

HOMOLOGÍA SINGULAR DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Andrés Julián Blanquicett Mangones
Andrei Sebastian Agámez Portilla



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA

2023

HOMOLOGÍA SINGULAR DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Andrés Julián Blanquicett Mangones
Andrei Sebastian Agámez Portilla

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Matemático

Asesor:

Dr. Jerson Manuel Borja Soto



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA

2023

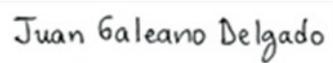
UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Los jurados abajo firmantes certifican que han leído y que aprueban el trabajo de grado titulado: **HOMOLOGÍA SINGULAR DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS**, el cual es presentado por los estudiantes **Andrés Julián Blanquicett Mangones** y **Andrei Sebastian Agámez Portilla**.

Fecha: Diciembre de 2023

Asesor: 
Dr. Jerson Manuel Borja Soto

Jurado: 
Dr. Luis Enrique Benítez Babilonia

Jurado: 
Dr. Juan Gabriel Galeano Delgado

*A Yejana Mangones
Y Raquel Portilla*

Resumen

En el presente trabajo, se exploran conceptos fundamentales del Álgebra Homológica, tales como Módulos, Homomorfismos y Sucesiones Exactas. Se analizan en profundidad los Complejos de Cadena y la Homología, y se discuten teoremas clave como el Lema de la Serpiente y el Teorema Fundamental del Álgebra Homológica. Además, se examina la Homotopía entre Homomorfismos de Complejos de Cadena. Todo lo anterior es con el fin de llegar a la base central de este proyecto, la Homología. Para ello se estudian los Simplejos y el Complejo de Cadenas Singulares. Luego, se abordan temas como el 0-ésimo Grupo de Homología, la Homología de un Punto y la Homología Reducida. Se destaca la Funtorialidad y se presenta el Teorema de Invarianza por Homotopía. Posteriormente, se exploran conceptos más avanzados como la Homología Relativa, la Homología de Pares Topológicos, la Escisión y la Sucesión de Mayer-Vietoris. Finalmente, se discute la Homología de un Cociente de Espacios.

Abstract

In this work, fundamental concepts of Homological Algebra are explored, such as Modules, Homomorphisms and Exact Sequences. Chain Complexes and Homology are analyzed in depth, and key theorems such as the Snake Lemma and the Fundamental Theorem of Homological Algebra are discussed. Furthermore, the Homotopy between Homomorphisms of Chain Complexes is examined. All of the above is in order to reach the central basis of this project, Homology. For this, the Simplexes and the Complex of Singular Chains will be studied. Then, topics such as the 0th Homology Group, One-Point Homology and Reduced Homology are addressed. Funtoriality is highlighted and the Homotopy Invariance Theorem is presented. Subsequently, more advanced concepts such as Relative Homology, Homology of Topological Pairs, Excision and the Mayer-Vietoris Sequence are explored. Finally, the Homology of a Quotient of Spaces is discussed.

Agradecimientos

Estas líneas están dedicadas a nuestros padres por todo el apoyo y motivación necesaria para salir adelante, a todos los docentes que contribuyeron a nuestra formación académica, en especial al Dr. Jerson Manuel Borja Soto del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Córdoba, nuestro director de trabajo de grado, el cual nos asesoró para poder realizar un buen proyecto; y a todas aquellas personas que de una u otra forma nos apoyaron en la realización de este trabajo.

Montería, Colombia

Andrés Julián Blanquicett Mangones

Andrei Sebastian Agámez Portilla

Diciembre de 2023

Contenido

Resumen	<i>iv</i>
Abstract	<i>v</i>
Introducción	1
1 Preliminares	4
2 Álgebra homológica	7
2.1 Módulos, homomorfismos y sucesiones exactas	8
2.2 Complejos de cadena y homología	12
2.3 El lema de la serpiente y el teorema fundamental del álgebra homológica	18
2.4 Homotopía entre homomorfismos de complejos de cadena	32
3 Homología	34
3.1 Simplejos	35
3.2 Complejo de cadenas singulares	36
3.3 El 0-ésimo grupo de homología	40
3.4 Homología de un punto	43
3.5 Homología reducida	43
3.6 Funtorialidad	45
3.7 Teorema de invarianza por homotopía	48
3.8 Homología relativa	58
3.9 Homología de pares topológicos	60
3.10 Escisión y sucesión de Mayer-Vietoris	63

3.11 Homología de un cociente de espacios	65
Bibliografía	75

Introducción

Al momento de iniciar este trabajo, es necesario tener claro el porqué desarrollar el mismo, y en especial resaltar la importancia del estudio de la topología algebraica, y más puntualmente, la homología singular de espacios topológicos, que es el tema del que trata este proyecto.

La teoría de homología, surgida a fines del siglo XIX, se originó como una rama de la topología con Henri Poincaré como pionero. Poincaré, en su obra "Analysis Situs" de 1895, introdujo el concepto de homología como una herramienta para estudiar espacios topológicos complicados y contar agujeros de diferentes dimensiones mediante invariantes lineales. Por otro lado, la teoría de homología también tiene raíces en la geometría algebraica, destacando el trabajo de Hilbert en el estudio de polinomios y sus ideales. Hilbert desarrolló una teoría algebraica sofisticada para reducir el estudio de polinomios no lineales a una estructura de relaciones lineales, estableciendo así una conexión entre la geometría algebraica y la teoría topológica, culminando en lo que se conoce como álgebra homológica. Posteriormente, en los años 1950, la geometría algebraica experimentó un gran avance con el desarrollo de la teoría de cohomología de haces, combinando ideas topológicas de Riemann-Poincaré, conceptos algebraicos de Hilbert y herramientas analíticas para medir con precisión.

Es sabido que uno de los problemas más importante de la topología es determinar condiciones bajo las cuales dos espacios son homeomorfos o no. Ocurre, en muchos casos, que no existe un método para resolver este problema, pero hay varias técnicas que aplicarse y dan resultado en casos especiales relevantes. Como hemos aprendido en el curso de topología del pregrado, para verificar que dos espacios son homeomorfos según la definición misma, debemos exhibir una función continua entre los dos espacios

que sea biyectiva y que su inversa sea continua. Por su parte, la tarea de verificar que dos espacios no son homeomorfos es generalmente algo complicado y las herramientas topológicas que conocemos no son suficientes en la mayoría de los casos. Un ejemplo de lo anterior consiste en considerar las siguientes superficies: la esfera (\mathbb{S}^2), el toro (\mathbb{T}^2) y una superficie compacta de género dos (Σ_2), más conocida como un toro con dos “huecos”.

Estos espacios comparten las propiedades topológicas más importantes que conocemos: conexidad, compacidad, metrizabilidad. Por esta razón no podemos afirmar que no sean homeomorfos, ni que sean homeomorfos entre ellas. Estas propiedades topológicas no permiten “distinguir” entre estos espacios.

Por lo tanto, es necesario introducir nuevas propiedades y técnicas para poder resolver este gran problema. Una de las primeras ideas que surgen es la conexidad simple, y esta cualidad nos permite distinguir, por ejemplo, al plano euclídeo \mathbb{R}^2 del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . Sin embargo, esta propiedad no es suficiente para diferenciar ciertos espacios como el toro \mathbb{T}^2 y Σ_2 . Surge otra idea más general, un concepto que engloba a la conexidad simple como un caso particular, llamado el grupo fundamental (consultar en [7, 8, 10]), pero aunque esta herramienta sin duda es más poderosa, aún no es suficiente para probar que ciertos espacios no son homeomorfos, como por ejemplo \mathcal{S}^2 y \mathcal{S}^n , para $n > 2$. En efecto, estos espacios no son homeomorfos, y es por eso que surge la necesidad de la homología singular, como una herramienta algebraica que permite resolver el problema de determinar cuando dos espacios no son homeomorfos, en muchos más casos que los que logran las herramientas “tradicionales”.

Para adentrarnos en el concepto de homología, primero necesitamos cimentar nuestro entendimiento en el álgebra homológica. Este viaje comienza al considerar ciertos objetos fundamentales conocidos como n -simplejos. Estos simplejos son esencialmente poliedros de dimensión n que actúan como bloques de construcción primordiales en nuestra exploración. A partir de estos n -simplejos, definimos los n -simplejos singulares, que son como "ladrillos" abstractos con los que construimos complejos de cadenas singulares. Estos complejos, a su vez, son estructuras algebraicas compuestas por módulos libres generados por los n -simplejos singulares, que son combinaciones

lineales "formales" de los simplejos singulares con coeficientes en un anillo. Una vez establecidos estos complejos de cadenas, introducimos homomorfismos entre los módulos, llamados operadores frontera, que capturan las relaciones entre los distintos simplejos singulares. Esta colección de complejos y homomorfismos constituye lo que llamamos el complejo de cadenas singulares de un espacio topológico X con coeficientes en un anillo R .

Con el complejo de cadenas en su lugar, podemos avanzar hacia el cálculo de los grupos de homología. Estos grupos se definen como el cociente entre el kernel y la imagen de los operadores frontera, y nos proporcionan una descripción algebraica de la estructura topológica de X . Además, exploramos variantes de la homología, como la homología reducida y la homología relativa, que nos permiten realizar cálculos más precisos y abordar una amplia gama de problemas topológicos de manera más efectiva. En resumen, este enfoque algebraico nos proporciona una herramienta poderosa para entender la geometría subyacente de los espacios topológicos y analizar sus propiedades fundamentales.

El presente trabajo tiene como objetivo principal explorar y desarrollar los conceptos fundamentales del álgebra homológica y la teoría de homología de espacios topológicos. Para lograr este propósito, en el Capítulo 1 se presentarán los aspectos preliminares necesarios, abarcando nociones básicas de álgebra abstracta y topología.

El Capítulo 2 se centra en el desarrollo del álgebra homológica de manera más específica. Aquí, los objetivos principales son establecer el lema de la serpiente, el cual relaciona los grupos de homología de una sucesión exacta corta, y demostrar el teorema fundamental del álgebra homológica.

Por último, en el Capítulo 3 se introducen los grupos de homología de espacios topológicos. Este capítulo comienza con la construcción de complejos de cadenas a partir de recubrimientos por simplejos. Se abordarán los principales resultados, incluyendo el teorema de invarianza de la homología por homotopía, la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris que relaciona la homología de una unión de espacios con la de los espacios componentes, junto con el teorema de excisión. Finalmente, se discutirán algunas aplicaciones de estos teoremas en contextos relevantes.

Chapter 1

Preliminares

En este corto capítulo haremos un rápido recorrido por conceptos algebraicos que serán de ayuda para llevar a cabo este trabajo.

Un **grupo** $\langle G, * \rangle$ es un conjunto G junto con una operación binaria $*$ en G , tal que se satisfacen los siguientes axiomas: La operación binaria $*$ es asociativa, además, existe un elemento e en G tal que $e * x = x * e = x$ para todas las $x \in G$ y finalmente, Para cada $a \in G$ existe un elemento a' en G con la propiedad de que $a' * a = a * a' = e$. Un grupo G es **abeliano** si su operación binaria $*$ es conmutativa, es decir, $x * y = y * x$, para todo $x, y \in G$.

Si G es un grupo y sea S un subconjunto de G y para cada $a, b \in S$ es cierto que el producto $a * b$ calculado en G también está en S , entonces S es **cerrado bajo la operación de grupo** de G . La operación binaria en S , así definida, es la **operación inducida** en S desde G . Entonces, podemos precisar el concepto de grupo contenido en otro.

Si H es un subconjunto de un grupo G cerrado bajo la operación de grupo de G y si H es él mismo un grupo bajo esta operación inducida, entonces H es un **subgrupo** de G .

Ahora veamos otro concepto que es muy importante en álgebra. Un **anillo** $\langle R, +, \cdot \rangle$ es un conjunto R junto con dos operaciones binarias $+$ y \cdot , que llamamos suma y multiplicación, definidas en R tales que se satisfacen los siguientes axiomas: $\langle R, + \rangle$ es un grupo abeliano; además, la multiplicación es asociativa y para todas las

$a, b, c \in R$, se cumple la ley distributiva izquierda $a(b + c) = (ab) + (ac)$ y la ley distributiva derecha $(a + b)c = (ac) + (bc)$.

Un anillo en donde la multiplicación es conmutativa es un **anillo conmutativo**. Un anillo R con identidad multiplicativa 1 tal que $1x = x1 = x$ para todas las $x \in R$ es un *anillo con unitario*.

Un **homomorfismo de grupos** es una función entre dos grupos que preserve la operación binaria. Formalmente, dados dos grupos (G, \cdot) y $(H, *)$, una función $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos si se verifica que para todos los pares de elementos $g_1, g_2 \in G$, se cumple que:

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) * f(g_2),$$

donde \cdot es la operación en G y $*$ es la operación en H . Si la función f es biyectiva, entonces se llama un **isomorfismo** de grupos, lo que significa que ambos grupos tienen la misma estructura algebraica, y sólo se diferencian por los símbolos utilizados para denotar los elementos y la operación.

Ahora, veamos el significado de ciertos símbolos que nos encontraremos a lo largo de este documento, dado el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow h & \circlearrowleft & \downarrow k \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

el símbolo \circlearrowleft nos indica que el diagrama es **conmutativo**, es decir,

$$g \circ h = k \circ f.$$

En ocasiones encontraremos la siguiente notación: $\stackrel{\circlearrowleft}{=}$, la cual indica que la igualdad se sigue gracias a la conmutatividad del diagrama respectivo.

El símbolo, \hookrightarrow se usará para la función inclusión, es decir, dado un conjunto B y un subconjunto A de B , la función de inclusión $i : A \rightarrow B$ se define de tal manera que

para cada elemento x en A , la imagen de x bajo la función de inclusión es el mismo elemento x en B . Es decir, $i(x) = x$ para todo x en A .

Ahora, veamos una serie de conceptos en el área de topología, que también serán necesarios.

Una topología sobre un conjunto X es una colección \mathcal{T} de subconjuntos de X con las siguientes propiedades: \emptyset y X están en \mathcal{T} ; la unión de los elementos de cualquier subcolección de \mathcal{T} está en \mathcal{T} ; y la intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

Un conjunto X para el que se ha definido una topología \mathcal{T} se llama **espacio topológico**. Diremos que un subconjunto U de X es un **conjunto abierto** de X si U pertenece a la colección \mathcal{T} .

Ahora, si X es un espacio topológico con topología \mathcal{T} y si Y es un subconjunto de X , la colección

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología sobre Y , denominada **topología de subespacio**. Con esta topología, Y se denomina **subespacio** de X y sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y . Finalmente, diremos que un subconjunto A de un espacio topológico X es **cerrado** si el conjunto $X \setminus A$ es abierto.

Un **subespacio afín** de \mathbb{R}^m es un conjunto que se puede obtener al trasladar un subespacio vectorial de \mathbb{R}^m . En otras palabras, si V es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^m y a es un vector en \mathbb{R}^m , entonces el conjunto $a + V = \{a + v : v \in V\}$ es un subespacio afín.

Chapter 2

Álgebra homológica

Este capítulo se centra en el *álgebra homológica*, una disciplina matemática de gran relevancia en la que se sientan las bases para el desarrollo de la teoría de la homología singular. Nos ocuparemos principalmente del estudio de los grupos de homología, los cuales son una herramienta esencial para examinar y clasificar espacios topológicos.

Abordaremos en este capítulo temas clásicos del álgebra homológica como R -módulos, sucesiones exactas y complejos de cadena. También presentaremos el *lema de la serpiente*, un resultado fundamental que proporciona una relación entre los grupos de homología de dos sucesiones exactas cortas conectadas. Además, se discutirá el teorema fundamental del álgebra homológica, que es crucial para entender la estructura y las propiedades de los grupos de homología.

La homología singular, aunque es un tema derivado del álgebra homológica, tiene su propia importancia debido a su capacidad para proporcionar una descripción detallada y matemáticamente rigurosa de los espacios topológicos. Sin embargo, es el álgebra homológica la que proporciona las herramientas y conceptos necesarios para desarrollar esta teoría.

Finalmente, se tratarán las homotopías entre complejos de cadenas, un concepto central dentro de esta temática que permite la comparación entre diferentes complejos de cadenas. Con el contenido de este capítulo, esperamos proporcionar una comprensión sólida del álgebra homológica y su papel en la teoría de la homología singular.

2.1 Módulos, homomorfismos y sucesiones exactas

En esta sección presentaremos los conceptos fundamentales de R -módulos, homomorfismos y sucesiones exactas. Estos son pilares esenciales en el estudio del álgebra y proporcionan las herramientas necesarias para explorar estructuras algebraicas más complejas.

En todo lo que sigue, R representa un anillo conmutativo con identidad multiplicativa.

Definición 2.1.1. Un grupo abeliano M es un R -módulo (a izquierda), si existe una operación externa $R \times M \rightarrow M$ (denotada $r \cdot m$), tal que para $r, r_1, r_2 \in R$ y $m, m_1, m_2 \in M$, se tiene

- $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$ y $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$,
- $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$ y $1 \cdot m = m$.

Una vez establecidas las propiedades clave de los R -módulos, introducimos el concepto de rN . Para un anillo R , un R -módulo M , y un elemento r en R , definimos rN como el conjunto de todos los productos de r y n , para cada n en N . Es decir, $rN = \{rn : n \in N\}$.

Con esta definición, podemos introducir el concepto de un R -submódulo.

Definición 2.1.2. Decimos que N es un R -submódulo del R -módulo M si N es un subgrupo de M tal que $rN \subset N$ para cada $r \in R$. Se puede entonces definir el R -módulo cociente de M por N , denotado M/N , donde la operación externa $R \times M/N \rightarrow M/N$ se define asociando a $(r, m + N)$ el elemento $r \cdot m + N$.

Después de entender cómo se define un R -submódulo y cómo se puede formar un R -módulo cociente, es natural preguntarse cómo podemos relacionar diferentes R -módulos. Una forma de hacerlo es a través de las funciones llamadas R -homomorfismos. Estas funciones preservan la estructura del R -módulo y nos permiten estudiar las propiedades de los R -módulos en un contexto más amplio. Veamos cómo se define un R -homomorfismo.

Definición 2.1.3. Una función $f : M \longrightarrow M'$ entre R -módulos es un **homomorfismo** de R módulos (también llamada **R -homomorfismo o aplicación R -lineal**), si para $r \in R$ y $m, m_1, m_2 \in M$, se tiene

- $f(r \cdot m) = r \cdot f(m)$,
- $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$.

Se puede verificar ([4, pp. 120]) que si $f : M \longrightarrow M'$ es un R -homomorfismo y N' es un R -submódulo de M' , entonces $f^{-1}(N')$ es un R -submódulo de M .

