}_m} x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\psi}(x-y_m)\varphi(y_m)dy - \int\limits_{\mathcal{Q}_m} x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\psi}(x-y)\varphi(y)dy \\
&= \int\limits_{\mathcal{Q}_m} x^\alpha(y-y_m)\cdot\nabla(\tilde{\psi}(x-\cdot)\varphi(\cdot))(\xi)dy
\end{aligned}$$

para algún $\xi = y + t(y_m - y)$, donde $t \in [0, 1]$. Note que, por la caracterización en (2.7) para $M > 0$ con $M \in \mathbb{N}$ un número par,

$$\begin{aligned}
|\nabla(\tilde{\psi}(x-\cdot)\varphi(\cdot))(\xi)| &= |\nabla(\tilde{\psi}(x-\xi))\varphi(\xi) + \tilde{\psi}(x-\xi)(\nabla\varphi)(\xi)| \\
&\leq |\nabla(\tilde{\psi}(x-\xi))\varphi(\xi)| + |\tilde{\psi}(x-\xi)(\nabla\varphi)(\xi)| \\
&\leq c((1+|x-\xi|)^{-M/2}(1+|\xi|)^{-M}) \\
&\leq c'((1+|x-\xi|)^{-M/2}(2+|\xi|)^{-M}).
\end{aligned}$$

Para $y \in \mathcal{Q}_m$ la distancia $|y - y_m|$ será menor que la diagonal de $\mathcal{Q}_m$ cuya distancia es $\sqrt{n}/N$, de donde $|y - y_m| \leq \sqrt{n}/N$. Así,

$$|x^\alpha(y-y_m)\cdot\nabla(\tilde{\psi}(x-\cdot)\varphi(\cdot))(\xi)| \leq C|x|^{|\alpha|}\frac{\sqrt{n}}{N}\frac{1}{(1+|x-\xi|)^{M/2}}\frac{1}{(2+|\xi|)^M} \qquad (3.5)$$

elijamos $M > 2|\alpha|$, de la desigualdad

$$1 + |x| \leq 1 + |x-\xi| + |\xi| \leq 2 + 2|x-\xi| + |\xi| + |\xi||x-\xi|$$

se tiene que

$$\frac{1}{(1+|x-\xi|)^{M/2}(2+|\xi|)^{M/2}} \leq \frac{1}{(1+|x|)^{M/2}}$$

por lo que en (3.5)

$$\begin{aligned}
|x^\alpha (y-y_m)\cdot \nabla(\tilde{\psi}(x-\cdot)\varphi(\cdot))(\xi)| &\leq C'|x|^{|\alpha|}\frac{\sqrt{n}}{N}\frac{1}{(1+|x|)^{M/2}}\frac{1}{(2+|\xi|)^{M/2}} \\
&\leq C'|x|^{|\alpha|}\frac{\sqrt{n}}{N}\frac{1}{(1+|x|)^{M/2}}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}
\end{aligned}$$

esto último debido a que

$$|y| = |\xi + t(y-y_m)| \leq |\xi| + t|y-y_m| \leq |\xi| + \sqrt{n}/N \leq |\xi|+1 \quad \text{para} \quad N \geq \sqrt{n}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&|D_N(x)| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{(2N^2)^n} x^\alpha \partial_x^\beta \tilde{\psi}(x-y_m)\varphi(y_m)\mu(\mathcal{Q}_m) - \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \partial_x^\beta \tilde{\psi}(x-y)\varphi(y)dy \right| \\
&= \left| \int_{[-N,N]^n} x^\alpha (y-y_m)\cdot \nabla((\tilde{\psi}(x-\cdot)\varphi(\cdot))(\xi)dy - \int_{([-N,N]^n)^c} x^\alpha \partial_x^\beta \tilde{\psi}(x-y)\varphi(y)dy \right| \\
&\leq \frac{C''|x|^{|\alpha|}}{N(1+|x|)^{M/2}} \int_{[-N,N]^n} \frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}dy + \int_{([-N,N]^n)^c} |x^\alpha \partial_x^\beta \tilde{\psi}(x-y)\varphi(y)|dy.
\end{aligned}$$

Estudiaremos cada una de estas integrales por separadas.

$$\begin{aligned}
\int_{[-N,N]^n} \frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}dy &= c_n \int_0^N \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{M/2}}dr \\
&= c_n \left(\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{M/2}}dr + \int_1^N \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{M/2}}dr \right) \\
&\leq c_n \left(\tilde{c}\nu_n + \int_1^N r^{n-1-M/2}dr \right) \\
&\leq c_n \left(\tilde{c}\nu_n + \omega_{n-1}\frac{1}{M/2-n} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Para la otra integral, usaremos nuevamente la caracterización en (2.7), por lo que para $M \in \mathbb{N}$ y un argumento similar a las estimaciones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{([-N,N]^n)^c} |x^\alpha \partial_x^\beta \tilde{\psi}(x-y)\varphi(y)|dy &\leq \int\limits_{([-N,N]^n)^c} \frac{C'''|x|^{|\alpha|}}{(1+|x-y|)^M(1+|y|)^M}dy \\
&\leq \frac{C'''|x|^{|\alpha|}}{(1+|x|)^{M/2}} \int\limits_{([-N,N]^n)^c} \frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}dy \\
&= \frac{C'''|x|^{|\alpha|}}{(1+|x|)^{M/2}} K_n \int\limits_N^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{M/2}}dr \\
&\leq \frac{C'''|x|^{|\alpha|}}{(1+|x|)^{M/2}} K_n' \int\limits_N^\infty r^{n-1-M/2}dr \\
&= \frac{C'''|x|^{|\alpha|}}{(1+|x|)^{M/2}} K_n' \frac{1}{N^{M/2-n}} \quad \text{aquí} \quad M > 2n.
\end{aligned}$$