De lo anterior, se tiene que si $f : M \longrightarrow M'$ es una aplicación R -lineal, se tienen los R -submódulos $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) \subseteq M$ e $\text{Im}(f) = f(M) \subseteq M'$.

A continuación enunciamos el **primer teorema de isomorfismo para R -módulos**, el cual establece que si $\varphi : Q \rightarrow M$ es un homomorfismo de R -módulos, entonces $Q/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$, donde el cociente $Q/\text{Ker}(\varphi)$ representa el conjunto de todas las clases de equivalencia de elementos de Q bajo la relación de equivalencia definida por φ , es decir, dos elementos $q_1, q_2 \in Q$ están en la misma clase de equivalencia si y solo si $\varphi(q_1) = \varphi(q_2)$; en este contexto, una clase de equivalencia se denota comúnmente como $[q]$ o $q + \text{Ker}(\varphi)$, y a lo largo de este trabajo, utilizaremos la notación de suma o corchetes para denotar las clases laterales según convenga.

Ahora que hemos explorado los conceptos de R -submódulos y R -homomorfismos, podemos comenzar a explorar cómo se pueden combinar diferentes R -módulos para construir más R -módulos. Una forma de hacerlo es a través de la operación de producto. Veamos cómo se define esto.

Definición 2.1.4. Dada $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R -módulos, se define el **R -módulo producto** $\prod_{i \in I} M_i$, donde la suma de elementos del producto se define componente a componente y la multiplicación por un escalar se define de la misma manera. La **i -ésima proyección**, $p_i : \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow M_i$, definida por

$$p_i \left((m_i)_{i \in I} \right) = m_i$$

para todo $((m_i)_{i \in I}) \in \prod_{i \in I} M_i$, es un homomorfismo de R -módulos sobreyectivo.

Por ejemplo, si tenemos dos R -módulos M y N , y consideramos su producto $M \times N$, un elemento en $M \times N$ es un par ordenado (m, n) donde $m \in M$ y $n \in N$. Ahora, dados dos de estos elementos, digamos (m_1, n_1) y (m_2, n_2) , su “suma” en el R -módulo producto está definida por $(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$, donde las sumas en el lado derecho son las sumas en los R -módulos individuales M y N . De manera similar, la “multiplicación por un escalar” r en el anillo R está definida por $r \cdot (m, n) = (r \cdot m, r \cdot n)$, donde las multiplicaciones en el lado derecho son las multiplicaciones por escalares en los R -módulos individuales M y N .

El concepto de producto nos permite combinar R -módulos de una manera que preserva su estructura individual. Pero, ¿qué pasa si queremos combinar R -módulos de una manera que resulte en una nueva estructura? Para esto, podemos usar la operación de suma directa.

Definición 2.1.5. Dada $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R -módulos, se define su **suma directa** (externa) como sigue:

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \left\{ (m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i : m_i \in M_i, m_i = 0 \text{ para casi todo } i \right\}.$$

La frase “para casi todo i ” significa que $m_i = 0$ para todos excepto un número finito de índices i . La suma directa resulta ser un R -submódulo de $\prod_{i \in I} M_i$.

Para cada $k \in I$ puede definirse una aplicación R -lineal inyectiva $q_k : M_k \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$, que asocia a $m_k \in M_k$ el elemento cuyas coordenadas son todas nulas, salvo la k -ésima que es precisamente m_k .

Hasta ahora, hemos explorado cómo los R -módulos pueden interactuar entre sí a través de operaciones como el producto y la suma directa. Sin embargo, en álgebra homológica, a menudo estamos interesados en cómo los R -módulos se conectan en una sucesión o cadena. Esto nos lleva al concepto de una sucesión exacta de homomorfismos de R -módulos.

Definición 2.1.6. Sean M_1, M_2, M_3 tres R -módulos y $f : M_1 \rightarrow M_2, g : M_2 \rightarrow M_3$ R -homomorfismos. La sucesión

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

es **exacta** en M_2 si $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$. Si la sucesión

$$M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_p \longrightarrow M_{p+1}$$

es exacta en M_1, \dots, M_p , entonces decimos simplemente que la sucesión es **exacta**.

A continuación, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.1. La sucesión

$$0 \xrightarrow{f} P \xrightarrow{\phi} Q$$

es exacta (en P) si y solo si ϕ es inyectiva. En efecto, si la sucesión es exacta en P , entonces $\text{Im}(f) = \text{Ker}(\phi)$. Pero f es la función nula, así que $\text{Im}(f) = \{0\}$, lo que implica que $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$. Esto muestra que ϕ es inyectiva.

De forma recíproca, si ϕ es inyectiva, entonces $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$. De esto se sigue que $\text{Im}(f) = \{0\} = \text{Ker}(\phi)$ por lo que la sucesión es exacta en P .

Ejemplo 2.1.2. La sucesión

$$Q \xrightarrow{\varphi} P \xrightarrow{f} 0$$

es exacta (en P) si y solo si φ es sobreyectiva. Por un lado, si la sucesión es exacta en P , entonces $\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(f) = P$. Es decir, φ es sobreyectiva.

En forma recíproca, si φ es sobreyectiva, entonces $\text{Im}(\varphi) = P$ porque todos los elementos en P son imágenes de algún elemento en Q . Claramente la sucesión es exacta en P .

A una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

se le llama **sucesión exacta corta**. A las sucesiones exactas infinitas por alguno de los extremos se les llama **sucesiones exactas largas**.

Ejemplo 2.1.3. La sucesión

$$0 \xrightarrow{f} P \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{g} 0$$

es exacta (en P, Q, R) si y solo si α es inyectiva y β es sobreyectiva, además $\text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$. A esta sucesión se le llamará **sucesión exacta corta**.

Para probar esto, comencemos suponiendo que α es inyectiva, entonces $\text{Ker}(\alpha) = \{0\} = \text{Im}(f)$, así la sucesión es exacta en P . Dado que β es sobreyectiva, entonces $\text{Im}(\beta) = R = \text{Ker}(g)$, de donde se sigue que la sucesión es exacta en R . Finalmente, dado que $\text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$, entonces la sucesión también es exacta en Q .

Para el recíproco, supongamos que la sucesión es exacta en P . Entonces $\text{Im}(f) = \text{Ker}(\alpha)$, es decir, $\text{Ker}(\alpha) = \{0\}$. Esto significa que α es inyectiva. Si la sucesión es exacta en R , entonces $\text{Im}(\beta) = \text{Ker}(g) = R$, lo cual implica que β es sobreyectiva. Si la sucesión es exacta en Q , entonces $\text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$.

A las sucesiones exactas infinitas por alguno de los extremos se les llama **sucesiones exactas largas**.

2.2 Complejos de cadena y homología

Ahora abordaremos los conceptos de *complejos de cadenas* y la *homología* de un complejo de cadenas. Esta sección es crucial para entender cómo estas herramientas matemáticas revelan la estructura subyacente de los espacios topológicos.

A continuación, consideremos R un anillo conmutativo con unitario. Para efectos prácticos, se puede considerar $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Definición 2.2.1. Un **complejo de cadenas** es una sucesión de homomorfismos de R -módulos como sigue:

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \xrightarrow{\partial_{p-2}} \cdots$$

donde C_p , $p \in \mathbb{Z}$, es el p -ésimo R -módulo del complejo y se satisface la condición de que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Los elementos de C_p se dice que tiene dimensión p . Usamos la notación $(\mathcal{C}_*, \partial)$ para referirnos al complejo de cadenas anterior. A los homomorfismos ∂_i se le llama **operadores frontera**.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos la sucesión de módulos triviales $C_p = \{0\}$, para cada índice p , y homomorfismos nulos. Esto forma un complejo de cadenas llamado **complejo nulo**.

Con la definición complejo de cadenas, hemos establecido una estructura que nos permite conectar una serie de R -módulos a través de homomorfismos. Un aspecto clave de esta estructura es la condición $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$, que garantiza una cierta coherencia en la cadena. Pero, ¿qué significa realmente esta condición en términos de las imágenes y los núcleos de los homomorfismos en la cadena? La siguiente proposición nos proporciona una respuesta a esta pregunta.

Proposición 2.2.1. Sea $(\mathcal{C}_*, \partial)$ un complejo de cadenas. Para todo $p \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0 \text{ si y solo si } \text{Im}(\partial_{p+1}) \subset \text{Ker}(\partial_p)$$

Demostración. “ \Rightarrow ” Suponga que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Sea $y_0 \in \text{Im}(\partial_{p+1})$. Entonces existe $x_0 \in C_{p+1}$ tal que $\partial_{p+1}(x_0) = y_0$, y luego tenemos

$$\partial_p(y_0) = \partial_p(\partial_{p+1}(x_0)) = (\partial_p \circ \partial_{p+1})(x_0) = 0,$$

así que $y_0 \in \text{Ker}(\partial_p)$.

“ \Leftarrow ” Suponga que $\text{Im}(\partial_{p+1}) \subset \text{Ker}(\partial_p)$ y sea $c \in C_{p+1}$. Entonces $\partial_{p+1}(c) \in \text{Im}(\partial_{p+1}) \subset \text{Ker} \partial_p$, por lo que $\partial_{p+1}(c) \in \text{Ker} \partial_p$, es decir, $\partial_p(\partial_{p+1}(c)) = 0$. Se concluye que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. \square

Definimos a continuación los homomorfismos entre complejos de cadena.

Definición 2.2.2. Un homomorfismo de complejos de cadena $f : (\mathcal{C}_*, \partial) \rightarrow (\mathcal{C}'_*, \partial')$ es una sucesión de homomorfismos de R -módulos $f_p : C_p \rightarrow C'_p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$, tales que el siguiente diagrama es conmutativo para todo $p \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc}
C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \\
\downarrow f_p & \circlearrowleft & \downarrow f_{p-1} \\
C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1}
\end{array}$$

El esquema anterior induce el siguiente diagrama conmutativo en *forma de escalera infinita*:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_p & \longrightarrow & C_{p-1} & \longrightarrow & C_{p-2} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} & & \downarrow f_{p-2} & & \\
& & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & C'_p & \longrightarrow & C'_{p-1} & \longrightarrow & C'_{p-2} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Los homomorfismos entre complejos de cadenas permiten mapear un complejo de cadenas en otro, preservando la estructura del complejo. A continuación introducimos el concepto de un subcomplejo.

Definición 2.2.3. Un complejo (\mathcal{D}_*, δ) se dice que es un **subcomplejo** de $(\mathcal{C}_*, \partial)$ si $D_p \leq C_p$ y $\delta = \partial|_{D_p}$, para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Dadas las definiciones de un homomorfismo de complejos de cadena y un subcomplejo, podemos observar que un subcomplejo (\mathcal{D}_*, δ) de $(\mathcal{C}_*, \partial)$ induce naturalmente un homomorfismo de complejos de cadena. Esto se debe a que, para cada $p \in \mathbb{Z}$, la inclusión $i_p : D_p \rightarrow C_p$ es un homomorfismo de R -módulos. Además, estas inclusiones respetan las diferencias, es decir, $\partial \circ i_p = i_{p-1} \circ \delta$. Por lo tanto, la sucesión $\{i_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ define un homomorfismo de complejos de cadena de (\mathcal{D}_*, δ) a $(\mathcal{C}_*, \partial)$, al cual nos referiremos como la inclusión. Obtenemos así el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & D_p & \xrightarrow{\delta_p} & D_{p-1} & \xrightarrow{\delta_{p-1}} & D_{p-2} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & & \\
& & & & & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} & \xrightarrow{\partial_{p-1}} & C_{p-2} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

A continuación definimos el complejo de cadenas cociente asociado a un subcomplejo.

Definición 2.2.4. Sea (\mathcal{D}_*, δ) un subcomplejo de $(\mathcal{C}_*, \partial)$. Se define el complejo cociente

$$(\mathcal{C}_*, \partial)/(\mathcal{D}_*, \delta) = (\mathcal{C}_*/\mathcal{D}_*, \partial^*),$$

donde $\partial_p^* : C_p/D_p \rightarrow C_{p-1}/D_{p-1}$ está definido mediante

$$\partial_p^*[c] = [\partial_p(c)],$$

para todo $c \in D_p$, $p \in \mathbb{Z}$. De manera equivalente $\partial_p^*(c + D_p) = \partial_p(c) + D_{p-1}$, utilizando la notación aditiva para clases laterales. A este complejo se le conoce como **complejo de cadenas cociente** de \mathcal{C}_* módulo \mathcal{D}_* .

La definición anterior nos lleva naturalmente al diagrama siguiente:

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}/D_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}^*} C_p/D_p \xrightarrow{\partial_p^*} C_{p-1}/D_{p-1} \longrightarrow \cdots, \quad \dagger$$

Además, nos preguntamos si este es un complejo de cadenas. En efecto, sea $[c] \in C_{p+1}/D_{p+1}$. Al aplicar ∂_{p+1}^* a $[c]$ resulta

$$\partial_{p+1}^*([c]) = [\partial_{p+1}(c)] \in C_p/D_p$$

Aplicamos ahora el operador frontera ∂_p^* y se tiene

$$\partial_p^*([\partial_{p+1}(c)]) = [\partial_p(\partial_{p+1}(c))] = [0],$$

lo cual se sigue dado que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Hemos demostrado así que la composición de dos operadores frontera consecutivos es cero, por tanto (\dagger) es un complejo de cadenas.

Este concepto nos permite estudiar cómo se puede “reducir” un complejo eliminando un subcomplejo. Ahora, introducimos los concepto de ciclos, fronteras y la homología.

Definición 2.2.5. Consideremos un complejo de cadenas $(\mathcal{C}_*, \partial)$.

- i) A los elementos de C_p se les llama **cadena**s de dimensión p .
- ii) A los elementos de $\text{Ker}(\partial_p)$ se les llama **ciclos** de dimensión p , y se usa la notación $Z_p = \text{Ker}(\partial_p)$.
- iii) A los elementos de $\text{Im}(\partial_{p+1})$ se les llama **fronteras** de dimensión p , y se utiliza la notación $F_p = \text{Im}(\partial_{p+1})$.

El p -ésimo **grupo de homología** del complejo de cadenas \mathcal{C}_* se define entonces como el cociente

$$H_p(\mathcal{C}_*) = Z_p/F_p.$$

para $p \in \mathbb{Z}$. Diremos que dos ciclos $c, c' \in Z_p$ son **homólogos** si $[c] = [c'] \in H_p(\mathcal{C}_*)$, en otras palabras, c y c' son homólogos si y solo si la diferencia de $c - c'$ vive en F_p .

El grupo de homología nos proporciona una forma poderosa de estudiar la estructura interna de un complejo y es fundamental para muchos resultados en álgebra homológica.

Observación 1. El cociente entre un R -módulo y un submódulo siempre es posible. Gracias a la Proposición 2.2.1, podemos garantizar que $F_p \subseteq Z_p$, para todo p . Por tanto es válido considerar el cociente que define al p -ésimo grupo de homología.

Habiendo establecido las definiciones fundamentales de cadenas, ciclos y fronteras, ahora nos movemos hacia una proposición importante que relaciona estas entidades a través de un homomorfismo. Esta proposición nos permitirá entender cómo los homomorfismos interactúan con los ciclos y las fronteras en los complejos de cadenas.

Proposición 2.2.2. Si $f : (\mathcal{C}_*, \partial) \rightarrow (\mathcal{C}'_*, \partial')$ es un homomorfismo, entonces

- i) $f_p(Z_p) \subseteq Z'_p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$,

ii) $f_p(F_p) \subseteq F'_p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, se tiene una función inducida

$$\begin{aligned} \bar{f}_p : H_p(\mathcal{C}_*) &\rightarrow H_p(\mathcal{C}'_*) \\ [c] &\mapsto [f_p(c)] \end{aligned}$$

Demostración. i) Veamos que $f_p(Z_p) \subseteq Z'_p$. Por definición, $Z_p = \text{Ker}(\partial_p)$ y $Z'_p = \text{Ker}(\partial'_p)$. Si $z \in Z_p$, entonces $\partial_p(z) = 0$. Como f es un homomorfismo de complejos de cadenas, tenemos que $\partial'_p(f_p(z)) = f_{p-1}(\partial_p(z)) = f_{p-1}(0) = 0$. Por lo tanto, $f_p(z) \in Z'_p$.

ii) Ahora mostremos que $f_p(F_p) \subseteq F'_p$. Por definición, $F_p = \text{Im}(\partial_{p+1})$ y $F'_p = \text{Im}(\partial'_{p+1})$. Si $b \in F_p$, entonces existe un $c \in C_{p+1}$ tal que $\partial_{p+1}(c) = b$. Como f es un homomorfismo de complejos de cadenas, tenemos que $\partial'_{p+1}(f_{p+1}(c)) = f_p(\partial_{p+1}(c)) = f_p(b)$. Por lo tanto, $f_p(b) \in F'_p$.

Finalmente, mostremos que la función inducida $\bar{f}_p : H_p(\mathcal{C}_*) \rightarrow H_p(\mathcal{C}'_*)$ está bien definida. En efecto, por definición, $H_p(\mathcal{C}_*) = Z_p/F_p$ y $H_p(\mathcal{C}'_*) = Z'_p/F'_p$. Si $[c] \in H_p(\mathcal{C}_*)$, entonces necesitamos mostrar que $\bar{f}_p([c]) = [f_p(c)]$ está bien definida. Esto significa que si $[c] = [c']$, entonces $\bar{f}_p([c]) = \bar{f}_p([c'])$. Pero si $[c] = [c']$, entonces $c - c' \in F_p$, y como hemos demostrado que $f_p(F_p) \subseteq F'_p$, tenemos que $f_p(c - c') \in F'_p$, lo que significa que $[f_p(c)] - [f_p(c')] = [f_p(c - c')] = [0]$, por lo tanto $\bar{f}_p([c]) = \bar{f}_p([c'])$ en $H_p(\mathcal{C}'_*)$. \square

La proposición anterior muestra cómo un homomorfismo entre complejos de cadenas induce un homomorfismo entre los respectivos grupos de homología. Esto es fundamental, ya que nos permite “trasladar” la estructura de un complejo a otro a través de sus grupos de homología. Pero, ¿qué pasa si tenemos dos homomorfismos y queremos componerlos? La siguiente proposición nos muestra cómo se comportan los homomorfismos inducidos en tal caso.

Proposición 2.2.3. Sean $f : (\mathcal{C}_*, \partial) \rightarrow (\mathcal{C}'_*, \partial')$ y $g : (\mathcal{C}'_*, \partial') \rightarrow (\mathcal{C}''_*, \partial'')$ homomorfismos. Entonces

- $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$;
- $\overline{\text{Id}_{\mathcal{C}_p}} = \text{Id}_{H_p(\mathcal{C}_*)}$.