Así,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D_N(x)| \leq \frac{\tilde{C}_n}{N(1+|x|)^{M/2}} + \frac{\bar{C}_n}{(1+|x|)^{M/2}N^{M/2-n}} \to 0, \quad \text{cuando} \quad N \to \infty.$$

Todo lo anterior nos permite identificar a la función $\psi * u$ como

$$(\psi * u)(x) = \langle u, \tau_x \tilde{\psi} \rangle.$$

Ahora mostraremos que $\psi * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sea $e_j = (0, ..., 1, ..., 0)$ con 1 en la $j-$ésima coordenada y 0 en las demás. Entonces,

$$\begin{aligned}
\partial_j(\psi * u)(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\tau_{-he_j}(\psi * u)(x) - (\psi * u)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} u\left(\frac{\tau_{-he_j}(\tau_x\tilde{\psi}) - \tau_x\tilde{\psi}}{h}\right) \quad \text{continuidad de} \quad u \\
&= u\left(\lim_{h\to 0} \frac{\tau_{-he_j}(\tau_x\tilde{\psi}) - \tau_x\tilde{\psi}}{h}\right) \\
&= u(\partial_j(\tau_x\tilde{\psi})) \\
&= u(\tau_x(\partial_j\tilde{\psi})) = (\partial_j\psi * u)(x).
\end{aligned}$$

Ya que,

$$\frac{\tau_{-he_j}(\tau_x\tilde{\psi}) - \tau_x\tilde{\psi}}{h} \to \partial_j(\tau_x\tilde{\psi}) = \tau_x(\partial_j\tilde{\psi}) \quad \text{en} \quad \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$

Haciendo el mismo cálculo para derivadas de orden superior se tiene que para todo γ multi$-$índice $\partial^\gamma(\psi * u) = (\partial^\gamma\psi) * u$ y por lo tanto, $\psi * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\square$

A continuación damos una proposición que extiende las propiedades de la transformada de Fourier a distribuciones temperadas.

Proposición 3.3.2. Sean $u_k, u, v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_k, \varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{C}$, α un multi-índice y $r > 0$, entonces

(1) $\widehat{u+v} = \widehat{u} + \widehat{v}$,

(2) $\widehat{bu} = b\widehat{u}$,

(3) Si $u_k \to u$ en $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{u_k} \to \widehat{u}$ en $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,

(4) $\widehat{\tilde{u}} = \tilde{\widehat{u}}$,

(5) $\widehat{\tau_y u} = e^{-ix\cdot y}\widehat{u}$,

(6) $\widehat{e^{iy\cdot\xi}u} = \tau_y \widehat{u}$,

(7) $\widehat{\delta^r u} = (\widehat{u})_r = r^{-n}\delta^{1/r}\widehat{u}$,

(8) $\widehat{\partial^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}$,

(9) $\partial^\alpha \widehat{u} = (-1)^{|\alpha|}\widehat{(ix)^\alpha u}$,

(10) $\check{\widehat{u}} = (2\pi)^n u$,

(11) $\widehat{\psi * u} = \widehat{\psi}\widehat{u}$,

(12) $\widehat{\psi} * \widehat{u} = (2\pi)^n \widehat{\psi u}$,

(13) **(Regla de Leibniz)** $\quad \partial_j^m(\varphi u) = \sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} (\partial_j^t \varphi)(\partial_j^{m-t} u)$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$,

(14) **(Regla de Leibniz)** $\quad \partial^\alpha(\varphi u) = \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\gamma_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_1}{\gamma_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\gamma_n} (\partial^\alpha \varphi)(\partial^{\alpha-\gamma} u)$.

Demostración. Dado que el conjunto de todos los funcionales lineales sobre $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definen un espacio vectorial, donde la suma de dos funcionales lineales sobre $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es definida de forma natural por $(u+v)(\varphi) = u(\varphi) + v(\varphi)$ y el producto de un escalar $a \in \mathbb{C}$ por un funcional u es definido por $(au)(\varphi) = au(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

1. Para $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$\langle \widehat{u+v}, \varphi \rangle = \langle u+v, \widehat{\varphi} \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle + \langle v, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{u}, \varphi \rangle + \langle \widehat{v}, \varphi \rangle = \langle \widehat{u} + \widehat{v}, \varphi \rangle.$$

   Por lo que es posible identificar a $\widehat{u+u}$ con la función $\widehat{u} + \widehat{v}$.

2.

$$\langle \widehat{bu}, \varphi \rangle = \langle bu, \widehat{\varphi} \rangle = b\langle u, \widehat{\varphi} \rangle = b\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle b\widehat{u}, \varphi \rangle.$$

3. Note que, $\widehat{u_k}(\varphi) = u_k(\widehat{\varphi}) \to u(\widehat{\varphi}) = \widehat{u}(\varphi)$ cuando $k \to \infty$, para toda $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $\widehat{u_k} \to \widehat{u}$ en $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

4.

$$\langle \widehat{\tilde{u}}, \varphi \rangle = \langle \tilde{u}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle u, \tilde{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle u, \widehat{\tilde{\varphi}} \rangle = \langle \widehat{u}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \tilde{\widehat{u}}, \varphi \rangle.$$

5.

$$\langle \widehat{\tau_y u}, \varphi \rangle = \langle \tau_y u, \widehat{\varphi} \rangle = \langle u, \tau_{-y}\widehat{\varphi} \rangle = \langle u, \widehat{e^{-ix\cdot y}\varphi} \rangle = \langle \widehat{u}, e^{-ix\cdot y}\varphi \rangle = \langle e^{-ix\cdot y}\widehat{u}, \varphi \rangle.$$

6.

$$\langle \widehat{e^{iy\cdot\xi}u}, \varphi \rangle = \langle e^{iy\cdot\xi}u, \widehat{\varphi} \rangle = \langle u, e^{iy\cdot\xi}\widehat{\varphi} \rangle = \langle u, \widehat{\tau_{-y}\varphi} \rangle = \langle \widehat{u}, \tau_{-y}\varphi \rangle = \langle \tau_y \widehat{u}, \varphi \rangle.$$

7.

$$\langle \widehat{\delta^r u}, \varphi \rangle = \langle \delta^r u, \widehat{\varphi} \rangle = \langle u, r^{-n}\delta^{1/r}\widehat{\varphi} \rangle = \langle u, \widehat{\delta^r \varphi} \rangle = \langle \widehat{u}, \delta^r \varphi \rangle = \langle r^{-n}\delta^{1/r}\widehat{u}, \varphi \rangle.$$

8.

$$\langle \widehat{\partial^\alpha u}, \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha u, \widehat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = \langle u, \widehat{(ix)^\alpha \varphi} \rangle = \langle \widehat{u}, (ix)^\alpha \varphi \rangle = \langle (ix)^\alpha \widehat{u}, \varphi \rangle.$$

9.

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha \widehat{u})(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\widehat{u}(\partial^\alpha \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} u(\widehat{\partial^\alpha \varphi}) \\ &= (-1)^{|\alpha|} u\left((i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}\right) \\ &= (-1)^{|\alpha|}(i\xi)^\alpha u\left(\widehat{\varphi}\right) \\ &= (-1)^{|\alpha|}\widehat{(i\xi)^\alpha u}(\varphi).\end{aligned}$$

10.

$$\check{\hat{u}}(\varphi) = \hat{u}(\check{\varphi}) = u(\hat{\check{\varphi}}) = u((2\pi)^n \varphi) = (2\pi)^n u(\varphi).$$

11.

$$\langle \widehat{\psi * u}, \varphi \rangle = \langle \psi * u, \widehat{\varphi} \rangle = \langle u, \tilde{\psi} * \widehat{\varphi} \rangle = \langle u, \widehat{\left(\widehat{\psi}\varphi\right)} \rangle = \langle \widehat{u}, \widehat{\psi}\varphi \rangle = \langle \widehat{\psi}\widehat{u}, \varphi \rangle.$$

Veamos que para $\psi, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se cumple que $\tilde{\psi} * \widehat{\varphi} = \widehat{\left(\widehat{\psi}\varphi\right)}$.

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{\psi} * \widehat{\varphi}\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\psi}(x-y)\widehat{\varphi}(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y-x)\widehat{\varphi}(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_x \psi(y)\widehat{\varphi}(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_x \psi}(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\widehat{\psi}(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\left(\widehat{\psi}\varphi\right)(\xi)d\xi \\
&= \widehat{\left(\widehat{\psi}\varphi\right)}(x).
\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\psi} * \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle \widehat{u}, \tilde{\widehat{\psi}} * \varphi \rangle &= \left\langle u, \widehat{\left(\tilde{\widehat{\psi}} * \varphi\right)} \right\rangle \\
&= \left\langle u, \widehat{\left(\tilde{\widehat{\psi}}\right)}\widehat{\varphi} \right\rangle \\
&= \left\langle u, \hat{\tilde{\hat{\psi}}}\widehat{\varphi} \right\rangle \\
&= \langle u, (2\pi)^n \psi\widehat{\varphi} \rangle \\
&= \langle (2\pi)^n \psi u, \widehat{\varphi} \rangle \\
&= \langle (2\pi)^n \widehat{\psi u}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

13. Definamos el conjunto $V := \left\{ m \in \mathbb{Z}^+ : \partial_j^m(\varphi u) = \sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} (\partial_j^t \varphi)(\partial_j^{m-t} u) \right\}$.