Demostración. i) Mostremos que $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$. Para probar esto, necesitamos mostrar que para cada clase de equivalencia $[c] \in H_p(\mathcal{C}_*)$, tenemos que $\overline{g \circ f}([c]) = \bar{g}(\bar{f}([c]))$. Comenzamos con el lado izquierdo de la ecuación. Por definición de la función inducida, tenemos que $\overline{g \circ f}([c]) = [g \circ f(c)]$. Para el lado derecho tenemos primero que $\bar{f}([c]) = [f(c)]$, y luego aplicamos \bar{g} a este resultado para obtener $\bar{g}(\bar{f}([c])) = \bar{g}([f(c)]) = [g(f(c))] = [g \circ f(c)]$.

ii) Sea $[c] \in H_p(\mathcal{C}_*)$, donde $c \in Z_p$ es un ciclo en \mathcal{C}_* .

Por la definición de la función inducida, tenemos:

$$\overline{\text{Id}_{\mathcal{C}_p}}([c]) = [\text{Id}_{\mathcal{C}_p}(c)] = [c] = \text{Id}_{H_p(\mathcal{C}_*)}([c])$$

Por lo tanto, $\overline{\text{Id}_{\mathcal{C}_p}} = \text{Id}_{H_p(\mathcal{C}_*)}$. □

2.3 El lema de la serpiente y el teorema fundamental del álgebra homológica

En esta sección mostraremos dos resultados fundamentales del álgebra homológica: el lema de la serpiente y el teorema fundamental del álgebra homológica. Utilizaremos el lema de la serpiente para demostrar el teorema fundamental, siendo este último una piedra angular en este campo. Este teorema será la clave para desbloquear cálculos en los grupos de homología más adelante en nuestro estudio.

Lema 2.3.1. (Lema de la serpiente) Suponga que en el siguiente diagrama las filas son sucesiones exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\varphi'} & Z'_3 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & & \\
 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3
 \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo $\delta_* : \text{Ker}(\partial_3) \rightarrow Z_1/\text{Im}(\partial_1)$ tal que la siguiente sucesión es exacta

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(\partial_1) & \xrightarrow{\phi''} & \text{Ker}(\partial_2) & \xrightarrow{\psi''} & \text{Ker}(\partial_3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z_1/\text{Im}(\partial_1) & \xrightarrow{\bar{\phi}} & Z_2/\text{Im}(\partial_2) & \xrightarrow{\bar{\psi}} & Z_3/\text{Im}(\partial_3) \end{array}$$

δ_*

donde ϕ'' y ψ'' son las restricciones de ϕ' y ψ' en $\text{Ker}(\partial_1)$ y $\text{Ker}(\partial_2)$ respectivamente. Además $\bar{\phi}$ y $\bar{\psi}$ son los homomorfismos inducidos por ϕ y ψ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x + \text{Im}(\partial_1)) &:= \phi(x) + \text{Im}(\partial_2), \\ \bar{\psi}(x + \text{Im}(\partial_2)) &:= \psi(x) + \text{Im}(\partial_3). \end{aligned}$$

Demostración. Para tener una mejor idea de la prueba, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker}(\partial_1) & \xrightarrow{\phi''} & \text{Ker}(\partial_2) & \xrightarrow{\psi''} & \text{Ker}(\partial_3) & \xrightarrow{\delta_*} & Z_1/\text{Im}(\partial_1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Z_1/\text{Im}(\partial_1) & \xrightarrow{\bar{\phi}} & Z_2/\text{Im}(\partial_2) & \xrightarrow{\bar{\psi}} & Z_3/\text{Im}(\partial_3) \end{array}$$

Como vemos, la “serpiente” está dada por la sucesión señalada con la flecha roja. Demostraremos este lema en tres etapas, como sigue:

Etapla 1: Mostremos que $\phi''(\text{Ker}(\partial_1)) \subseteq \text{Ker}(\partial_2)$. En efecto, sea $y \in \phi''(\text{Ker}(\partial_1))$, luego existe $x \in \text{Ker}(\partial_1)$ tal que $y = \phi''(x)$. Dado que $x \in \text{Ker}(\partial_1)$, se tiene que $\partial_1(x) = 0$. Por otro lado $\partial_2(y) = \partial_2(\phi''(x)) = \phi(\partial_1(x)) = 0$. Por tanto, $y \in \text{Ker}(\partial_2)$. De manera análoga se verifica que $\psi''(\text{Ker}(\partial_2)) \subseteq \text{Ker}(\partial_3)$.

Ahora veamos que $\bar{\phi}$ está bien definida. Cuando definimos $\bar{\phi}$ en una clase de equivalencia, elegimos un representante z de la clase y definimos $\bar{\phi}([z]) = [\phi(z)]$.

Pero necesitamos asegurarnos que esta definición no dependa de la elección del representante. Es decir, si z' es otro representante de la misma clase de equivalencia, entonces necesitamos que $[\phi(z)] = [\phi(z')]$ en $Z_2/\text{Im}(\partial_2)$.

Dado que z y z' están en la misma clase de equivalencia en $Z_1/\text{Im}(\partial_1)$, estas clases difieren por un elemento de $\text{Im}(\partial_1)$, es decir, existe un ciclo c tal que $z' = z + \partial_1(c)$. Basta ver que $\phi(\text{Im}(\partial_1)) \subseteq \text{Im}(\partial_2)$. En efecto, sea $x \in \text{Im}(\partial_1)$. Entonces existe $y \in Z'_1$ tal que $x = \partial_1(y)$. Luego

$$\phi(x) = \phi(\partial_1(y)) = \partial_2(\phi'(y)) \in \text{Im}(\partial_2).$$

Esto muestra que $\bar{\phi}$ está bien definida y de manera análoga se verifica que $\bar{\psi}$ está bien definida.

Mostremos que la sucesión es exacta en $\text{Ker}(\partial_2)$, es decir, mostremos que $\text{Im}(\phi'') = \text{Ker}(\psi'')$. Claramente $\psi'' \circ \phi'' = 0$, dado que son las restricciones de ψ' y ϕ' en $\text{Ker}(\partial_1)$ y $\text{Ker}(\partial_2)$ respectivamente y sus composiciones ya son cero. Por tanto $\text{Im}(\phi'') \subseteq \text{Ker}(\psi'')$.

Mostremos ahora la contención contraria. Sea $x \in \text{Ker}(\psi'')$. Entonces

$$\psi''(x) = \psi'(x) = 0$$

Así, $x \in \text{Ker}(\psi') = \text{Im}(\phi')$ por exactitud en Z'_2 . Luego, existe $c_1 \in Z'_1$ tal que $\phi'(c_1) = x$, pero $\phi(\partial_1(c_1)) \stackrel{\circ}{=} \partial_2(\phi'(c_1)) = \partial_2(x) = 0$, y por tanto $\phi(\partial_1(c_1)) = 0$. Dado que ϕ es un homomorfismo inyectivo, se tiene que $\partial_1(c_1) = 0$, esto es, $c_1 \in \text{Ker}(\partial_1)$. Entonces $\phi''(c_1) = \phi'(c_1) = x$, y por tanto $x \in \text{Im}(\phi'')$. Concluimos que la sucesión es exacta en $\text{Ker}(\partial_2)$.

Ahora, veamos la exactitud en $Z_2/\text{Im}(\partial_2)$, para ello debemos probar que $\text{Im}(\bar{\phi}) = \text{Ker}(\bar{\psi})$.

Primero, note que si $[z] \in Z_1/\text{Im}(\partial_1)$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \circ \bar{\phi}([z]) &= \bar{\psi}(\phi(x) + \text{Im}(\partial_2)) \\ &= \psi(\phi(x)) + \text{Im}(\partial_3) \\ &= 0 + \text{Im}(\partial_3) \\ &= [0]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por Proposición 2.2.1, tenemos que $\text{Im}(\bar{\phi}) \subseteq \text{Ker}(\bar{\psi})$.

Probemos ahora que $\text{Ker}(\bar{\psi}) \subseteq \text{Im}(\bar{\phi})$. En efecto, sea $x + \text{Im}(\partial_2) \in \text{Ker}(\bar{\psi})$, entonces

$$\psi(x) + \text{Im}(\partial_3) = \bar{\psi}(x + \text{Im}(\partial_2)) = 0.$$

Se sigue que $\psi(x) \in \text{Im}(\partial_3)$. Por definición de imagen, existe $c'_3 \in Z'_3$ tal que $\partial_3(c'_3) = \psi(x)$, y por la sobreyectividad de ψ' existe $c'_2 \in Z'_2$ tal que $\psi'(c'_2) = c'_3$. Es claro que $x + \text{Im}(\partial_2) = x - \partial_2(c'_2) + \text{Im}(\partial_2)$, dado que $\partial_2(c'_2) \in \text{Im}(\partial_2)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \psi(x - \partial_2(c'_2)) &= \psi(x) - \psi(\partial_2(c'_2)) \\ &\stackrel{\circ}{=} \psi(x) - \partial_3(\psi'(c'_2)) \\ &= \psi(x) - \partial_3(c'_3) \\ &= \psi(x) - \psi(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así, $x - \partial_2(c'_2) \in \text{Ker}(\psi) = \text{Im}(\phi)$ por exactitud, y luego existe $c_1 \in Z_1$ tal que $\phi(c_1) = x - \partial_2(c'_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(c_1 + \text{Im}(\partial_1)) &= \phi(x) + \text{Im}(\partial_2) \\ &= x - \partial_2(c'_2) + \text{Im}(\partial_2) \\ &= x + \text{Im}(\partial_2). \end{aligned}$$

En conclusión, $x + \text{Im}(\partial_2) \in \text{Im}(\bar{\phi})$. Hemos demostrado que la sucesión es exacta en $Z_2/\text{Im}(\partial_2)$.

Etapa 2: Definamos el homomorfismo δ_* . Sea $c'_3 \in \text{Ker}(\partial_3)$, entonces, por la sobreyectividad de ψ' existe $c'_2 \in Z'_2$ tal que $\psi'(c'_2) = c'_3$, luego $c'_2 \in (\psi')^{-1}(c'_3)$, aquí usamos la notación $(\psi')^{-1}$ para indicar un elemento cualquiera de la imagen inversa de c'_3 bajo ψ' ; no quiere decir que ψ' sea invertible), ahora tomemos la imagen de c'_2 bajo ∂_2 y verifiquemos que está en el kernel de ψ , para encontrar un c_1 tal que $\phi(c_1) = \partial_2(c'_2)$. Veamos esto como sigue:

$$\psi(\partial_2(c'_2)) \stackrel{\circ}{=} \partial_3(\psi'(c'_2)) = \partial_3(c'_3) = 0.$$

Por tanto $\partial_2(c'_2) \in \text{Ker } \psi$, y dado que ϕ es inyectiva por el Ejemplo 2.1.1, existe un único $c_1 \in Z_1$ tal que

$$\phi(c_1) = \partial_2(c'_2).$$

Entonces se tienen las siguientes cuentas:

$$c_1 = \phi^{-1}(\partial_2(c'_2)) = \phi^{-1}(\partial_2((\psi')^{-1}(c'_3))) = (\phi^{-1} \circ \partial_2 \circ (\psi')^{-1})(c'_3).$$

Por tanto definimos $\delta_* : \text{Ker}(\partial_3) \rightarrow Z_1 / \text{Im}(\partial_1)$ como sigue:

$$\boxed{\delta_*(x) = (\phi^{-1} \circ \partial_2 \circ (\psi')^{-1})(x) + \text{Im}(\partial_1)}$$

Es necesario verificar que δ_* está bien definida puesto que por la sobreyectividad de ψ' escogimos un $c'_2 \in Z_2$, por tanto, veamos que esta elección no genera ningún problema.

Sea $c''_2 \in (\psi')^{-1}(c'_3)$, entonces $c'_2 - c''_2 \in \text{Ker}(\psi') = \text{Im}(\phi')$ por exactitud, luego $\partial_2(c'_2) - \partial_2(c''_2) \in \partial_2(\text{Im}(\phi')) \stackrel{\circ}{=} \phi(\partial_1(Z'_1))$.

Por tanto, la preimagen de $\partial_2(c'_2) - \partial_2(c''_2)$ en Z_1 vive en $\text{Im}(\partial_1)$, así que $\delta_*(c'_2) = \delta_*(c''_2)$ y se sigue que esta función está bien definida.

Etapá 3: Una vez definimos el homomorfismo de conexión δ_* mostremos exactitud en $\text{Ker}(\partial_3)$ y $Z_1 / \text{Im}(\partial_1)$ como sigue.

Para mostrar exactitud en $\text{Ker}(\partial_3)$, por definición, mostremos que $\text{Im}(\psi'') = \text{Ker}(\delta_*)$.

i) Mostremos que $\text{Im}(\psi'') \subseteq \text{Ker}(\delta_*)$, o de manera equivalente, que $\delta_* \circ \psi'' = 0$. Sea $x \in \text{Ker}(\partial_2)$, entonces:

$$\begin{aligned} \delta_*(\psi''(x)) &= (\phi^{-1} \circ \partial_2 \circ (\psi')^{-1})(\psi''(x)) + \text{Im}(\partial_1) \\ &= \phi^{-1}(\partial_2(x)) + \text{Im}(\partial_1) \\ &= \phi^{-1}(0) + \text{Im}(\partial_1) \\ &= 0 + \text{Im}(\partial_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ii) Mostremos ahora que $\text{Ker}(\delta_*) \subseteq \text{Im}(\psi'')$. Sea $x \in \text{Ker}(\delta_*)$, entonces

$$\delta_*(x) = 0$$

$$\phi^{-1} \circ \partial_2 \circ (\psi')^{-1}(x) + \text{Im}(\partial_1) = 0 + \text{Im}(\partial_1).$$

Por tanto $\phi^{-1} \circ \partial_2 \circ (\psi')^{-1}(x) \in \text{Im}(\partial_1)$. Entonces existe $c'_1 \in Z'_1$, tal que $\partial_1(c'_1) = \phi^{-1} \circ \partial_2 \circ (\psi')^{-1}(x)$. Luego

$$\phi(\partial_1(c'_1)) = \phi(\phi^{-1} \circ \partial_2 \circ (\psi')^{-1}(x)) = \partial_2((\psi')^{-1}(x)).$$

Pero $\phi(\partial_1(c'_1)) \stackrel{\circ}{=} \partial_2(\phi'(c'_1))$, por lo que se sigue que $(\psi')^{-1}(x) - \phi'(c'_1) \in \text{Ker}(\partial_2)$, luego:

$$\psi''((\psi')^{-1}(x) - \phi'(c'_1)) = \psi''((\psi')^{-1}(x)) - \psi''(\phi'(c'_1)) = x.$$

Por tanto $x \in \text{Im}(\psi'')$.

Ahora mostremos exactitud en $Z_1/\text{Im}(\partial_1)$, es decir, veamos que $\text{Im}(\delta_*) = \text{Ker}(\bar{\phi})$.

i) Mostremos que $\text{Im}(\delta_*) \subseteq \text{Ker}(\bar{\phi})$, para ello, comprobemos que $\bar{\phi} \circ \delta_* = 0$. En efecto, sea $x \in \text{Ker}(\partial_3)$, entonces $\delta_*(x) = (\phi^{-1} \circ \partial_2 \circ (\psi')^{-1})(x) + \text{Im}(\partial_1)$, luego

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\delta_*(x)) &= \bar{\phi}(\phi^{-1} \circ \partial_2 \circ (\psi')^{-1}(x) + \text{Im}(\partial_1)) \\ &= \phi(\phi^{-1} \circ \partial_2 \circ (\psi')^{-1}(x)) + \text{Im}(\partial_2) \\ &= \partial_2 \circ (\psi')^{-1}(x) + \text{Im}(\partial_2) \\ &= \partial_2(\psi')^{-1}(x) + \text{Im}(\partial_2) \\ &\stackrel{\circ}{=} \psi^{-1}(\partial_3(x)) + \text{Im}(\partial_2) \\ &= \psi^{-1}(0) + \text{Im}(\partial_2) \\ &= 0 + \text{Im}(\partial_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ii) Mostremos que $\text{Ker}(\bar{\phi}) \subseteq \text{Im}(\delta_*)$. Si $x + \text{Im}(\partial_1) \in \text{Ker}(\bar{\phi})$, entonces $\bar{\phi}(x + \text{Im}(\partial_1)) = \phi(x) + \text{Im}(\partial_2) = 0$, por lo que $\phi(x) \in \text{Im}(\partial_2)$. Luego existe $c'_2 \in Z'_2$ tal que $\partial_2(c'_2) = \phi(x)$, así

$$\psi(\partial_2(c'_2)) \stackrel{\circ}{=} \partial_3(\psi'(c'_2)) = \psi(\phi(x)) = 0.$$

Por tanto $\psi'(c'_2) \in \text{Ker}(\partial_3)$. Aplicando δ_* , se tiene que

$$\begin{aligned}
 \delta_*(\psi'(c'_2)) &= (\phi^{-1} \circ \partial_2 \circ (\psi')^{-1})(\psi'(c'_2)) + \text{Im}(\partial_1) \\
 &= \phi^{-1} \circ \partial_2(c'_2) + \text{Im}(\partial_1) \\
 &= \phi^{-1}(\partial_2(c'_2)) + \text{Im}(\partial_1) \\
 &= \phi^{-1}(\phi(x)) + \text{Im}(\partial_1) \\
 &= x + \text{Im}(\partial_1).
 \end{aligned}$$

Por tanto $x + \text{Im}(\partial_1) \in \text{Im}(\delta_*)$ lo que finaliza la prueba. \square

El lema de la serpiente nos proporciona una herramienta poderosa para estudiar las relaciones entre los grupos de homología de diferentes complejos de cadenas. Sin embargo, a veces queremos entender la estructura interna de un solo complejo de cadenas. Para esto, introducimos el concepto de exactitud de una sucesión de complejos de cadenas.

Definición 2.3.1. Decimos que una sucesión de complejos de cadena

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{C}_* \xrightarrow{f} \mathcal{D}_* \xrightarrow{g} \mathcal{E}_* \longrightarrow \cdots$$

es **exacta en \mathcal{D}_*** si en dimensión p

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} D_p \xrightarrow{g_p} E_p \longrightarrow \cdots$$

es exacta en D_p para todo $p \in \mathbb{Z}$. La sucesión inicial se dice que es exacta, si es exacta en todo complejo de la sucesión.