Como $\partial_j(\varphi u) = \varphi(\partial_j u) + (\partial_j \varphi) u = \sum_{t=0}^{1} \binom{1}{t} (\partial_j^t \varphi)(\partial_j^{1-t} u)$, es decir $1 \in V$. Supongamos que $m \in V$, luego $\partial_j^m(\varphi u) = \sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} (\partial_j^t \varphi)(\partial_j^{m-t} u)$ es verdadero, veamos que $m+1 \in V$.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
&\partial_j^{m+1}(\varphi u) \\
&= \partial_j^m[\partial_j(\varphi u)] \\
&= \partial_j^m \left[(\partial_j \varphi) u + \varphi(\partial_j u) \right] \\
&= \partial_j^m[(\partial_j \varphi) u] + \partial_j^m[(\varphi(\partial_j u)] \\
&= \sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} (\partial_j^{t+1} \varphi)(\partial_j^{m-t} u) + \sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} (\partial_j^t \varphi)(\partial_j^{m-t+1} u) \\
&= (\partial_j^{m+1} \varphi) u + \sum_{t=0}^{m-1} \binom{m}{t} (\partial_j^{t+1} \varphi)(\partial_j^{m-t} u) + \sum_{t=1}^{m} \binom{m}{t} (\partial_j^t \varphi)(\partial_j^{m-t+1} u) + \varphi(\partial_j^{m+1} u) \\
&= (\partial_j^{m+1} \varphi) u + \sum_{t=0}^{m-1} \binom{m}{t} (\partial_j^{t+1} \varphi)(\partial_j^{m-t} u) + \sum_{t=0}^{m-1} \binom{m}{t+1} (\partial_j^{t+1} \varphi)(\partial_j^{m-t} u) + \varphi(\partial_j^{m+1} u) \\
&= (\partial_j^{m+1} \varphi) u + \sum_{t=0}^{m-1} \left[\binom{m}{t} + \binom{m}{t+1} \right] (\partial_j^{t+1} \varphi)(\partial_j^{m-t} u) + \varphi(\partial_j^{m+1} u) \\
&= (\partial_j^{m+1} \varphi) u + \sum_{t=0}^{m-1} \binom{m+1}{t+1} (\partial_j^{t+1} \varphi)(\partial_j^{m-t} u) + \varphi(\partial_j^{m+1} u) \\
&= (\partial_j^{m+1} \varphi) u + \sum_{t=1}^{m} \binom{m+1}{t} (\partial_j^{t} \varphi)(\partial_j^{m+1-t} u) + \varphi(\partial_j^{m+1} u) \\
&= \sum_{t=0}^{m+1} \binom{m+1}{t} (\partial_j^t \varphi)(\partial_j^{m+1-t} u).
\end{aligned}
$$

Así, $\partial_j^{m+1}(\varphi u) = \sum_{t=0}^{m+1} \binom{m+1}{t} (\partial_j^t \varphi)(\partial_j^{m+1-t} u)$. Por lo tanto, $m+1 \in V$.

14. Aplicando en reiteradas ocasiones el inciso anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\partial^{\alpha}(\varphi u)\\
&= \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\partial_n^{\alpha_n}(\varphi u)\\
&= \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\sum_{\gamma_n=0}^{\alpha_n}\binom{\alpha_n}{\gamma_n}(\partial_n^{\gamma_n}\varphi)(\partial_n^{\alpha_n-\gamma_n}u)\\
&= \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_{n-2}^{\alpha_{n-2}}\sum_{\gamma_n=0}^{\alpha_n}\binom{\alpha_n}{\gamma_n}\partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\left[(\partial_n^{\gamma_n}\varphi)(\partial_n^{\alpha_n-\gamma_n}u)\right]\\
&= \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_{n-2}^{\alpha_{n-2}}\sum_{\gamma_n=0}^{\alpha_n}\binom{\alpha_n}{\gamma_n}\sum_{\gamma_{n-1}=0}^{\alpha_{n-1}}\binom{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}}(\partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\partial_n^{\alpha_n}\varphi)\left(\partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\gamma_{n-1}}u\right)\\
&\vdots\\
&= \sum_{\gamma_n=0}^{\alpha_n}\binom{\alpha_n}{\gamma_n}\cdots\sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{\gamma_1}(\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}\varphi)(\partial_1^{\alpha_1-\gamma_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n-\gamma_n}u)\\
&= \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1}\cdots\sum_{\gamma_n=0}^{\alpha_n}\binom{\alpha_1}{\gamma_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\gamma_n}(\partial^{\alpha}\varphi)(\partial^{\alpha-\gamma}u).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.3.3. Si $u_k, u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $u_k \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces $u_k \to u$ en $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Veamos que $|\langle u_k, \varphi\rangle - \langle u, \varphi\rangle| \to 0$, para toda $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
Por desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
|\langle u_k, \varphi\rangle - \langle u, \varphi\rangle| &= |\langle (u_k - u), \varphi\rangle|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n}(u_k - u)\varphi dx\right|\\
&\leq \|u_k - u\|_p\|\varphi\|_{p'} \to 0, \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.
\end{aligned}$$

Es decir, $\langle u_k, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$ siempre que $k \to \infty$ para toda $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Por defininción, $u_k \to u$ en $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Capítulo 4

Espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$

En este capítulo definiremos los espacios de Sobolev y demostraremos algunas de sus propiedades más importantes. Estos espacios al transcurrir del tiempo han mostrado ser los que reunen las condiciones necesarias para hallar soluciones a EDPs no lineales.
Los espacios de Sobolev fueron introducidos por el matematico ruso Sergei L'vovich Sobolev al rededor de (1930) en ese entonces para resolver la ecuación de Laplace o Poisson $-\bigtriangleup u = f$ con condiciones de borde. También suelen ser espacios más amplios que el espacio de las funciones continuas y diferenciables.

4.1. Espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$

En esta sección daremos una breve introducción a los espacios clásicos de Sobolev que denotaremos por $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Sobolev miden la diferenciabilidad de funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y son una herramienta fundamental en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.
Comenzaremos definiendo los espacios de Sobolev.

Definición 4.1.1. Sea $s \in \mathbb{R}$. Definimos el espacio de Sobolev de orden s, que denotaremos por $H^s(\mathbb{R}^n)$ como

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \Lambda^s f(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

con norma $\|\cdot\|_{H^s}$ definida por

$$\|f\|_{H^s} = \|\Lambda^s f\|_2$$

Ejemplo 9. Sea $n \geq 1$, en el ejemplo 5 se mostró que $\widehat{\delta_0}(\xi) = 1$ de donde,

$$\begin{aligned}
\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) &\Longleftrightarrow \Lambda^s \delta_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \\
&\Longleftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n) \\
&\Longleftrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s d\xi < \infty, \quad \text{si} \quad s < -n/2.
\end{aligned}$$

Así, $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si $s < -n/2$.

De la definición de los espacios de Sobolev, se tiene las siguientes propiedades.

Proposición 4.1.1. Sean $s, r \in \mathbb{R}$.

(1) Si $r > s$, entonces $H^r(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$.

(2) $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ definido como sigue:

$$\text{Si} \quad f, g \in H^s(\mathbb{R}^n), \qquad \text{entonces} \quad \langle f, g \rangle_s = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s f(\xi) \overline{\Lambda^s g(\xi)} d\xi.$$

Demostración. 1. Sea $f \in H^r(\mathbb{R}^n)$. Si $s < r$, entonces $(1+|\xi|^2)^s < (1+|\xi|^2)^r$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dado que $|\widehat{f}(\xi)|^2 \geq 0$, se sigue que

$$\begin{gathered}
(1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 < (1+|\xi|^2)^r |\widehat{f}(\xi)|^2 \\
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|(1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi < \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|(1+|\xi|^2)^{r/2} \widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi,
\end{gathered}$$

lo cual implica que $\|f\|_{H^s} = \|\Lambda^s f\|_2 < \|\Lambda^r f\|_2 = \|f\|_{H^r} < \infty$.

Por lo que, $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Así, $H^r(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$.

2. Veamos primero que $\langle f, g \rangle_s = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s f(\xi) \overline{\Lambda^s g(\xi)} d\xi$ define un producto interno sobre $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

En efecto, sean $f, g, h \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $a, b \in \mathbb{C}$ escalares.

a) Por la linealidad de la integral de Lebesgue tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle af+bh,g\rangle_s &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s(af+bh)(\xi)\overline{\Lambda^s g(\xi)}d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{s/2}(\widehat{af+bh})(\xi)\overline{\Lambda^s g(\xi)}d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[a(1+|\xi|)^{s/2}\widehat{f}(\xi)+b(1+|\xi|)^{s/2}\widehat{h}(\xi)\right]\overline{\Lambda^s g(\xi)}d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(1+|\xi|)^{s/2}\widehat{f}(\xi)\overline{\Lambda^s g(\xi)}d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(1+|\xi|)^{s/2}\widehat{h}(\xi)\overline{\Lambda^s g(\xi)}d\xi \\
&= a\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s f(\xi)\overline{\Lambda^s g(\xi)}d\xi + b\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s h(\xi)\overline{\Lambda^s g(\xi)}d\xi \\
&= a\langle f,g\rangle_s + b\langle h,g\rangle_s.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\langle f,g\rangle_s = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s f(\xi)\overline{\Lambda^s g(\xi)}d\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\overline{\Lambda^s f(\xi)}\Lambda^s g(\xi)}d\xi \\
&= \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\Lambda^s f(\xi)}\Lambda^s g(\xi)d\xi} \\
&= \overline{\langle g,f\rangle_s}.
\end{aligned}$$

c)

$$\langle f,f\rangle_s = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s f(\xi)\overline{\Lambda^s f(\xi)}d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Lambda^s f(\xi)|^2\, d\xi = \|\Lambda^s f\|_2^2 \geq 0.$$

$$\begin{aligned}
\langle f,f\rangle_s = 0 &\iff \|\Lambda^s f\|_2^2 = 0 \\
&\iff \Lambda^s f(\xi) = 0 \quad \text{en} \quad c.t.p. \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,. \\
&\iff (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi) = 0 \\
&\iff \widehat{f}(\xi) = 0 \\
&\iff f = 0 \quad \text{en} \quad c.t.p. \quad x \in \mathbb{R}^n\,.
\end{aligned}$$

Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $H^s(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\{\Lambda^s f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ forma una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^n)$, ya que para $l,m > N$ se tiene

$$\|\Lambda^s f_l - \Lambda^s f_m\|_2 = \|\Lambda^s(f_l - f_m)\|_2 = \|f_l - f_m\|_{H^s} < \epsilon.$$

Por la completez de $L^2(\mathbb{R}^n)$ existe $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\Lambda^s f_k \to h \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Defina $g := \Lambda^{-s} h$ y note que $g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ pues $\|g\|_{H^s} = \|\Lambda^s \Lambda^{-s} h\|_2 = \|h\|_2 < \infty$. Además,

$$\|f_k - g\|_{H^s} = \|\Lambda^s (f_k - g)\|_2 = \|\Lambda^s f_k - h\|_2 \to 0, \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Así, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en $H^s(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert.