La definición de exactitud en un complejo de cadenas nos proporciona una forma de entender cómo los R -módulos individuales en un complejo están conectados entre sí. Sin embargo, a veces queremos entender cómo una función individual en un complejo puede influir en la estructura global del complejo. Para esto, consideremos el siguiente lema.

Lema 2.3.2. Sea $(\mathcal{C}_*, \partial)$ un complejo de cadenas. Se tiene que el operador frontetra $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ induce una función $\tilde{\partial}_n : C_n / \text{Im}(\partial_{n+1}) \rightarrow \ker(\partial_{n-1})$ de la siguiente manera. Dado un elemento $x + \text{Im}(\partial_{n+1})$ en $C_n / \text{Im}(\partial_{n+1})$, la función $\tilde{\partial}_n$ mapea este elemento a $\partial_n(x)$ en $\ker(\partial_{n-1})$. Además, se cumple lo siguiente:

$$\ker(\tilde{\partial}_n) = H_n(\mathcal{C}_*) \quad \text{y} \quad \ker(\partial_{n-1}) / \text{Im}(\tilde{\partial}_n) = H_{n-1}(\mathcal{C}_*).$$

Demostración. Dado que $\text{im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$ y $\text{im}(\partial_n) \subseteq \ker(\partial_{n-1})$, el operador frontera ∂_n induce un mapa $\tilde{\partial}_n$ de la siguiente manera:

$$C_n / \text{im}(\partial_{n+1}) \rightarrow C_n / \ker(\partial_n) \cong \text{im}(\partial_n) \subseteq \ker(\partial_{n-1}).$$

Note que la función $\tilde{\partial}_n$ está bien definida porque para cualesquiera dos representantes de $x + \text{Im}(\partial_{n+1}) = y + \text{Im}(\partial_{n+1})$ en $C_n / \text{Im}(\partial_{n+1})$, esto es $x - y \in \text{Im}(\partial_{n+1})$, es decir, existe $z \in C_{n+1}$ tal que $\partial_{n+1}(z) = x - y$. Además, se tiene que :

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_n(x + \text{Im}(\partial_{n+1})) &= \partial_n(x) - \partial_n(y) + \partial_n(y) \\ &= \partial_n(x - y) + \partial_n(y) \\ &= \partial_n(\partial_{n+1}(z)) + \partial_n(y) \\ &= \partial_n(y) \\ &= \tilde{\partial}_n(y + \text{Im}(\partial_{n+1})). \end{aligned}$$

Dado que Lo anterior se sigue del hecho que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ por la propiedad de los complejos de cadena. Por lo tanto, la función inducida $\tilde{\partial}_n$ está bien definida.

Se calcula fácilmente que $\ker(\tilde{\partial}_n) = \ker(\partial_n) / \text{im}(\partial_{n+1}) = H_n(\mathcal{C}_*)$ y $\ker(\partial_{n-1}) / \text{im}(\partial_n) = H_{n-1}(\mathcal{C}_*)$. □

Ahora que hemos explorado cómo los homomorfismos entre complejos de cadenas pueden inducir homomorfismos en sus respectivos grupos de homología, podemos preguntarnos qué sucede cuando tenemos una sucesión exacta de complejos de cadenas. Esto nos lleva al teorema fundamental del álgebra homológica.

Teorema 2.3.1. Si $0 \longrightarrow \mathcal{A}_* \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}_* \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}_* \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p} : H_p(\mathcal{C}_*) \rightarrow H_{p-1}(\mathcal{A}_*)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(\mathcal{A}_*) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(\mathcal{B}_*) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(\mathcal{C}_*) \xrightarrow{\bar{\delta}_{*p}} H_{p-1}(\mathcal{A}_*) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

Demostración. Suponga que la sucesión de complejos de cadena

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_* \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}_* \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}_* \longrightarrow 0$$

Figura 2.1

es exacta. Dado que $\mathcal{A}_*, \mathcal{B}_*$ y \mathcal{C}_* son complejos de cadena, podemos expandir la anterior sucesión como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{\phi_{p+1}} & B_{p+1} & \xrightarrow{\psi_{p+1}} & C_{p+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_{p+1} & & \downarrow \partial'_{p+1} & & \downarrow \partial''_{p+1} \\
 0 & \longrightarrow & A_p & \xrightarrow{\phi_p} & B_p & \xrightarrow{\psi_p} & C_p \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial'_p & & \downarrow \partial''_p \\
 0 & \longrightarrow & A_{p-1} & \xrightarrow{\phi_{p-1}} & B_{p-1} & \xrightarrow{\psi_{p-1}} & C_{p-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_{p-1} & & \downarrow \partial'_{p-1} & & \downarrow \partial''_{p-1} \\
 0 & \longrightarrow & A_{p-2} & \xrightarrow{\phi_{p-2}} & B_{p-2} & \xrightarrow{\psi_{p-2}} & C_{p-2} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Figura 2.2

Por la exactitud en la Figura 2.1, se sigue que el cada cuadro de la Figura 2.2 es conmutativo. Aplicando el Lema 2.3.2, dado que se tienen funciones

$$\partial_p : A_p \rightarrow A_{p-1}; \partial'_p : B_p \rightarrow B_{p-1}; \partial''_p : C_p \rightarrow C_{p-1},$$

entonces se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A_p / \text{Im}(\partial_{p+1}) & \xrightarrow{\overline{\phi_p}} & B_p / \text{Im}(\partial'_{p+1}) & \xrightarrow{\overline{\psi_p}} & C_p / \text{Im}(\partial''_{p+1}) \\ \downarrow \tilde{\delta}_p & & \downarrow \tilde{\delta}'_p & & \downarrow \tilde{\delta}''_p \\ \text{Ker}(\partial_{p-1}) & \xrightarrow{\phi'_{p-1}} & \text{Ker}(\partial'_{p-1}) & \xrightarrow{\psi'_{p-1}} & \text{Ker}(\partial''_{p-1}) \end{array}$$

donde ϕ'_{p-1}, ψ'_{p-1} son las restricciones de ϕ_{p-1} y ψ_{p-1} respectivamente, además, $\overline{\phi_p}, \overline{\psi_p}$ son los homomorfismos inducidos por ϕ_p y ψ_p respectivamente.

Mostremos que $\overline{\psi_p}$ es sobreyectiva. En efecto, sea $[y] \in C_p / \text{Im}(\partial''_{p+1})$, así que y es una clase de equivalencia de la forma $c + \text{Im}(\partial''_{p+1})$ para algún $c \in C_p$. Dado que ψ_p es sobreyectiva, existe un elemento $b \in B_p$ tal que $\psi_p(b) = c$. Considere el elemento $x = b + \text{Im}(\partial'_{p+1})$ en el dominio de $\overline{\psi_p}$. Luego

$$\overline{\psi_p}(x) = \overline{\psi_p}(b + \text{Im}(\partial'_{p+1})) = \psi_p(b) + \text{Im}(\partial''_{p+1}) = c + \text{Im}(\partial''_{p+1}) = y$$

Por lo tanto, para cada elemento y en el codominio, hemos encontrado un elemento x en el dominio tal que $\overline{\psi_p}(x) = y$, lo que demuestra que $\overline{\psi_p}$ es sobreyectiva.

Ahora, mostremos que ϕ'_{p-1} es inyectiva. Para demostrar que la función ϕ'_{p-1} es inyectiva, sean $a, b \in \text{Ker}(\partial_{p-1})$ tal que $\phi'_{p-1}(a) = \phi'_{p-1}(b)$, esto significa que $\phi_{p-1}(a) = \phi_{p-1}(b)$, ya que ϕ'_{p-1} es la restricción de ϕ_{p-1} . Dado que ϕ_{p-1} es inyectiva, si $\phi_{p-1}(a) = \phi_{p-1}(b)$, entonces $a = b$. Por lo tanto ϕ'_{p-1} es inyectiva.

Dado que ϕ'_{p-1} es inyectiva y $\overline{\psi_p}$ es sobreyectiva, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}_p / \text{Im}(\partial_{p+1}) & \xrightarrow{\overline{\phi_p}} & \mathcal{B}_p / \text{Im}(\partial'_{p+1}) & \xrightarrow{\overline{\psi_p}} & \mathcal{C}_p / \text{Im}(\partial''_{p+1}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \tilde{\delta}_p & & \downarrow \tilde{\delta}'_p & & \downarrow \tilde{\delta}''_p & & \\ 0 \longrightarrow & \text{Ker}(\partial_{p-1}) & \xrightarrow{\phi'_{p-1}} & \text{Ker}(\partial'_{p-1}) & \xrightarrow{\psi'_{p-1}} & \text{Ker}(\partial''_{p-1}) & \end{array}$$

Figura 2.3

Ahora, veamos que el anterior diagrama es conmutativo, es decir, mostremos que $\tilde{\partial}'_p \circ \overline{\phi}_p = \phi'_{p-1} \circ \tilde{\partial}_p$ y además que $\tilde{\partial}''_p \circ \overline{\psi}_p = \psi'_{p-1} \circ \tilde{\partial}'_p$.

i) Mostremos que $\tilde{\partial}'_p \circ \overline{\phi}_p = \phi'_{p-1} \circ \tilde{\partial}_p$. Elijamos un elemento arbitrario $x + \text{Im } \partial_{p+1} \in \mathcal{A}_p / \text{Im } \partial_{p+1}$. Debido a la conmutatividad de la Figura 2.2 se tiene que $\partial'_p \circ \phi_p = \phi_{p-1} \circ \partial_p$, dado que la función ϕ'_{p-1} es una restricción de la función ϕ_{p-1} , se obtiene la igualdad $\partial'_p \circ \phi_p = \phi'_{p-1} \circ \partial_p$. Luego

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}'_p(\overline{\phi}_p(x + \text{Im } \partial_{p+1})) &= \tilde{\partial}'_p(\phi_p(x) + \text{Im } \partial'_{p+1}) \\ &= \partial'_p(\phi_p(x)) \\ &= \phi'_{p-1}(\partial_p(x)) \\ &= \phi'_{p-1}(\tilde{\partial}_p(x + \text{Im } \partial_{p+1})). \end{aligned}$$

Lo cual finaliza esta parte de la prueba.

ii) Mostremos ahora que $\tilde{\partial}''_p \circ \overline{\psi}_p = \psi'_{p-1} \circ \tilde{\partial}'_p$. Para ello, tomamos un elemento arbitrario $y + \text{Im } \partial'_{p+1} \in \mathcal{B}_p / \text{Im } \partial'_{p+1}$. Por la conmutatividad de la Figura 2.2 se tiene que $\partial''_p(\psi_p(y)) = \psi_{p-1}(\partial'_p(y))$. Dado que la función ψ'_{p-1} es una restricción de la función ψ_{p-1} , se obtiene la igualdad $\partial''_p(\psi_p(y)) = \psi'_{p-1}(\partial'_p(y))$. Luego

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}''_p(\overline{\psi}_p(y + \text{Im } \partial'_{p+1})) &= \tilde{\partial}''_p(\psi_p(y) + \text{Im } \partial''_{p+1}) \\ &= \partial''_p(\psi_p(y)) \\ &= \psi'_{p-1}(\partial'_p(y)) \\ &= \psi'_{p-1}(\tilde{\partial}'_p(y + \text{Im } \partial'_{p+1})). \end{aligned}$$

Lo cual finaliza la demostración, por tanto, los cuadros en la figura 2.3 conmutan. Ahora, mostremos exactitud en $\mathcal{B}_p / \text{Im } \partial'_{p+1}$. Para ello debemos mostrar que $\text{Im } (\overline{\phi}_p) = \text{Ker } (\overline{\psi}_p)$.

Mostremos que $\text{Im } (\overline{\phi}_p) \subseteq \text{Ker } (\overline{\psi}_p)$. Sea $y \in \text{Im } (\overline{\phi}_p)$. Luego existe $a + \text{Im } \partial_{p+1} \in$

$\mathcal{A}_p / \text{Im } \partial_{p+1}$ tal que $\overline{\phi_p}(a + \text{Im } \partial_{p+1}) = y$. Entonces

$$\begin{aligned}
\overline{\psi_p}(y) &= \overline{\psi_p}(\overline{\phi_p}(a + \text{Im } \partial_{p+1})) \\
&= \overline{\psi_p}(\phi_p(a) + \text{Im } \partial'_{p+1}) \\
&= \psi_p(\phi_p(a)) + \text{Im } \partial''_{p+1} \\
&= 0 + \text{Im } \partial''_{p+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $y \in \text{Ker}(\overline{\psi_p})$.

Para mostrar que $\text{Ker}(\overline{\psi_p}) \subseteq \text{Im}(\overline{\phi_p})$, procedemos como sigue: Sea $x + \text{Im } \partial'_{p+1} \in \text{Ker } \overline{\psi_p}$, es decir

$$\overline{\psi_p}(x + \text{Im } \partial'_{p+1}) = \psi_p(x) + \text{Im } \partial''_{p+1} = 0,$$

por lo que $\psi_p(x) \in \text{Im } \partial''_{p+1}$. Así, existe $c \in \mathcal{C}_{p+1}$ tal que $\partial''_{p+1}(c) = \psi_p(x)$. Ahora, por la sobreyectividad de la función ψ_{p+1} , existe $b \in \mathcal{B}_{p+1}$ tal que $\psi_{p+1}(b) = c$. Note ahora que

$$x + \text{Im } \partial'_{p+1} = x - \partial'_{p+1}(b) + \text{Im } \partial'_{p+1},$$

pues $\partial'_{p+1}(b) \in \text{Im } \partial'_{p+1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\psi_p(x - \partial'_{p+1}(b)) &= \psi_p(x) - \psi_p(\partial'_{p+1}(b)) \\
&\stackrel{\circ}{=} \psi_p(x) - \partial''_{p+1}(\psi_{p+1}(b)) \\
&= \psi_p(x) - \partial''_{p+1}(c) \\
&= \psi_p(x) - \psi_p(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que $x - \partial'_{p+1}(b) \in \text{Ker}(\psi_p) = \text{Im}(\phi_p)$. Por exactitud en \mathcal{B}_p , existe $a \in \mathcal{A}_p$ tal que $\phi_p(a) = x - \partial'_{p+1}(b)$, así que

$$\begin{aligned}
\overline{\phi_p}(a + \text{Im } \partial_{p+1}) &= \phi_p(a) + \text{Im } \partial'_{p+1} \\
&= x - \partial'_{p+1}(b) + \text{Im } \partial'_{p+1} \\
&= x + \text{Im } \partial'_{p+1}.
\end{aligned}$$

Queda demostrado que $\text{Ker}(\overline{\psi_p}) \subseteq \text{Im}(\overline{\phi_p})$ y por tanto la sucesión es exacta en $\mathcal{B}_p/\text{Im } \partial'_{p+1}$.

Ahora, verifiquemos que la sucesión del diagrama 2.3 también es exacta en $\text{Ker}(\partial'_{p-1})$. Para ello debemos verificar que $\text{Im}(\phi'_{p-1}) = \text{Ker}(\psi'_{p-1})$.

i) Para demostrar que $\text{Im}(\phi'_{p-1}) \subseteq \text{Ker}(\psi'_{p-1})$, basta con ver que $\psi'_{p-1} \circ \phi'_{p-1} = 0$, lo cual se debe a ψ'_{p-1} y ϕ'_{p-1} son restricciones de ψ_{p-1} y ϕ_{p-1} respectivamente, y que por hipótesis se tiene que $\psi_{p-1} \circ \phi_{p-1} = 0$. Por tanto se tiene lo que se quería probar.

ii) Ahora veamos que $\text{Ker}(\psi'_{p-1}) \subseteq \text{Im}(\phi'_{p-1})$. Sea $y \in \text{Ker}(\psi'_{p-1})$. Entonces $y \in \text{Ker}(\partial'_{p-1})$, pues es el dominio del homomorfismo ψ'_{p-1} . Luego

$$\psi'_{p-1}(y) = \partial'_{p-1}(y) = 0.$$

Se sigue que $\psi_{p-1}(y) = 0$, esto es $y \in \text{Ker}(\psi_{p-1}) = \text{Im}(\phi_{p-1})$ por la exactitud de la sucesión en \mathcal{B}_{p-1} . Por tanto, existe $x \in \mathcal{A}_{p-1}$ tal que $\phi_{p-1}(x) = y$. Además

$$\begin{aligned} \phi_{p-2}(\partial_{p-1}(x)) &\stackrel{\circ}{=} \partial'_{p-1}(\phi_{p-1}(x)) \\ &= \partial'_{p-1}(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dado que ϕ_{p-2} es un homomorfismo y además es inyectivo, se tiene que $\partial_{p-1}(x) = 0$, es decir $x \in \text{Ker}(\partial_{p-1})$ y también

$$\phi'_{p-1}(x) = \phi_{p-1}(x) = y.$$

Se concluye que $y \in \text{Im}(\phi'_{p-1})$, lo que muestra la exactitud en $\text{Ker}(\partial'_{p-1})$.

Por tanto hemos verificado que el diagrama 2.3 cumple todas las hipótesis del lema de la serpiente, así que existe un homomorfismo δ_{*p} tal que la sucesión azul a continuación es exacta

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Ker } \tilde{\partial}_p & \longrightarrow & \text{Ker } \tilde{\partial}'_p & \longrightarrow & \text{Ker } \tilde{\partial}''_p & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\frac{\mathcal{A}_p}{\text{Im } \partial_{p+1}} & \xrightarrow{\bar{\phi}_p} & \frac{\mathcal{B}_p}{\text{Im } \partial'_{p+1}} & \xrightarrow{\bar{\psi}_p} & \frac{\mathcal{C}_p}{\text{Im } \partial''_{p+1}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \tilde{\partial}_p & & \downarrow \tilde{\partial}'_p & & \downarrow \tilde{\partial}''_p & & \\
0 \longrightarrow & \text{Ker } \partial_{p-1} & \xrightarrow{\phi'_{p-1}} & \text{Ker } \partial'_{p-1} & \xrightarrow{\psi'_{p-1}} & \text{Ker } \partial''_{p-1} & \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\frac{\text{Ker } \partial_{p-1}}{\text{Im } \tilde{\partial}_p} & \longrightarrow & \frac{\text{Im } \tilde{\partial}'_p}{\text{Ker } \partial'_{p-1}} & \longrightarrow & \frac{\text{Ker } \partial''_{p-1}}{\text{Im } \tilde{\partial}''_p} & &
\end{array}$$

Usando el Lema 2.3.2 se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$\text{Ker } \tilde{\partial}_p = H_p(\mathcal{A}_p) \quad \text{Ker } \tilde{\partial}'_p = H_p(\mathcal{B}_p) \quad \text{Ker } \tilde{\partial}''_p = H_p(\mathcal{C}_p)$$

Además

$$\frac{\text{Ker } \partial_{p-1}}{\text{Im } \tilde{\partial}_p} = H_{p-1}(\mathcal{A}_p) \quad \frac{\text{Im } \tilde{\partial}'_p}{\text{Ker } \partial'_{p-1}} = H_{p-1}(\mathcal{B}_p) \quad \frac{\text{Ker } \partial''_{p-1}}{\text{Im } \tilde{\partial}''_p} = H_{p-1}(\mathcal{C}_p)$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{array}{ccccc}
H_p(\mathcal{A}_p) & \longrightarrow & H_p(\mathcal{B}_p) & \longrightarrow & H_p(\mathcal{C}_p) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_{p-1}(\mathcal{A}_p) & \longrightarrow & H_{p-1}(\mathcal{B}_p) & \longrightarrow & H_{p-1}(\mathcal{C}_p)
\end{array}$$

δ_{*p}

Como lo anterior vale para todo $p \in \mathbb{Z}$ se sigue el resultado esperado, es decir, la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(\mathcal{A}_*) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(\mathcal{B}_*) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(\mathcal{C}_*) \xrightarrow{\bar{\delta}_{*p}} H_{p-1}(\mathcal{A}_*) \longrightarrow \cdots$$

es exacta. □

El teorema fundamental del álgebra homológica nos enseña que sucesiones exactas cortas de complejos de cadena inducen sucesiones exactas largas en grupos de homología.