$\square$

Teorema 4.1.2. Si $k \in \mathbb{Z}^+$ y $s \in \mathbb{R}$,

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n); \partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n) \quad \text{para todo} \quad |\alpha| \le k\}$$

y las normas $\|f\|_{H^s}$ y $\displaystyle\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{H^{s-k}}$ son normas equivalentes.

Demostración. Si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, podemos observar que

$$\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) = \frac{(i\xi)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} (1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi) = \frac{(i\xi)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} \Lambda^s f(\xi),$$

dado que $\Lambda^s f(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $(i\xi)^\alpha (1+|\xi|^2)^{-s/2}$ es una función continua sobre $\mathbb{R}^n$, se sigue que $\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi)$ es una función localmente integrable.
Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ con $|\alpha| \le k$ tenemos que $|\xi_j|^{\alpha_j} \le |\xi|^{\alpha_j}$ para cada $j = 1, ..., n$ de donde

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha| = |\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}| &= |\xi_1|^{\alpha_1} \cdots |\xi_n|^{\alpha_n} \\
&\le |\xi|^{\alpha_1} \cdots |\xi|^{\alpha_n} \\
&= |\xi|^{|\alpha|} \\
&= \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right)^{|\alpha|/2} \\
&\le (1+|\xi|^2)^{k/2}.
\end{aligned}$$

De la desigualdad anteior, se tiene que

$$|(i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)| = |\xi^\alpha||\widehat{f}(\xi)| \leq (1+|\xi|^2)^{k/2}|\widehat{f}(\xi)|. \tag{4.1}$$

Por otro lado, veamos que $(1+|\xi|^2)^{k/2} \leq C \sum\limits_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha| = \sum\limits_{|\alpha|\leq k} |(i\xi)^\alpha|$.

Ya que, $\sum\limits_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha| > 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, definamos la función

$$F(\xi) := \frac{(1+|\xi|^2)^{k/2}}{\sum\limits_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|}.$$

Note que,

$$\sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha| = \sum_{j=1}^n |\xi_j|^k + \sum_{\Theta} |\xi^\alpha| \geq \sum_{j=1}^n |\xi_j|^k$$

donde $\Theta = \{\alpha : |\alpha| \leq k\} \backslash \{\alpha : \alpha = (0,0,...,k,...,0,0) \quad \text{con} \quad k \quad \text{en la j-ésima posición}\}$.

Ahora si $|\xi| \geq 1$, entonces

$$F(\xi) = \frac{(1+|\xi|^2)^{k/2}}{\sum\limits_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|} \leq \frac{(1+|\xi|^2)^{k/2}}{\sum\limits_{j=1}^n |\xi_j|^k} \leq 2^{k/2} \frac{|\xi|^k}{\sum\limits_{j=1}^n |\xi_j|^k} \leq C.$$

Se sigue que,

$$(1+|\xi|^2)^{k/2}|\widehat{f}(\xi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} |(i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)|. \tag{4.2}$$

De (4.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^s} &= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-k}{2}}(1+|\xi|^2)^{k/2}\widehat{f}(\xi)\|_2 \\
&= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-k}{2}}(1+|\xi|^2)^{k/2}|\widehat{f}(\xi)|\|_2 \\
&\leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-k}{2}}|(i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)|\|_2 \\
&= C \sum_{|\alpha|\leq k} \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-k}{2}}|\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi)|\|_2 \\
&= C \sum_{|\alpha|\leq k} \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-k}{2}}\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi)\|_2 \\
&= C \sum_{|\alpha|\leq k} \|\Lambda^{s-k}\partial_x^\alpha f\|_2 \\
&= C \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial_x^\alpha f\|_{H^{s-k}}.
\end{aligned}$$

De (4.1) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^\alpha f\|_{H^{s-k}} &= \|\Lambda^{s-k}\partial_x^\alpha f\|_2 \\
&= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-k}{2}}\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi)\|_2 \\
&= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-k}{2}}|(i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)|\|_2 \\
&\leq \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-k}{2}}(1+|\xi|^2)^{k/2}|\widehat{f}(\xi)|\|_2 \\
&= \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi)\|_2 \\
&= \|\Lambda^s f\|_2 \\
&= \|f\|_{H^s},
\end{aligned}$$

de donde,

$$\sum_{|\alpha|\leq k}\|\partial_x^\alpha f\|_{H^{s-k}} \leq \sum_{|\alpha|\leq k} 1^{|\alpha|}\|f\|_{H^s},$$

así,

$$C'\sum_{|\alpha|\leq k}\|\partial_x^\alpha f\|_{H^{s-k}} \leq \|f\|_{H^s} \quad \text{con} \quad C' := \frac{1}{\sum\limits_{|\alpha|\leq k} 1^{|\alpha|}} > 0.$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_{H^s} \equiv \sum_{|\alpha|\leq k}\|\partial_x^\alpha f\|_{H^{s-k}}.$$

□

Para entender la relación entre el espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$ y la diferenciabilidad de funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$ daremos la siguiente definición.

Definición 4.1.2. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, diremos que f es diferenciable en $L^2(\mathbb{R}^n)$ con respecto a la $j-$ésima variable si existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{f(x+he_j)-f(x)}{h} - g(x)\right|^2 dx \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0,$$

donde e_j es igual a 1 en la $j-$ésima coordenada y cero en las demás.

De la anterior definición es posible dar una drescripción de los espacios $H^k(\mathbb{R}^n)$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ sin hacer uso de la transformada de Fourier.

Corolario 4.1.3. Si $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces $H^k(\mathbb{R}^n)$ coincide con el espacio de funciones $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ cuyas derivadas en el sentido de distribuciones $\partial_x^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in (\mathbb{Z}_0^+)^n$ con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leq k$.
En este caso las normas $\|f\|_{H^k}$ y $\sum\limits_{|\alpha|\leq k} \|\partial_x^\alpha f\|_2$ son equivalentes.

Demostración. Haciendo uso de la fórmula $\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$ y las desigualdades (4.1) y (4.2), y razonando de manera análoga a como en el teorema anterior se obtiene el resultado. $\square$

El siguiente resultado nos permite relacionar derivadas débiles, es decir, derivadas en el sentido de las distribuciones con derivadas en el sentido clásico.

Teorema 4.1.4. (Incrustación). Sea k un entero no negativo. Si $s > n/2+k$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ está incrustado continuamente en $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones con derivadas continuas de orden k que se anulan en el infinito y además

$$\|f\|_{C^k} \leq c_s \|f\|_{H^s}.$$

Demostración. Veamos el caso cuando $k = 0$. Mostremos que si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y se tiene la estimación

$$\|\widehat{f}\|_1 \leq c_s \|f\|_{H^s} \quad \text{si} \quad s > n/2. \tag{4.3}$$

En efecto, por desigualdad de Hölder tenemos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\xi|^2)^{s/2} |\widehat{f}(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} d\xi \leq \|\Lambda^s f\|_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s} \right)^{1/2} \leq \tilde{c}_s \|f\|_{H^s},$$

aquí, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s} \leq \tilde{c}_s < \infty$, si $s > n/2$. Así, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por el teorema de inversión, $f(x) = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{f}}(-x)$ donde f es una función continua y acotada. Por tanto,

$$\|f\|_\infty = (2\pi)^{-n} \|\hat{\hat{f}}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n} \|\widehat{f}\|_1 \leq (2\pi)^{-n} \tilde{c}_s \|f\|_{H^s} = c_s \|f\|_{H^s}.$$

La función f se puede ver como la transformada de Fourier de $\widehat{f}$, por Lema de Riemann-Lebesgue se tiene que $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Para el caso donde $k \geq 1$, veamos que si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s > n/2 + k$ entonces, para $|\alpha| \leq k$ se tiene que $\widehat{\partial_x^\alpha f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aplicando desigualdad de Hölder nuevamente

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} (1+|\xi|^2)^{s/2} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \|\Lambda^s f\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^s} d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq c_s' \|f\|_{H^s},\end{aligned}$$

donde $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^s} d\xi \leq c_s' < \infty$, si $s > n/2 + |\alpha|$, esto es cierto pues $|\alpha| \leq k$. Así $\widehat{\partial_x^\alpha f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por el teorema de inversión $\partial_x^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{\partial_x^\alpha f}}(-x)$ se sigue que

$$\|\partial_x^\alpha f\|_\infty = (2\pi)^{-n} \|\widehat{\widehat{\partial_x^\alpha f}}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n} \|\widehat{\partial_x^\alpha f}\|_1 \leq (2\pi)^{-n} c_s' \|f\|_s \leq \bar{c}_s \|f\|_{H^s}.$$

Luego, el Lema de Riemann-Lebesgue implica que $|\partial_x^\alpha f(x)| \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Por tanto, $\partial_x^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Es decir, $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. □

Corolario 4.1.5. Si $s = n/2 + k + \theta$, con $\theta \in (0,1)$ y k un entero no negativo, entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ está incrustado continuamente en $C^{k+\theta}(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones $C^k(\mathbb{R}^n)$ con derivadas parciales de orden k Hölder continuo con índce θ.

Demostración. Estudiemos primero el caso cuando $k = 0$, asi $s = n/2 + \theta$. Supongamos que $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Se debe mostrar que para $x, y \in \mathbb{R}^n$, si $|y| < 1$ entonces existen constantes $c > 0$ y $\theta \in (0,1)$ tal que $|f(x+y) - f(x)| \leq c|y|^\theta$. De la fórmula de inversión de la transformada de Fourier y la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}|f(x+y) - f(x)| &= (2\pi)^{-n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i[(x+y)\cdot\xi]} - \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi \right| \\ &= (2\pi)^{-n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \left(e^{iy\cdot\xi} - 1 \right) d\xi \right| \\ &\leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| |e^{iy\cdot\xi} - 1| d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{(n/2+\theta)/2} |\widehat{f}(\xi)| \frac{|e^{iy\cdot\xi} - 1|}{(1+|\xi|^2)^{(n/2+\theta)/2}} d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-n} \|\Lambda^{n/2+\theta} f\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{iy\cdot\xi} - 1|^2}{(1+|\xi|^2)^{n/2+\theta}} d\xi \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{iy\cdot\xi}-1|^2}{(1+|\xi|^2)^{n/2+\theta}}d\xi &\leq \int\limits_{|\xi|\leq|y|^{-1}} \frac{|y|^2|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^{n/2+\theta}}d\xi + 4\int\limits_{|\xi|\geq|y|^{-1}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{n/2+\theta}}d\xi \\
&= c_n'|y|^2\int\limits_0^{|y|^{-1}} \frac{r^2r^{n-1}}{(1+r^2)^{n/2+\theta}}dr + 4\bar{c}_n\int\limits_{|y|^{-1}}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{n/2+\theta}}dr \\
&\leq w_{n,\theta}c_n'|y|^2\int\limits_0^{|y|^{-1}} \frac{r^{n+1}}{(1+r)^{n+2\theta}}dr + 4w_{n,\theta}\bar{c}_n\int\limits_{|y|^{-1}}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{n+2\theta}}dr \\
&= \lambda'|y|^2\int\limits_0^{|y|^{-1}} \frac{r^{n+1}}{(1+r)^{n+1}(1+r)^{2\theta-1}}dr + \bar{\lambda}\int\limits_{|y|^{-1}}^{\infty} \frac{r^{n+2\theta}r^{2\theta-1}}{(1+r)^{n+2\theta}}dr \\
&\leq \lambda'|y|^2\int\limits_0^{|y|^{-1}} (1+r)^{1-2\theta}dr + \bar{\lambda}\int\limits_{|y|^{-1}}^{\infty} r^{2\theta-1}dr \\
&\leq \frac{2\lambda'}{4^\theta(1-\theta)}|y|^{2\theta} + \frac{\bar{\lambda}}{2\theta}|y|^{2\theta} \\
&= M|y|^{2\theta} < \infty \quad \text{con} \quad M := \frac{2\lambda'}{4^\theta(1-\theta)} + \frac{\bar{\lambda}}{2\theta}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si $|y| < 1$ entonces