2.4 Homotopía entre homomorfismos de complejos de cadena

En esta sección nos adentraremos en la relación entre dos homomorfismos y cómo su homotopía puede influir en su comportamiento en el contexto de los grupos de homología. Aunque esta sección es breve, está llena de ideas profundas que son fundamentales para nuestra comprensión del álgebra homológica.

Definición 2.4.1. Diremos que dos homomorfismos $f, g : (C_*, \partial) \rightarrow (C'_*, \partial')$ son **homotópicos**, si existen homomorfismos $h_p : C_p \rightarrow C'_{p+1}$, para todo $p \in \mathbb{Z}$, tales que

$$f_p - g_p = \partial'_{p+1} \circ h_p + h_{p-1} \circ \partial_p,$$

para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Como ya es usual, entendamos mejor esta definición por medio de un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f_{p+1}-g_{p+1} & \swarrow h_p & \downarrow f_p-g_p & \swarrow h_{p-1} & \downarrow f_{p-1}-g_{p-1} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Con la anterior definición llegamos al siguiente resultado, muy importante en el contexto de los grupos de homología, que posteriormente será de mucha ayuda. Recordemos por la Proposición 2.2.2 que los homomorfismos entre complejos de cadena inducen homomorfismos en los grupos de homología, esto nos lleva a la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1. Sean $f, g : (C_*, \partial) \rightarrow (C'_*, \partial')$ homomorfismos homotópicos. Entonces $\overline{f}_p = \overline{g}_p$, donde

$$\overline{f}_p, \overline{g}_p : H_p(C_*) \rightarrow H_p(C'_*)$$

Demostración. Sea $[c] \in H_p(C_*)$, es decir, $c \in Z_p \leq C_p$. Entonces

$$f_p(c) - g_p(c) = \partial'_{p+1}(h_p(c)) + h_{p-1}(\partial_p(c)).$$

Dado que $c \in Z_p = \text{Ker } \partial_p$, se sigue

$$f_p(c) = g_p(c) + \partial'_{p+1}(h_p(c)).$$

Además $\partial'_{p+1}(H_p(c)) \in F_p$, se concluye que

$$[f_p(c)] = [g_p(c)].$$

Esto termina la prueba. □

Lo que nos dice la anterior proposición, es que funciones homotópicas inducen la misma función en los grupos de homología.

Chapter 3

Homología

En este nuevo capítulo nos centraremos en la homología singular de espacios topológicos, un concepto central en la topología algebraica. Comenzaremos con los simplejos, que son las unidades básicas que usamos para descomponer espacios topológicos más complejos. Luego, introduciremos los complejos de cadenas singulares, que nos permiten organizar nuestros simplejos en una estructura coherente.

A partir de ahí, definiremos los grupos de homología singular y exploraremos conceptos como la homología de un punto, la homología reducida y la invarianza por homotopía. Estos temas nos ayudarán a entender cómo diferentes espacios están relacionados entre sí.

También abordaremos temas más avanzados como la homología relativa y la escisión. Finalmente, presentaremos la sucesión de Mayer-Vietoris, un resultado que nos permite calcular los grupos de homología de espacios complicados a partir de espacios más simples.

A lo largo del capítulo, proporcionaremos ejemplos concretos y aplicaciones prácticas para ilustrar estos conceptos abstractos. Nuestro objetivo es proporcionar una comprensión sólida de la homología singular y su utilidad en una amplia gama de contextos.

3.1 Simplejos

A continuación definimos los objetos que son la pieza fundamental de esta teoría.

Definición 3.1.1. Sea n un entero no negativo. Un n -simplejo es la envolvente convexa (es decir, el convexo más pequeño) de $n+1$ puntos v_0, v_1, \dots, v_n en \mathbb{R}^m , con $m > n$ que no están todos en un mismo subespacio afín de dimensión menor que n .

A continuación algunos ejemplos de simplejos:

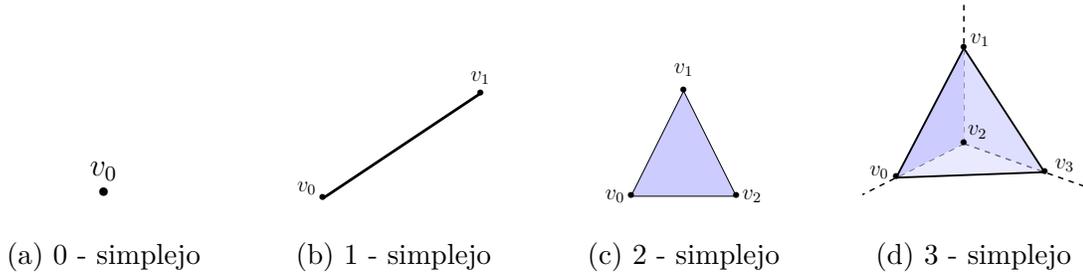


Figura 3.1: n -simplejos con $n = 0, 1, 2, 3$.

A los elementos v_0, \dots, v_n les llamamos los vértices del simplejo y dicho simplejo lo denotamos como $[v_0, \dots, v_n]$. Note que los n -simplejos viven en \mathbb{R}^{n+1} . Explícitamente tenemos:

$$[v_0, \dots, v_n] = \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n : t_i \geq 0 \text{ para todo } i, t_0 + \dots + t_n = 1\}.$$

Con lo anterior, podemos definir el n -simplejo estándar como

$$\Delta^n := [e_0, \dots, e_n]$$

donde e_0, \dots, e_n es la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} . Este n -simplejo será una pieza clave para definir la homología singular.

Podemos entonces escribir al n -simplejo estándar en forma de conjunto como sigue

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i t_i = 1; t_i \geq 0 \text{ para todo } i\}$$

Para fines de homología, será importante realizar un seguimiento del orden de los vértices de un simplejo, por lo que un n -simplejo realmente significará un n -simplejo con un ordenamiento específico de sus vértices.

3.2 Complejo de cadenas singulares

Después de haber explorado los simplejos y sus propiedades, estamos listos para dar un paso más y considerar cómo estos simplejos pueden interactuar en un espacio topológico. En esta sección, introduciremos el concepto de un complejo de cadenas singulares, que es una herramienta esencial en la homología singular. Comenzaremos con la definición de un n -simplejo singular en un espacio topológico X .

Definición 3.2.1. Sea X un espacio topológico. Un **n -simplejo singular** en X , es una función continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Abusaremos de la notación y consideraremos como n -simplejo singular en X a cualquier función continua $\sigma : [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$, definida en un n -simplejo no necesariamente el estándar. Si estrictamente quisiéramos tener solo funciones definidas en Δ^n , haríamos una composición con la función lineal que envía e_1, \dots, e_{n+1} a v_0, \dots, v_n , respectivamente.

Ahora podemos definir las n -cadenas singulares de X . Estas son sumas formales de n -simplejos singulares, y nos permiten construir los complejos de cadenas singulares.

Definición 3.2.2. Sea X un espacio topológico y R un anillo conmutativo con unitario. El R -módulo libre generado por el conjunto de n -simplejos singulares está dado por

$$C_n(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m r_i \sigma_i \mid m \in \mathbb{Z}, r_i \in R, \sigma_i \text{ es un } n\text{-simplejo singular} \right\}.$$

A los elementos de $C_n(X)$ se les llama **n -cadenas singulares**.

A continuación consideramos la siguiente sucesión de R -módulos libres generados por los conjuntos de n -simplejos singulares:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X). \quad (3.1)$$

Definimos ahora $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ como sigue: dada $\sigma : [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$, definimos

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \Big|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]} \quad (3.2)$$

donde $\sigma|_{a[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]}$ es la restricción de σ al $(n-1)$ -simplejo singular

$$[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] := [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n].$$

Luego, la función ∂_n se extiende a todo $C_n(X)$ por linealidad.

Proposición 3.2.1. El operador frontera definido en (3.2) cumple que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, para todo $n \geq 1$.

Demostración. Basta mostrar que $\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = 0$ para todo n -simplejo singular σ . En efecto:

$$\begin{aligned} \partial_n(\sigma) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]} \\ \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n-1} \left(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]} \right) \\ &= \sigma|_{[\widehat{v}_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]} - \sigma|_{[v_0, \widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]} + \dots \\ &\quad + (-1)^{i-1} \sigma|_{[v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_{i-1}, \widehat{v}_i, \dots, v_n]} \\ &\quad + (-1)^i \sigma|_{[v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \widehat{v}_{i+1}, \dots, v_n]} \\ &\quad + (-1)^{i+1} \sigma|_{[v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_i, v_{i+1}, \widehat{v}_{i+2}, \dots, v_n]} + \dots \\ &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]} \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]} \\ &= 0. \end{aligned}$$

El motivo por el cual resulta en cero, es porque cualquier sumando que aparezca en la primera sumatoria aparece con signo opuesto en la segunda por el desfase en los índices. \square

Una vez verificada esta proposición, entonces concluimos que el complejo (3.1) es en realidad un complejo de cadenas, el cual llamaremos **el complejo de cadenas singulares de X** .

Veamos algunos ejemplos de estos R -módulos de los complejos de cadenas singulares. Tenemos:

$$\begin{aligned} C_0(X) &= \text{“Combinaciones lineales de 0-simplejos singulares”} \\ &= R\text{-módulo libre generado por los puntos de } X. \end{aligned}$$

Podemos darnos cuenta de que estos R -módulos pueden ser muy grandes, por ejemplo si X es un espacio infinito, como \mathbb{R} . Ahora:

$$\begin{aligned} C_1(X) &= \text{“Combinaciones lineales de 1-simplejos singulares”} \\ &= \text{combinaciones lineales de caminos orientados en } X. \end{aligned}$$

En este caso si nuestro espacio es la esfera, ¿cuántos caminos orientados pueden haber en la esfera?, la respuesta a esa pregunta es una cantidad no numerable, lo cual reafirma la idea de que estos R -módulos pueden ser demasiado grandes.

Una vez tenemos un complejo de cadena podemos tomar sus grupos de homología gracias a la Proposición 2.2.5. A estos grupos los denotaremos como

$$H_n(X; R) := H_n(C_*(X)) \quad n \geq 0.$$

Estos serán llamados los **grupos de homología singular de X** . En particular, $H_n(X; R)$ es el **n -ésimo grupo de homología singular de X con coeficientes en R** .

Ahora vamos a considerar una situación en la que tenemos una colección de complejos de cadenas. En particular, nos gustaría entender cómo se comporta la homología cuando consideramos la suma directa de estos complejos. Este escenario es especialmente relevante cuando estamos estudiando un espacio que tiene varias componentes arco-conexas, ya que cada componente puede contribuir a la homología del espacio total. La siguiente proposición nos proporciona una herramienta valiosa para calcular la homología en tales casos.

Proposición 3.2.2. Sea $(C_*^\alpha, \partial^\alpha)_{\alpha \in I}$ una colección de complejos de cadena de R -módulos. Entonces la siguiente sucesión

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_n^\alpha \xrightarrow{\bigoplus \partial_n^\alpha} \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_{n-1}^\alpha \xrightarrow{\bigoplus \partial_{n-1}^\alpha} \cdots,$$

es un complejo de cadenas, el cual denotaremos como $(\mathcal{C}_*, \partial)$, donde $C_n = \bigoplus_{\alpha \in I} C_n^\alpha$ con operador frontera $\partial_n = \bigoplus \partial_n^\alpha$, el cual está definido como sigue:

$$\bigoplus \partial_n^\alpha (c_\alpha)_\alpha = (\partial_n^\alpha (c_\alpha))_\alpha.$$

Además la homología de este complejo $(\mathcal{C}_*, \partial)$ está dada por

$$H_n(\mathcal{C}_*) = \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(\mathcal{C}_*^\alpha).$$

Demostración. Para verificar que $(\mathcal{C}_*, \partial)$ es un complejo de cadenas, debemos verificar que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. En efecto:

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = \left(\bigoplus_{\alpha \in I} \partial_n^\alpha \right) \circ \left(\bigoplus_{\alpha \in I} \partial_{n+1}^\alpha \right) = \bigoplus_{\alpha \in I} (\partial_n^\alpha \circ \partial_{n+1}^\alpha),$$

pero como $(\mathcal{C}_*^\alpha, \partial^\alpha)$ es un complejo de cadenas, tenemos que $\partial_n^\alpha \circ \partial_{n+1}^\alpha = 0$ para todo $\alpha \in I$. Por lo tanto, se tiene que

$$\bigoplus_{\alpha \in I} (\partial_n^\alpha \circ \partial_{n+1}^\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in I} 0 = 0.$$

Así, $(\mathcal{C}_*, \partial)$ es un complejo de cadenas.

Finalmente, veamos que la homología del complejo está dada por $\bigoplus_{\alpha \in I} H_n(\mathcal{C}_*^\alpha)$. Por definición, la n -ésima homología de un complejo de cadenas es el cociente del n -ésimo grupo de ciclos por el n -ésimo grupo de fronteras. En nuestro caso, tenemos:

$$Z_n \left(\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_n^\alpha \right) = \bigoplus_{\alpha \in I} Z_n(\mathcal{C}_*^\alpha) \quad \text{y} \quad F_n \left(\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_n^\alpha \right) = \bigoplus_{\alpha \in I} F_n(\mathcal{C}_*^\alpha)$$

Por lo tanto, la homología del complejo es

$$\begin{aligned} H_n \left(\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_n^\alpha \right) &= Z_n \left(\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_n^\alpha \right) / F_n \left(\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_n^\alpha \right) \\ &= \left(\bigoplus_{\alpha \in I} Z_n(\mathcal{C}_*^\alpha) \right) / \left(\bigoplus_{\alpha \in I} F_n(\mathcal{C}_*^\alpha) \right) \\ &= \bigoplus_{\alpha \in I} (Z_n(\mathcal{C}_*^\alpha) / F_n(\mathcal{C}_*^\alpha)) \\ &= \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(\mathcal{C}_*^\alpha) \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que la homología del complejo es $\bigoplus_{\alpha \in I} H_n(C_*^\alpha)$ lo cual finaliza la demostración. \square

La proposición anterior nos proporcionó una herramienta valiosa para calcular la homología de la suma directa de complejos de cadenas. Ahora, vamos a aplicar este resultado a un escenario más concreto, si tenemos un espacio topológico que se puede descomponer en componentes arco-conexas. Esta situación es común en la práctica, ya que muchos espacios de interés pueden descomponerse de esta manera. La siguiente proposición nos muestra cómo calcular la homología de dicho espacio.

Proposición 3.2.3. Sea X un espacio topológico y sean $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ sus componentes arco conexas. Entonces

$$H_n(X; R) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha; R),$$

para todo $n \geq 0$.

Demostración. Dado que la imagen de cada $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ es un subconjunto arco-conexo de X (porque cada simplejo es arco-conexo), la imagen de σ debe estar contenida en una única componente arco-conexa X_α de X . Entonces $C_n(X)$ se puede descomponer como la suma directa de los $C_n(X_\alpha)$ para todos los $\alpha \in I$, es decir

$$C_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} C_n(X_\alpha).$$

Por otro lado, los homomorfismos frontera ∂_n preservan esta descomposición, esto es $\partial_n(C_n(X_\alpha)) \subseteq C_{n-1}(X_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$. Por lo tanto, $C_*(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} C_*(X_\alpha)$.

Finalmente, aplicando la Proposición 3.2.2, se tiene que $H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha)$ para todo $n \geq 0$. \square

3.3 El 0-ésimo grupo de homología

Después de explorar varios conceptos fundamentales en álgebra homológica, ahora nos centraremos en un aspecto específico: el 0-ésimo grupo de homología. Este grupo tiene una interpretación geométrica muy intuitiva y nos proporciona información

sobre la estructura de conectividad de nuestro espacio topológico. En particular, nos dice cuántas componentes arco-conexas tiene el espacio. La siguiente proposición formaliza esta idea.