$$|f(x+y)-f(x)| \leq (2\pi)^{-n}\|\Lambda^{n/2+\theta}f\|_2 M^{1/2}|y|^\theta = (2\pi)^{-n}\|f\|_{H^s}M^{1/2}|y|^\theta = c|y|^\theta;$$

con $c := (2\pi)^{-n}\|f\|_{H^s}M^{1/2}$. Así, $f \in C^\theta(\mathbb{R}^n)$.

Para el caso donde $k \geq 1$ se razona de manera análoga al caso anterior, lo que termina la prueba. □

De todo lo anterior podemos decir que hemos demostrado que los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s > n/2$ son espacios de Hilbert cuyos elementos son funciones continuas. A continuación enunciaremos una de las propiedades más importante de estos espacios, que nos garantiza que estos espacios son cerrados bajo la operación multiplicación.

Teorema 4.1.6. Si $s > n/2$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un algebra con respecto al producto de funciones. Es decir, si $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ entonces $fg \in H^s(\mathbb{R}^n)$ con

$$\|fg\|_{H^s} \leq c_s\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}.$$

Demostración. Por la desigualdad triangular tenemos que para todos $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq 2^s \left[(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} + (1+|\eta|^2)^{s/2}\right].$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&|\Lambda^s(fg)(\xi)| \\
&= |(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{(fg)}(\xi)| \\
&\leq (2\pi)^{-n}(1+|\xi|^2)^{s/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)|d\eta \\
&\leq 2^s(2\pi)^{-n}\left[(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}+(1+|\eta|^2)^{s/2}\right]\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)|d\eta \\
&= 2^s(2\pi)^{-n}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}|\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)|d\eta + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta|^2)^{s/2}|\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)|d\eta\right] \\
&= 2^s\left(|\Lambda^s f| * |\widehat{g}| + |\widehat{f}| * |\Lambda^s g|\right).
\end{aligned}$$

Tomando la norma en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y haciendo uso del teorema de Young se tiene

$$\|fg\|_{H^s} = \|\Lambda^s(fg)\|_2 \leq c\left(\|\Lambda^s f\|_2\|\widehat{g}\|_1 + \|\widehat{f}\|_1\|\Lambda^s g\|_2\right).$$

Por último, de (4.3) implica que si $r > n/2$ entonces

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{H^s} &\leq c\left(\|f\|_{H^s}\|\widehat{g}\|_1 + \|\widehat{f}\|_1\|g\|_{H^s}\right) \\
&\leq c_s\left(\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^r} + \|f\|_{H^r}\|g\|_{H^s}\right).
\end{aligned}$$

Por lo que, tomando $r = s$ se obtiene el resultado deseado. $\square$

Bibliografía

[1] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis.* 3rd ed. Springer, New York,2014.

[2] F. Jones, *Lebesgue Integration on Euclidean Space.* Jones and Bartlett Publishers,United States of America, 2001

[3] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications.* J Wiley and Sons. Inc., United States of America, 1989.

[4] W. Rudin, *Real and Complex Analysis.* 3rd ed. McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1987.

[5] M. Salo, *Fourier analysis and distribution theory.* University of Jyväskilä, (2013).

[6] E. DiBenedetto, *Real Analysis.* Birkhäusen Boston, 2002.

[7] R. Iorio, V. Iorio *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.* Cambridge University Press, 2001.

[8] F. Linares, G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Springer Science+Business Media, LLC 2009.

[9] M. Ruzhansky , V. Turunen, *Pseudo-Differential Operators And Symmetries.* Birkhäuser Verlag AG, 2010.

[10] J. Fourier , *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides.* Manuscrispt submitted to the Institute of France, 21 Dec. 1807.

[11] J. Fourier , *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides.* Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institute de France, no. 4, 1811.

[12] Glen E. Bredon, *Topology and Geometry.* Springer-Verlag. Inc., New York, 1993.