Proposición 3.3.1. Sea X un espacio topológico y R un anillo. Entonces $H_0(X; R)$ es una suma directa de copias de R , una por cada componente arco-conexa de X

Demostración. Gracias a la Proposición 3.2.3, basta con mostrar este resultado para X arco-conexo, porque el caso general se sigue de descomponer en sus componentes arco-conexas y usar la Proposición 3.2.3

Por tanto, suponga que X es arco-conexo. Entonces consideremos la siguiente sucesión

$$C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \longrightarrow 0.$$

Por la definición de homología se tiene que

$$H_0(X) \cong C_0(X) / \text{Im } \partial_1.$$

Definamos ahora la siguiente función

$$\begin{aligned} \varepsilon : C_0(X) &\rightarrow R \\ \sum n_i \sigma_i &\mapsto \sum n_i. \end{aligned}$$

Si $X \neq \emptyset$, es claro que va a existir por lo menos un 0-simplejo singular en $C_0(X)$ y por tanto ε es sobreyectivo. Afirmamos que $\text{Im } \partial_1 = \text{Ker } \varepsilon$. En efecto:

i) Mostremos que $\text{Im } \partial_1 \subseteq \text{Ker } \varepsilon$. Sea $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ un 1-simplejo singular, es decir, un elemento de la base de $C_1(X)$. Luego

$$\varepsilon(\partial_1(\sigma)) = \varepsilon\left(\sigma \Big|_{[v_1]} - \sigma \Big|_{[v_0]}\right) = 1 - 1 = 0,$$

lo cual finaliza esta parte de la demostración.

ii) Veamos que $\text{Ker } \varepsilon \subseteq \text{Im } \partial_1$. En efecto, suponga que

$$\varepsilon\left(\sum n_i \sigma_i\right) = \sum n_i = 0.$$

Dado que cada σ_i es un 0-simplejo singular, lo podemos identificar con un punto de X . Fijemos $x_0 \in X$. Para cada $i \in I$, escogamos un camino $\gamma_i : \Delta^1 \rightarrow X$ tales que $\gamma_i(0) = x_0$ y $\gamma_i(1) = \sigma_i$, el cual existe pues X es arco-conexo. Definamos ahora $\sigma_0 : \Delta^0 \rightarrow X$ como la función constante x_0 . Entonces $\partial_1 \gamma_i = \sigma_i - \sigma_0$, y luego

$$\begin{aligned} \partial_1 \left(\sum n_i \gamma_i \right) &= \sum n_i \sigma_i - \sum n_i \sigma_0 \\ &= \sum n_i \sigma_i, \end{aligned}$$

lo cual se sigue porque $\sum n_i = 0$. Queda probado entonces que $\sum n_i \sigma_i \in \text{Im } \partial_1$ y por tanto $\text{Im } \partial_1 = \text{Ker } \varepsilon$. Luego por primer teorema de isomorfismo

$$R \cong C_0(X) / \text{Ker } \varepsilon = C_0(X) / \text{Im } \partial_1 = H_0(X).$$

□

La anterior proposición es muy importante, ya que nos muestra que $H_0(X)$ puede ser fácil de calcular si conocemos la cantidad de componentes arco-conexas del espacio que estamos considerando.

Ejemplo 3.3.1. $H_0(S^1; R) \cong R$.

A continuación, veamos un ejemplo de un espacio con n componentes arco-conexas

Ejemplo 3.3.2. Considere un espacio topológico X que es la unión disjunta de n copias de S^1 , es decir, $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$, donde cada X_i es homeomorfo a S^1 . Cada copia de S^1 es una componente arco-conexa, por lo que hay n componentes arco-conexas. Entonces, $H_0(X; R) \cong \bigoplus_{i=1}^n H_0(X_i; R)$ es una suma directa de n copias de R .

Finalmente, veamos un ejemplo del cálculo de homología de un espacio discreto.

Ejemplo 3.3.3. Considera el conjunto de los números racionales \mathbb{Q} con la topología discreta. Cada punto forma una componente arco-conexa, por lo que hay infinitas componentes arco-conexas. Entonces, si denotamos cada punto por X_α , tenemos que $\mathbb{Q} = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, donde I es el conjunto de índices que recorre todos los puntos racionales. Por lo tanto, $H_0(\mathbb{Q}; R) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} H_0(X_\alpha; R)$ es una suma directa infinita de copias de R .

3.4 Homología de un punto

Ahora nos centraremos en un caso particularmente simple pero fundamental: la homología de un espacio que consta de un solo punto. Este caso puede parecer trivial, pero en realidad es de gran importancia. Nos proporciona una base sobre la cual podemos construir nuestra comprensión de espacios más complejos. La siguiente proposición nos da el resultado para este caso.

Proposición 3.4.1. Sea X un espacio el cual contiene solo a un punto, es decir $X = \{x_0\}$. Entonces

$$H_n(X; R) = \begin{cases} R, & \text{si } n = 0; \\ 0, & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. Para cada $n \geq 0$ tenemos un solo n -simplejo singular $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow X$, la función constante x_0 . Note que

$$\begin{aligned} \partial_n(\sigma_n) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1} \\ &= \sigma_{n-1} - \sigma_{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_{n-1} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ \sigma_{n-1}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego el complejo de cadenas singulares se ve como sigue

$$\cdots \longrightarrow R \xrightarrow{f} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{f} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{\delta} 0$$

Entonces es claro que $\text{Ker } \delta = R$ y

$$H_0(X; R) = \text{Ker } \delta / \text{Im } 0 \cong R.$$

Además, en cualquier otro lado $\text{Ker } 0 = R$ y la imagen de f es R , entonces $H_n(X; R) = 0$ para todo $n > 0$. □

3.5 Homología reducida

En esta sección hablaremos, en primera instancia, de la homología reducida, la cual es una variante de la homología singular y es de mucha ayuda al momento de calcular la

homología de un espacio. En otras palabras, muchas veces resulta más útil considerar la homología reducida que la homología singular.

Definición 3.5.1. Sea X un espacio topológico y R un anillo conmutativo con unitario. Los grupos de **homología reducida** de X con coeficientes en R , que se denotan $\widetilde{H}_n(X; R)$, son los grupos de homología del siguiente complejo

$$\cdots \rightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \rightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

donde el homomorfismo $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow R$ está dado por:

$$\varepsilon \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i,$$

el cual es conocido como el **homomorfismo de aumentación**

Observación: Como mencionamos al principio de esta sección, la homología reducida es una variante de la homología singular y esto se ve a través de la siguiente relación:

$$\widetilde{H}_n(X; R) = H_n(X; R), \quad \forall n \geq 1,$$

por lo cual, la diferencia entre la homología singular y la reducida está en el grupo H_0 .

Ejemplo 3.5.1. Si $X = \{x_0\}$, ya habíamos visto que

$$H_n(X; R) = \begin{cases} R, & \text{Si } n = 0; \\ 0, & \text{Si } n \neq 0. \end{cases}$$

Pero la homología reducida del espacio que solo consta de un punto es cero para todo n , lo cual se verifica como sigue:

$$H_0(X) \cong C_0(X) / \text{Im } \partial_1 \underset{\varepsilon}{\cong} R.$$

Es decir, se tiene que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Im } \partial_1 \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

es exacta, por lo que el complejo dado en (3.3) es exacto en $C_0(X)$, por tanto $\widetilde{H}_0(X; R) = 0$ y así $\widetilde{H}_n(X; R) = 0$ para todo n .

Dado que en (3.3) se tiene que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$, esto induce un homomorfismo $\bar{\varepsilon} : H_0(X; R) \rightarrow R$ con kernel $\widetilde{H}_0(X, R)$, esto lleva a la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(X, R) \xrightarrow{\iota} H_0(X, R) \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} R \longrightarrow 0$$

Donde $\bar{\varepsilon}$ es sobreyectivo y ι es inyectiva. Dado que $\bar{\varepsilon}$ es sobreyectivo, existe $g \in H_0(X)$ tal que $\bar{\varepsilon}(g) = 1$. Definimos $s : R \rightarrow H_0(X)$ por $s(n) = ng$. Este es un homomorfismo de grupos tal que $\bar{\varepsilon} \circ s = Id$. A continuación, definimos el siguiente homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \widetilde{H}_0(X) \oplus R &\rightarrow H_0(X) \\ \phi(a, n) &\mapsto \iota(a) + s(n). \end{aligned}$$

Veamos que ϕ es inyectiva. En efecto, suponga que $\phi(a_1, n_1) = \phi(a_2, n_2)$, note que $\bar{\varepsilon} \circ \iota = 0$. Luego

$$n_i = \bar{\varepsilon}(s(n_i)) = \bar{\varepsilon}(\iota(a_i) + s(n_i)) = \bar{\varepsilon}(\phi(a_i, n_i)).$$

Entonces $n_1 = n_2$, por lo que $\iota(a_1) = \iota(a_2)$. Como ι es inyectiva, se sigue que $a_1 = a_2$.

Finalmente, verifiquemos que el homomorfismo ϕ es sobreyectivo.

Sea $h \in H_0(X)$. Definimos $n = \bar{\varepsilon}(h)$. Entonces $\bar{\varepsilon}(h - s(n)) = \bar{\varepsilon}(h) - \bar{\varepsilon}(s(n)) = n - n = 0$, por lo tanto $h - s(n) \in \ker(\bar{\varepsilon}) = \text{im}(\iota)$, es decir, $h - s(n) = \iota(a)$ para algún $a \in \widetilde{H}_0(X)$. Esto muestra que $\phi(a, n) = h$. Así, se sigue que $H_0(X, R) \cong \widetilde{H}_0(X, R) \oplus R$.

Por tanto el 0-ésimo grupo de homología reducida es diferente al grupo de homología singular por diferencia de una suma directa de R .

3.6 Funtorialidad

Después de explorar la homología de espacios topológicos específicos, ahora nos centraremos en cómo las funciones entre espacios topológicos inducen funciones entre sus complejos de cadenas y grupos de homología. Este es un aspecto crucial del álgebra homológica, ya que nos permite entender cómo los espacios topológicos y sus estructuras de homología se relacionan entre sí.

Consideremos $f : X \rightarrow Y$ una función continua y R un anillo. Entonces para cada $n \geq 0$ tenemos una función $f_{\#,n}$ definida como:

$$f_{\#,n} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$$

$$\sigma \mapsto f_{\#,n} \circ \sigma = f \circ \sigma.$$

Luego extendemos esto linealmente, es decir

$$\sum n_i \sigma_i \mapsto \sum n_i f \circ \sigma_i.$$

Podemos ver esto a través del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\sigma} & X \\ & \searrow f_{\#,n}\sigma & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

Claramente $f_{\#}$ es un homomorfismo de R -módulos, por lo tanto podemos sacar un diagrama como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_n(X) & \longrightarrow & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_1(X) & \longrightarrow & C_0(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_{\#,n} & & \downarrow f_{\#,n-1} & & & & \downarrow f_{\#,1} & & \downarrow f_{\#,0} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n(Y) & \longrightarrow & C_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_1(Y) & \longrightarrow & C_0(Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Queremos ver que esto es en realidad un homomorfismo de complejos de cadena, es decir, debemos verificar que el diagrama conmuta, en cada nivel n . Tomamos un elemento de la base de $C_n(X)$, y luego tenemos

$$\begin{aligned} f_{\#,n}(\partial_n(\sigma)) &= f_{\#,n} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \mid [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ \sigma \mid [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] \\ &= \partial_n(f_{\#,n}(\sigma)) \end{aligned}$$

Por tanto hemos demostrado la siguiente proposición

Proposición 3.6.1. Toda función continua $f : X \rightarrow Y$ induce un homomorfismo de complejos de cadena

$$f_{\#,n} : \mathcal{C}_*(X) \rightarrow \mathcal{C}_*(Y).$$

Por la Proposición 2.2.2, sabemos que homomorfismos de complejos de cadena inducen homomorfismos en los grupos de homología, por lo que se tienen homomorfismos

$$f_{*,n} = f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y).$$

Finalmente, examinaremos algunas propiedades fundamentales de estos homomorfismos inducidos.

Proposición 3.6.2. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas entre espacios topológicos. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $(f \circ g)_{\#} = f_{\#} \circ g_{\#}$.
- $Id_{\#} = Id_{\mathcal{C}_*(X)}$.
- $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.
- $Id_* = Id_{H_n(X)}$.

Demostración. Mostremos cada una de las partes como sigue:

- Veamos que $(f \circ g)_{\#} = f_{\#} \circ g_{\#}$. En efecto, para un simplejo $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, tenemos que

$$(f \circ g)_{\#}(\sigma) = (f \circ g) \circ \sigma = f_{\#} \circ (g \circ \sigma) = f_{\#}(g_{\#}(\sigma)) = (f_{\#} \circ g_{\#})(\sigma),$$

luego por linealidad, esto se extiende a todas las cadenas.

- En segundo lugar, probemos que $Id_{\#} = Id_{\mathcal{C}_*(X)}$. En efecto, para un simplejo $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, tenemos que

$$Id_{\#}(\sigma) = Id \circ \sigma = \sigma = Id_{\mathcal{C}_*(X)}(\sigma).$$

por la propiedad de linealidad, esto se extiende a todas las cadenas.

- Queremos mostrar que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Recordemos que los homomorfismos inducidos en homología, f_* y g_* , están definidos por $f_*([c]) = [f_{\#}(c)]$ y $g_*([c]) = [g_{\#}(c)]$ para cualquier clase de equivalencia $[c] \in H_n(X)$ y $[c] \in H_n(Y)$ respectivamente. Entonces, para cualquier clase de equivalencia $[c] \in H_n(X)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)_*([c]) &= [(f \circ g)_{\#}(c)] \\
 &= [f_{\#}(g_{\#}(c))] \\
 &= f_*([g_{\#}(c)]) \\
 &= f_*(g_*([c])) \\
 &= (f_* \circ g_*)([c]).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

- Finalmente, queremos mostrar que $Id_* = Id_{H_n(X)}$. En efecto, para cualquier clase de equivalencia $[c] \in H_n(X)$, tenemos que

$$Id_*([c]) = [Id_{\#}(c)] = [c] = Id_{H_n(X)}([c]).$$

Así, $Id_* = Id_{H_n(X)}$.

□

3.7 Teorema de invarianza por homotopía

El teorema de invarianza por homotopía nos dice que funciones homotópicas inducen la misma función en homología. Además, como una consecuencia inmediata, se tiene que dos espacios que sean homotópicamente equivalentes tienen grupos de homología isomorfos.

A continuación, veamos algunas definiciones que nos ayudarán para comprender el teorema de invarianza por homotopía.

Definición 3.7.1. Sean X e Y espacios topológicos y $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Decimos que f y g son homotópicas ($f \simeq g$) si existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que:

- $H(x, 0) = f(x), \forall x \in X,$
- $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X.$

La función H es llamada una **homotopía entre f y g** .

Lo que nos dice esta definición es que podemos “deformar” f en g a través de la aplicación H , en un intervalo de una unidad de tiempo.

Definición 3.7.2. Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si existe una función $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \cong \text{Id}_Y$ y $g \circ f \cong \text{Id}_X$.

Cuando existe una equivalencia homotópica entre espacios X y Y , decimos que estos espacios son **homotópicamente equivalentes**, y se usa la notación $X \simeq Y$. A continuación veamos una tres definiciones que nos servirán mucho más adelante.

Definición 3.7.3. Una función continua $r : X \rightarrow A$ de un espacio topológico X a un subespacio A , tal que la restricción de r a A es la identidad en A , es llamada una **retracción**, es decir, $r(a) = a$ para todo a en A . En tal caso, se dice que A es un **retracto** de X .

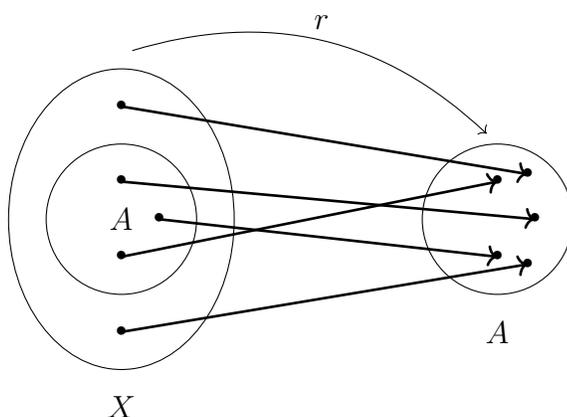


Figura 3.2: A es un retracto de X

Definición 3.7.4. Un subespacio M de un espacio topológico X es un **retracto por deformación** de X si existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ entre la identidad de X y una retracción $r : X \rightarrow M$.

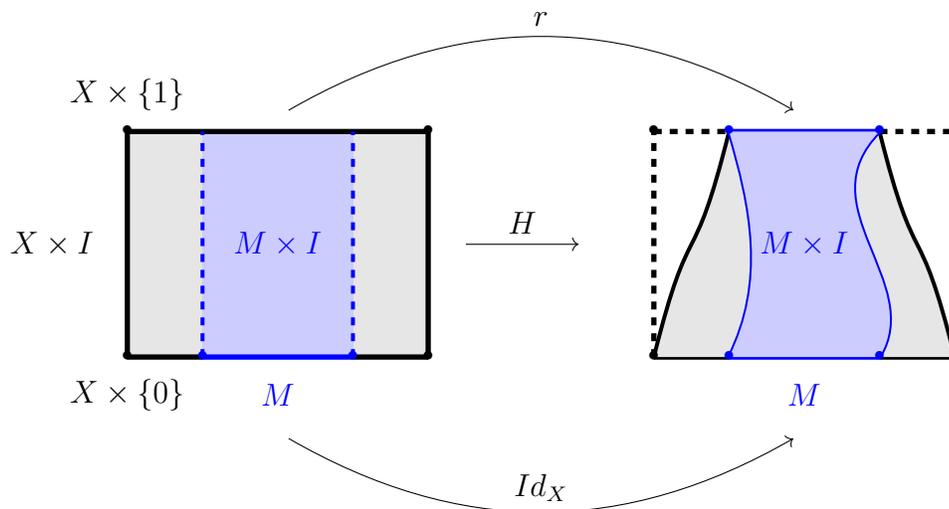


Figura 3.3: Retracto por deformación

Finalmente, veamos la definición que más se usará posteriormente en el desarrollo de este trabajo.

Definición 3.7.5. Un subespacio A de un espacio topológico X es un **retracto por deformación fuerte** de X si existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ entre la identidad de X y una retracción $r : X \rightarrow A$ tal que:

- $H(x, 0) = x$ para todo x en X ;
- $H(x, 1) \in A$ para todo x en X ;
- $H(a, t) = a$ para todo (a, t) en $A \times [0, 1]$.

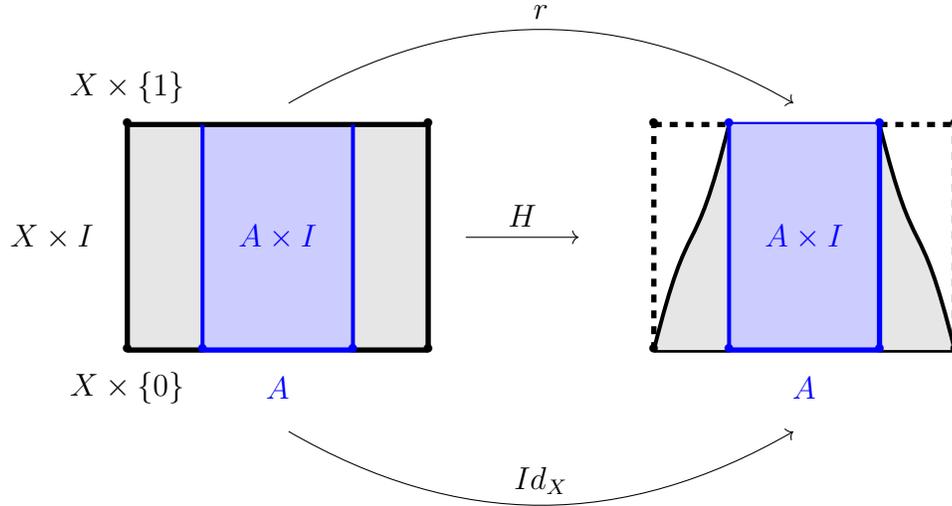


Figura 3.4: Retracto por deformación fuerte

Teorema 3.7.1. Si dos funciones $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas, entonces inducen los mismos homomorfismos $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, para todo $n \geq 0$.

Demostración. La parte clave de la demostración consiste en dividir a $\Delta^n \times I$ en una colección de $(n + 1)$ -simplejos. Veamos algunos casos particulares de esta división. En el caso que $n = 1$, a $\Delta^1 \times I$ lo sub-dividimos en 2-simplejos como sigue:

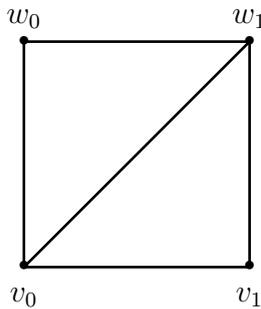


Figura 3.5: $\Delta^1 \times I$

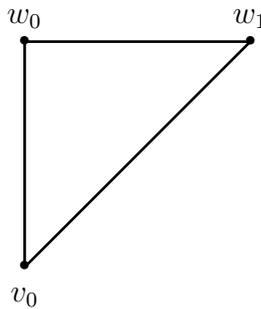


Figura 3.6: $[v_0, w_0, w_1]$

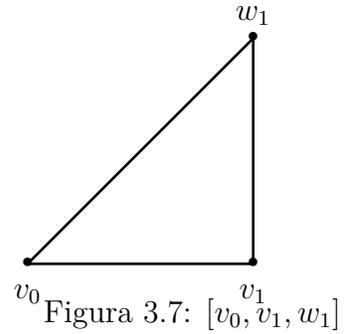


Figura 3.7: $[v_0, v_1, w_1]$

Note que al hacer la intersección $[v_0, w_0, w_1] \cap [v_0, v_1, w_1]$ resulta un simplejo de dimensión menor, en este caso el 1-simplejo $[v_0, w_1]$. Además, veamos que este 1-simplejo es la gráfica de la función

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \Delta^1 &\rightarrow I \\ (t_0, t_1) &\mapsto t_1 \end{aligned}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \{(t_0, t_1, t_2) : t_2 = \varphi_0(t_0, t_1)\} &= \{(t_0, t_1, t_2) : t_2 = t_1\} \\ &= \{(t_0, t_1, t_1) : (t_0, t_1) \in \Delta^1\} \end{aligned}$$

Para el caso en que $n = 2$ hacemos la división de $\Delta^2 \times I$ en 3 - simplejos como sigue:

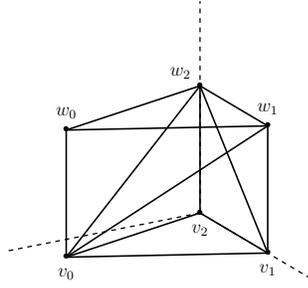


Figura 3.8: $\Delta^2 \times I$

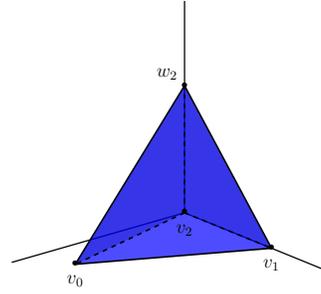


Figura 3.9: $[v_0, v_1, v_2, w_2]$

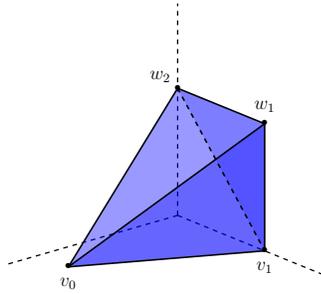


Figura 3.10: $[v_0, v_1, w_1, w_2]$

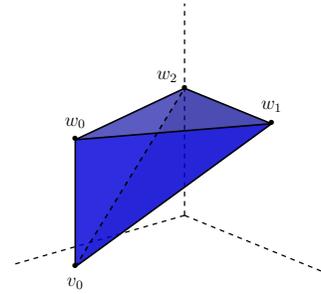


Figura 3.11: $[v_0, w_0, w_1, w_2]$

Análogo al caso anterior, $[v_0, v_1, v_2, w_2] \cap [v_0, v_1, w_1, w_2] = [v_0, v_1, w_2]$. y $[v_0, v_1, w_1, w_2] \cap [v_0, w_0, w_1, w_2] = [v_0, w_1, w_2]$.

Ahora, hagamos las siguientes consideraciones en el caso general. En $\Delta^n \times I$, definimos $[v_0, \dots, v_n] := \Delta^n \times \{0\}$, es decir, como todo los puntos de la “base”, y $[w_0, \dots, w_n] := \Delta^n \times \{1\}$ como el “techo”. Note que (gráficamente) cada v_i está exactamente debajo de cada w_i .

Siguendo la idea para el caso $n = 1$, se puede ver que, en general, el n -simplejo $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$ es la gráfica de la función φ_i definida como sigue :

$$\begin{aligned} \varphi_i : \Delta^n &\rightarrow I \\ (t_0, \dots, t_n) &\mapsto t_{i+1} + \dots + t_n \end{aligned}$$

Note además que la gráfica de φ_i está por debajo de la gráfica de la función φ_{i-1} , es decir $\varphi_i \leq \varphi_{i-1}$, lo cual se debe a que hay más sumandos. Luego, la región entre estas gráficas es $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ el cual es un $(n+1)$ -simplejo porque $w_i \notin [v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$. La manera de ver esto es que w_i no está en la gráfica de la función φ_i

Luego, tenemos la cadena de desigualdades

$$0 = \varphi_n \leq \varphi_{n-1} \leq \dots \leq \varphi_0 \leq \varphi_{-1} = 1.$$

Entonces tenemos que $\Delta^n \times I$ es la unión de los $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$.

Dado que $f \simeq g$, por definición, existe una homotopía $F : X \times I \rightarrow Y$ entre f y g . Consideremos un n -simplejo singular $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ y tenemos entonces la función $F \circ (\sigma \times Id) : \Delta^n \times I \rightarrow Y$:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n \times I & \xrightarrow{\sigma \times Id} & X \times I & \xrightarrow{F} & Y \\ (p, t) & \longmapsto & (\sigma(p), t) & \longmapsto & F(\sigma(p), t) \end{array}$$

La restricción $F \circ (\sigma \times Id)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$ define un $(n+1)$ -simplejo singular en Y , para $i = 0, \dots, n$. Luego, “pegamos coherentemente” estos $(n+1)$ -simplejos para definir el **operador prisma** $P_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ dado por la siguiente fórmula

$$P_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i F \circ (\sigma \times Id) |_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}.$$

Dado que tenemos función continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos, entonces por la Proposición 3.6.1, f induce un homomorfismo de complejos de cadenas $f_{\#,n} : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$, y de manera similar g induce un homomorfismo de complejos de cadenas $g_{\#,n} : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$.

Ahora, veamos que P_n es una homotopía entre $f_{\#,n}$ y $g_{\#,n}$, es decir, satisface que

$$f_{\#n} - g_{\#n} = \partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Para facilitar la notación, sea $G := F \circ (\sigma \times Id)$. Luego

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1} \circ P_n(\sigma) &= \partial_{n+1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i G \mid_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \right) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n+1} \left(G \mid_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \right) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j G \mid_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^j G \mid_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{v}_{j-1}, \dots, w_n]} \right) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j G \mid_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{j=i}^n (-1)^{j+1} G \mid_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, w_n]} \right) \\
&= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j G \mid_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\
&\quad + \sum_{i \leq j} (-1)^i (-1)^{j+1} G \mid_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, w_n]}
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene

$$P_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j P_{n-1} \left(\sigma \mid_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]} \right)$$

Analicemos el caso cuando $j = 0$. Resulta

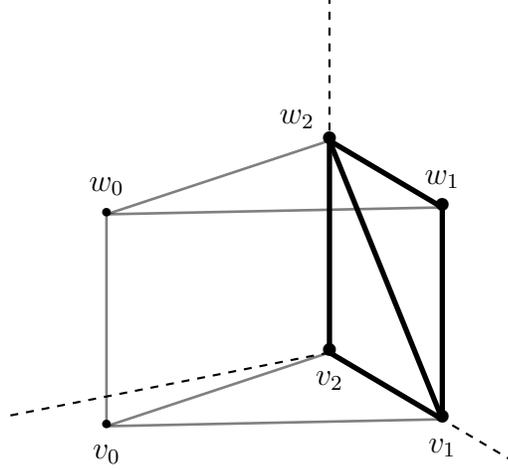
$$\begin{aligned}
P_{n-1} \left(\sigma \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_n]} \right) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i F \circ \left(\sigma \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_n]} \times I \right) \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_i, w_i, w_n]} \\
&= F \circ \left(\sigma \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_n]} \times I \right) \mid_{[v_1, w_1, \dots, w_n]} \\
&\quad - F \circ \left(\sigma \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_n]} \times I \right) \mid_{[v_1, v_2, w_2, \dots, w_n]} \\
&\quad + F \circ \left(\sigma \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_n]} \times I \right) \mid_{[v_1, v_2, v_3, \dots, v_i, w_i, w_n]} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^{n-1} F \circ \left(\sigma \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_n]} \times I \right) \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_n, w_n]}
\end{aligned}$$

Observemos que si tenemos una función $f : A \rightarrow B$ tal que $S \subseteq T \subseteq A$, se sigue que $(f \mid_T) \mid_S = f \mid_S$. Esto permite simplificar los términos de la anterior sumatoria, puesto

que

$$\left(\sigma \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_n]} \times I \right) \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_i, w_i, w_n]} = F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$$

Esto se aplicará en cada caso que se necesite. Una manera de ver esto de forma geométrica es como sigue:



Nos damos cuenta que, por ejemplo, restringir $(\sigma \mid_{[v_1, v_2]} \times I)$ a $[v_1, w_1, w_2]$ es lo mismo que restringir $(\sigma \times I)$ a $[v_1, w_1, w_2]$. Por tanto, en el caso anterior cuando $j = 0$ nos resulta

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_1, v_2, \dots, v_i, w_i, w_n]} \cdot$$

Haciendo los cálculos, nos damos cuenta de que para $j = 1$, resulta que

$$\begin{aligned} P_{n-1} \left(\sigma \mid_{[v_0, v_2, \dots, v_n]} \right) &= F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_0, w_0, \hat{w}_1, w_2, \dots, w_n]} \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_0, \hat{v}_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \cdot \end{aligned}$$

De manera general se tiene

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, w_n]} \\ &+ \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i-1} F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \cdot \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
P_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j P_{n-1} \left(\sigma \mid_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]} \right) \\
&= \sum_{j=0}^n (-1)^j \left(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, w_n]} \right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^n (-1)^j \left(\sum_{i=j+1}^n (-1)^{i-1} F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \right) \\
&= \sum_{i < j} (-1)^j (-1)^i F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, w_n]} \\
&\quad + \sum_{i > j} (-1)^j (-1)^{i-1} F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}
\end{aligned}$$

Además, note que

$$\begin{aligned}
P_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) + \partial_{n+1} \circ P_n(\sigma) &= \sum_{i=0}^n F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, w_i, \dots, w_n]} \\
&\quad - \sum_{i=0}^n F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_0, \dots, v_i, \widehat{w}_i, \dots, w_n]} \\
&= F \circ (\sigma \times I) \mid_{[w_0, \dots, w_n]} \\
&\quad - F \circ (\sigma \times I) \mid_{[v_0, \dots, v_n]}
\end{aligned}$$

Luego, $F \circ (\sigma \times Id) \mid_{[\widehat{v}_0, w_0, \dots, w_n]}$, es precisamente $g \circ \sigma = g_{\#}(\sigma)$, y $-F \circ (\sigma \times Id) \mid_{[v_0, \dots, v_n, \widehat{w}_n]}$ es $-f \circ \sigma = -f_{\#}(\sigma)$. Así, se ha verificado la igualdad en (3.7), por tanto P_n es una homotopía entre $f_{\#,n}$ y $g_{\#,n}$. Aplicando la consecuencia de la Proposición 3.6.1 se tiene el resultado deseado. \square

Corolario 3.7.1. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces

$$f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y),$$

es un isomorfismo para todo $n \geq 0$.

Demostración. Suponga que $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces existe una función $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \cong Id_Y$ y $g \circ f \cong Id_X$, luego por teorema

de invarianza por homotopía y propiedades de funtorialidad se sigue:

$$(g \circ f)_* = (Id_X)_*$$

$$g_* \circ f_* = Id_{H_n(X)}$$

Además

$$(f \circ g)_* = (Id_Y)_*$$

$$f_* \circ g_* = Id_{H_n(Y)}$$

Por lo cual se tiene que f es biyectiva, dado que es un homomorfismo, se sigue que f es un isomorfismo. \square

A continuación, veamos un ejemplo práctico de lo anterior.

Ejemplo 3.7.1. Sea X un espacio topológico el cual es homotópicamente equivalente a un punto, es decir X es **contráctil**. Entonces

$$H_n(X; R) = \begin{cases} R, & \text{Si } n = 0; \\ 0, & \text{Si } n \neq 0. \end{cases}$$

Para ver esto, procedamos como sigue: Dado que X es contráctil, existe una equivalencia de homotopía $f : X \rightarrow \{x_0\}$, donde $\{x_0\}$ es un espacio que contiene solo un punto. Por la definición de equivalencia de homotopía, existe una función inversa $g : \{x_0\} \rightarrow X$ tal que $f \circ g$ es homotópico a la identidad en $\{x_0\}$ y $g \circ f$ es homotópico a la identidad en X .

Ahora, la función inducida en homología $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(\{x_0\})$ es un isomorfismo para todo n . Entonces se tiene

$$H_n(X; R) = \begin{cases} R, & \text{Si } n = 0; \\ 0, & \text{Si } n \neq 0. \end{cases}$$

3.8 Homología relativa

Ahora definamos la homología relativa, la cual es también una variante de la homología singular y a la vez, es una generalización de la homología reducida.

Definición 3.8.1. Si X es un espacio topológico y A es un subespacio de X , diremos que (X, A) es un **par (o pareja) de espacios topológicos**, o simplemente un **pareja**.

Notemos que $\mathcal{C}_*(A)$ es un subcomplejo de $\mathcal{C}_*(X)$, por lo cual podemos considerar el cociente entre estos R -módulos. Así, llegamos a la siguiente definición:

Definición 3.8.2. Al complejo

$$\mathcal{C}_*(X, A) := \mathcal{C}_*(X)/\mathcal{C}_*(A),$$

se le conoce como el **complejo de cadenas singular de la pareja** (X, A) .

Se puede ver que en dimensión n se tiene

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A),$$

donde el operador frontera ∂_n^* entre estos R -módulos es el inducido en los cocientes, es decir, $\partial_n^* : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ está definida mediante

$$\partial_n^*([\sigma]) = [\partial_n(\sigma)],$$

donde σ es una n -cadena singular en X . Así, podemos considerar los grupos de homología del complejo $\mathcal{C}_*(X, A)$ y, de hecho, definimos

$$H_n(X, A) := H_n(\mathcal{C}_*(X, A)),$$

los cuales se conocen como los **grupos de homología de la pareja** (X, A) .

A continuación, consideremos la sucesión exacta corta de complejos de cadena

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_*(A) \xrightarrow{i} \mathcal{C}_*(X) \xrightarrow{j} \mathcal{C}_*(X, A) \longrightarrow 0,$$

donde el homomorfismo i en el diagrama es la inclusión. Esto significa que i mapea cada cadena singular en A a la misma cadena singular en X .

Por otro lado, el homomorfismo j está definido por el cociente: toma una cadena singular en X y la mapea a su clase de equivalencia en el cociente $\mathcal{C}_*(X)/\mathcal{C}_*(A) = \mathcal{C}_*(X, A)$. En otras palabras, j “olvida” si una cadena singular en X estaba en A .

Aplicando el teorema fundamental del álgebra homológica tenemos la siguiente sucesión dada en el siguiente teorema

Teorema 3.8.1. Sea (X, A) un pareja de espacios topológicos, entonces se tiene la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

donde i_* es la función inducida por la inclusión, j_* es la inducida por el cociente y δ_* es el homomorfismo de conexión.

Observación: Los grupos de homología de la pareja son cero si y solo si el homomorfismo inducido por la inclusión i_* es un isomorfismo. Luego, los grupos de homología de la pareja nos dicen qué tan diferentes son los grupos de homología del subespacio en referente al espacio.

Ejemplo 3.8.1. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Entonces

$$H_n(X, \{x_0\}) \cong \widetilde{H}_n(X), \quad n \geq 0.$$

Esto se puede demostrar utilizando la sucesión exacta larga de la homología relativa para el par $(X, \{x_0\})$, esto es:

$$\cdots \rightarrow H_n(\{x_0\}) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, \{x_0\}) \rightarrow H_{n-1}(\{x_0\}) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow \cdots$$

Dado que $\{x_0\}$ es un punto, sus grupos de homología son triviales para $n > 0$, y para $n = 0$, tenemos que $H_0(\{x_0\}) = R$. Por lo tanto, la sucesión exacta larga se simplifica a:

$$0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, \{x_0\}) \rightarrow 0$$

para $n > 0$, y

$$0 \rightarrow R \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X, \{x_0\}) \rightarrow 0$$

para $n = 0$. Estas sucesiones exactas cortas nos dicen que las funciones $H_n(X) \rightarrow H_n(X, \{x_0\})$ son isomorfismos para todo $n > 0$, y que la función $H_0(X) \rightarrow H_0(X, \{x_0\})$ es un homomorfismo sobreyectivo.

Por otro lado, los grupos de homología reducida $\widetilde{H}_n(X)$ se definen como el kernel del operador frontera $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ en el complejo de cadenas aumentado. Esto significa que $\widetilde{H}_n(X) = H_n(X)$ para todo $n > 0$, y $\widetilde{H}_0(X) = H_0(X)/R$.

Por lo tanto, podemos concluir que los grupos de homología relativa y los grupos de homología reducida son isomorfos para todo n , es decir, tenemos que:

$$H_n(X, \{x_0\}) = \begin{cases} H_n(X), & n > 0; \\ H_0(X)/R, & n = 0, \end{cases} = \begin{cases} \widetilde{H}_n(X), & n > 0; \\ \widetilde{H}_0(X) & n = 0, \end{cases} = \widetilde{H}_n(X)$$

3.9 Homología de pares topológicos

En esta sección, exploraremos la homología de pares topológicos, estudiando cómo las funciones continuas inducen homomorfismos en la homología relativa. Este estudio es crucial ya que nos permite simplificar los cálculos en los grupos de homología y obtener una mejor comprensión de la estructura topológica de los espacios. A través de este enfoque, podremos demostrar una proposición importante que relaciona la homotopía y la homología, y examinar un ejemplo que ilustra estos conceptos en el contexto de los espacios de disco y esfera.

Definición 3.9.1. Una función “de parejas” $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, es una función continua tal que $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ y $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Además, decimos que $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ si existe una homotopía $h : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ tal que $H(x, 1) = f(x)$ y $H(x, 0) = g(x)$ para todo $x \in X$ y además $H(A \times I) \subseteq B$.

Existen homomorfismos inducidos para la homología relativa al igual que en el caso no relativo, o “absoluto”. Un función $f : X \rightarrow Y$ con $f(A) \subseteq B$, o más concisamente $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, induce homomorfismos $f_{\#} : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$ ya que la función $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ lleva $C_n(A)$ a $C_n(B)$, por lo que obtenemos una función bien definido en cocientes, $f_{\#} : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$. La relación $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ se mantiene para cadenas relativas ya que se mantiene para cadenas absolutas. Por la Proposición 3.6.1, tenemos homomorfismos inducidos $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$.

Por tanto se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_*(A) & \longrightarrow & \mathcal{C}_*(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}_*(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_*(B) & \longrightarrow & \mathcal{C}_*(Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}_*(Y, B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Hemos establecido que una función $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induce homomorfismos en la homología relativa. Ahora, si consideramos dos funciones homotópicas f y g , es natural preguntarse cómo se relacionan sus homomorfismos inducidos.

Proposición 3.9.1. Sean $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ funciones de parejas. Si $f \simeq g$ entonces

$$f_{*,n} = g_{*,n} : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B),$$

para todo $n \geq 0$.

Demostración. Primero, recordemos que si $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, entonces existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$, y además $H(A \times I) \subseteq B$.

El operador prisma P_n de la prueba del teorema de invarianza por homotopía lleva $C_n(A)$ a $C_{n+1}(B)$, y por lo tanto induce un operador prisma relativo $P_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n+1}(Y, B)$.

Para ver esto, consideremos una cadena $c \in C_n(X, A)$. Entonces c es una suma de n -simplejos en X que evitan A , es decir, $c = \sum_i n_i \sigma_i$ donde cada $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$ es un n -simplejo que evita A . Entonces $P(c)$ es una suma de $(n + 1)$ -simplejos en

intervalo unitario. Esta homotopía satisface las condiciones requeridas: $H(x, 0) = x$ para todo $x \in D^n$ y $H(x, 1) = 0$ para todo $x \in D^n$, donde 0 es el origen en \mathbb{R}^n . Por lo tanto, D^n es contráctil y por el Ejemplo 3.7.1 sus grupos de homología son triviales en todas las dimensiones excepto en la dimensión cero. Por tanto, se tiene que $H_n(D^n) = H_{n-1}(D^n) = 0$ si $n - 1 > 0$. Así, se sigue que

$$H_n(D^n, S^{n-1}) \cong H_{n-1}(S^{n-1}),$$

si $n - 1 > 0$.

3.10 Escisión y sucesión de Mayer-Vietoris

En el campo de la homología singular, uno de los pilares fundamentales es el Teorema de Escisión. Este teorema establece una relación entre los espacios topológicos X , A y Z , donde A es un subespacio de X y Z es un subespacio de A tal que la clausura de Z en A es un retracto por deformación de la clausura de Z en X . Es una herramienta indispensable para el cálculo de los grupos de homología. Su importancia radica en su capacidad para simplificar los cálculos al permitirnos “escindir” o “cortar” un subespacio Z de un espacio dado X , reduciendo así la complejidad del problema. En otras palabras, nos permite ignorar ciertas partes “irrelevantes” de un espacio al calcular la homología. Esto es especialmente útil cuando el espacio X es complicado, pero la diferencia $X - Z$ es mucho más simple. En tales casos, el Teorema de Escisión nos permite calcular la homología de X a partir de la homología de $X - Z$.

La demostración del Teorema de Escisión en homología singular implica un desvío técnico bastante largo que involucra una construcción sofisticada conocida como subdivisión baricéntrica. Esta construcción permite calcular grupos de homología utilizando simples singulares más pequeños. Sin embargo, en el contexto de este trabajo, no realizaremos la demostración completa del Teorema de Escisión. Esto se debe a que hacerlo requeriría la introducción de muchas definiciones adicionales y algunas proposiciones cuyas demostraciones también son extensas. Este enfoque haría que el desarrollo del trabajo se volviera más largo y posiblemente más difícil de seguir. Sin embargo, para aquellos interesados en los detalles completos de esta demostración,

pueden consultar el libro de [Hatcher] en la página 119. Aunque no profundizaremos en la demostración completa aquí, es importante tener en cuenta la utilidad y la importancia del Teorema de Escisión en el estudio de la homología singular.

Teorema 3.10.1. (Escisión) Sean $Z \subseteq A \subseteq X$ tales que la clausura de Z está contenida en el interior de A , entonces

$$(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$$

induce isomorfismos

$$H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A)$$

para todo n .

A continuación se enunciará un teorema que será de mucha utilidad a la hora de realizar cálculos. En este trabajo, no proporcionaremos una demostración completa de la sucesión de Mayer-Vietoris. Aunque es un resultado fundamental en homología singular, su demostración requiere la introducción de varias definiciones y proposiciones adicionales que extenderían significativamente el alcance de este trabajo. Sin embargo, para aquellos interesados en los detalles completos de esta demostración, pueden consultar en ([6, pp. 125]). A pesar de que no profundizaremos en la demostración, veremos un ejemplo de aplicación de esta.

Teorema 3.10.2. (Sucesión de Mayer-Vietoris) Sea X un espacio topológico y sean $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $X = U \cup V$. Entonces la siguiente sucesión es exacta

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(U \cap V) & \xrightarrow{\alpha} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{\beta} & H_n(X) \\ & & & & & & \downarrow \partial \\ \hookrightarrow & H_{n-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\alpha} & \cdots & \longrightarrow & H_0(U \cap V) & \longrightarrow & H_0(U) \oplus H_0(V) \\ & & & & & & & \downarrow \\ \hookrightarrow & H_0(X) & \longrightarrow & 0 & & & & \end{array}$$

donde $\alpha(\sigma) = (\sigma, -\sigma)$, $\beta(\sigma, \tau) = \sigma + \tau$ y $\mathcal{U} = \{U, V\}$ y ∂ es el homomorfismo de conexión. Esta sucesión es llamada la **sucesión de Mayer-Vietoris**.

3.11 Homología de un cociente de espacios

Sea X un espacio topológico tal que $A \subseteq X$. Entonces el espacio cociente X/A consiste en “colapsar” A en un punto. Dado que X/A es un espacio topológico, entonces tiene sentido hablar de sus grupos de homología $H_n(X/A)$. Existe alguna relación con $H_n(X, A)$, en muchos casos, pero no siempre.

Definición 3.11.1. Un par topológico (X, A) , donde X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X , se dice que es un “par de retracts por deformación de alguna vecindad de X ” si existe un abierto U que contiene a A tal que A es retracts por deformación fuerte de U .

Decimos que (X, A) es una **pareja buena** o un **buen par** si A es cerrado y (X, A) es un par de retracts por deformación de alguna vecindad de X .

Teorema 3.11.1. Sea (X, A) un buen par. Entonces la proyección al cociente

$$q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$$

induce un isomorfismo

$$q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A),$$

para todo $n \geq 0$.

Demostración. Sea V una vecindad en X que se retrae a A . Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{f_1} & H_n(X, V) & \xleftarrow{f_3} & H_n(X - A, V - A) \\ \downarrow c & & \downarrow b & & \downarrow a \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{f_2} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow{f_4} & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A) \end{array}$$

La conmutatividad del diagrama anterior se sigue de las definiciones de las aplicaciones de homología y de cómo interactúan con las inclusiones y las aplicaciones de cociente.

Por ejemplo, la conmutatividad del cuadrado izquierdo del diagrama se sigue de la definición de las aplicaciones de homología inducidas por las inclusiones y la

retracción por deformación. La aplicación f_1 es la aplicación de homología inducida por la inclusión $(X, A) \hookrightarrow (X, V)$, y la aplicación c es la aplicación de homología inducida por la aplicación cociente $q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$. Estas aplicaciones son compatibles en el sentido de que aplicar primero f_1 y luego b es lo mismo que aplicar primero c y luego f_2 . Esto se debe a que ambas sucesiones de aplicaciones representan la misma operación topológica: pasar al cociente después de incluir A en V . De manera similar se sigue la conmutatividad del otro cuadrado.

Nuestra meta es probar que c es un isomorfismo. Para ello procedemos de la siguiente manera:

- La aplicación f_1 es un isomorfismo debido a la retracción por deformación de V en A . Esta retracción induce una equivalencia homotópica entre (X, A) y (X, V) . Esto se debe a que una retracción por deformación $r : X \rightarrow A$ es una aplicación continua tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$ y existe una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = r(x)$ para todo $x \in X$ y $H(a, t) = a$ para todo $a \in A$ y $t \in [0, 1]$. Esta homotopía induce una equivalencia homotópica entre (X, A) y (X, V) , y sabemos que una equivalencia homotópica induce un isomorfismo en homología.
- La aplicación f_2 es un isomorfismo por un argumento análogo al anterior. La retracción por deformación de A induce una retracción por deformación de V/A en A/A . Esto se debe a que la retracción por deformación se preserva bajo la operación de cociente. Por lo tanto, si $r : X \rightarrow A$ es una retracción por deformación, entonces la aplicación inducida $r' : X/A \rightarrow A/A$ también es una retracción por deformación. Por lo tanto, hay una equivalencia homotópica entre $(X/A, A/A)$ y $(X/A, V/A)$, y esta equivalencia induce un isomorfismo en homología.
- La aplicación f_3 es un isomorfismo por el teorema de escisión. Para aplicar este teorema, necesitamos que la clausura de A esté contenida en el interior de V , lo cual es cierto ya que A es cerrado. El teorema de escisión nos dice que la inclusión $(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo en homología para

cualquier subconjunto U de X tal que la clausura de U está contenida en el interior de A . En este caso, podemos tomar $U = A$, por lo que $X - U = X - A$ y $A - U = A - A$.

- La aplicación f_4 es también un isomorfismo por el teorema de escisión. En este caso, podemos tomar $U = A$, por lo que $X/A - U/A = X/A - A/A$ y $V/A - U/A = V/A - A/A$.
- La aplicación a es un isomorfismo porque q induce un homeomorfismo en el complemento de A . Esto se debe a que la aplicación cociente $q : X \rightarrow X/A$ es un homeomorfismo en el complemento de A , es decir, q restringida a $X - A$ es un homeomorfismo a $(X/A) - (A/A)$.

Para entender esto, consideremos la estructura del espacio cociente X/A como la unión de $(X - A)$ y A/A . Cada punto en X/A es o bien un punto en $X - A$, o bien el único punto en A/A . Por lo tanto, la restricción de q a $X - A$ es una biyección a $(X/A) - (A/A)$.

Antes de demostrar la continuidad de la inversa de $q|_{X-A}$, definamos los conjuntos abiertos en el espacio cociente X/A . Un conjunto U en X/A es abierto si y solo si $q^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X . Esta es la topología cociente inducida por q en X/A . En otras palabras, la topología en X/A es la más fina topología que hace que q sea una función continua.

Ahora, dado que $q|_{X-A}$ es un homeomorfismo, su inversa es simplemente $q^{-1}|_{(X/A)-(A/A)} : (X/A) - (A/A) \rightarrow X - A$. Para cualquier conjunto abierto U en $X - A$, $(q^{-1}|_{(X/A)-(A/A)})^{-1}(U) = q(U)$ es un conjunto abierto en $(X/A) - (A/A)$, porque q es un homeomorfismo y por lo tanto es continua. Por lo tanto, la inversa de $q|_{X-A}$ es continua.

Por la conmutatividad del diagrama, como a es un isomorfismo, entonces b también es un isomorfismo. Finalmente, como b y 1 son isomorfismos, c también debe ser un isomorfismo. Esto completa la prueba del teorema. \square

Corolario 3.11.1. Sea (X, A) un buen par. Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \widetilde{H}_n(A) & \xrightarrow{i_*} & \widetilde{H}_n(X) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \widetilde{H}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{H}_{n-1}(A) & \xrightarrow{j_*} & \widetilde{H}_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Demostración. Consideremos la sucesión exacta larga de la pareja (X, A)

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \downarrow & & \\ H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Ahora, tomamos homología reducida y se tiene que $\widetilde{H}_n(X, A) = H_n(X, A)$, por tanto:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \widetilde{H}_n(A) & \longrightarrow & \widetilde{H}_n(X) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \downarrow & & \\ H_n(X, A) & \longrightarrow & \widetilde{H}_{n-1}(A) & \longrightarrow & \widetilde{H}_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Pero ya hemos verificado que $H_n(X, A) \cong H_n(X/A, A/A) = \widetilde{H}_n(X/A)$ y esto finaliza la demostración. \square

Veamos un ejemplo de aplicación.

Ejemplo 3.11.1. Homología de una esfera

$$\widetilde{H}_i(S^n; R) = \begin{cases} R, & \text{Si } n = i; \\ 0, & \text{Si } n \neq i. \end{cases}$$

Para ver esto, hagamos inducción sobre n . Si $n = 0$, entonces $S^0 = \{1, -1\}$, entonces

$$H_i(S^0; R) = \begin{cases} R \oplus R & \text{Si } i = 0; \\ 0, & \text{Si } i \neq 0. \end{cases}$$

Pero entonces

$$\widetilde{H}_i(S^0; R) = \begin{cases} R, & \text{Si } i = 0; \\ 0, & \text{Si } i \neq 0. \end{cases}$$

Suponga ahora que el enunciado es cierto para algún n . Considere la pareja (D^{n+1}, S^n) , la cual en una buena pareja, pues S^n es cerrado. Esto es cierto ya que S^n es la frontera de D^{n+1} y la frontera de un conjunto siempre es un conjunto cerrado. Además, (D^{n+1}, S^n) es un par de retracts por deformación de alguna vecindad de D^{n+1} . Podemos considerar la aplicación de retracción $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$ definida por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ para $x \neq 0$ y $r(0) = 0$. Esta es una retracción continua de D^{n+1} sobre S^n y por lo tanto (D^{n+1}, S^n) es un par de retracts por deformación.

Dado que $S^{n+1} = D^{n+1}/S^n$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \widetilde{H}_i(S^n) & \longrightarrow & \widetilde{H}_i(D^{n+1}) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \delta & & \\ & \longleftarrow & \widetilde{H}_n(S^{n+1}) & \xrightarrow{\delta} & \widetilde{H}_{i-1}(S^n) & \longrightarrow & \widetilde{H}_{i-1}(D^{n+1}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Ahora, sabemos que la homología reducida del disco es cero, entonces se sigue que δ es en realidad un isomorfismo, por tanto se tiene que para todo i

$$\widetilde{H}_i(S^{n+1}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^n)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_i(S^{n+1}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^n) &= \begin{cases} R, & \text{Si } n = i - 1; \\ 0, & \text{Si } n \neq i - 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} R, & \text{Si } n + 1 = i; \\ 0, & \text{Si } n + 1 \neq i. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora, veamos otro ejemplo.

Ejemplo 3.11.2. Teorema del punto fijo de Brouwer: Toda función continua $f : D^n \rightarrow D^n$ tiene un punto fijo, esto es $f(x) = x$ para algún $x \in D^n$.

Por reducción al absurdo, suponga que $f : D^n \rightarrow D^n$ no tiene un punto fijo, esto es $f(x) \neq x$ para todo x de D^n . Entonces podemos determinar un vector $\overline{f(x)x} \neq 0$. Definamos ahora la función $\varphi : D^n \rightarrow S^{n-1}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \varphi : D^n &\rightarrow S^{n-1} \\ x &\mapsto \lambda(x)(x - f(x)) + f(x), \end{aligned}$$

donde $\lambda(x)$ es un escalar que depende del punto x y representa la proporción de vector $\overline{f(x)x}$ necesaria para intersecar a S^{n-1} . Ahora, φ será continua por tanto cuando lo sea $\lambda(x)$. Sabemos además que si $y = \varphi(x)$ se tiene que $\|y\| = 1$. por tanto

$$\|(x - f(x))\lambda(x) + f(x)\| = 1.$$

De lo cual se sigue que:

$$(x - f(x))^2 \lambda^2(x) + f^2(x) + 2(x - f(x))\lambda(x) \cdot f(x) = 1$$

Dónde $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ despejando $\lambda(x)$ tenemos:

$$\lambda(x) = \frac{-2 \sum_{i=1}^n [(x_i - f_i(x)) f_i(x)] \pm \sqrt{4 \sum_{i=1}^n (x_i - f_i(x))^2 - 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - f_i(x))^2 (f_j^2(x) - 1)}}{2 \sum_{i=1}^n (x_i - f_i(x))^2}.$$

Note que el denominador no puede ser completamente cero, porque sino f si tiene un punto fijo. Además sabemos que existen dos soluciones reales para λ , las dos intersecciones del vector con el borde del n-disco D^n . Lo que nos asegura que el discriminante $4 \sum_{i=1}^n (x_i - f_i(x))^2 - 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - f_i(x))^2 (f_j^2(x) - 1) > 0$. Por lo tanto λ es continua. A continuación, consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{\varphi} & S^{n-1} \\ \uparrow & \searrow Id & \\ S^{n-1} & & \end{array}$$

Aplicando H_{n-1} y considerando a $R = \mathbb{Z}$ se tiene

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(D^n) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_n(S^{n-1}) \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \nearrow Id \\
 H_{n-1}(S^{n-1}) & &
 \end{array}$$

Por tanto se tiene

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathbb{Z} \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \nearrow Id \\
 \mathbb{Z} & &
 \end{array}$$

Lo cual es una contradicción, lo que finaliza la prueba.

Ahora, veamos un ejemplo de aplicación de la sucesión de Mayer-Vietoris.

Ejemplo 3.11.3. Considere el siguiente espacio topológico X

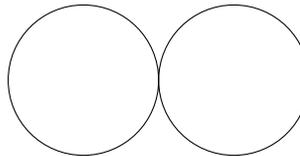


Figura 3.12: Espacio en forma de “ocho”

Procedamos a calcular todos sus grupos de homología. Por el Ejemplo 3.11.1, se sigue que

$$H_n(S^1; R) = \begin{cases} R, & \text{Si } n = 0, 1; \\ 0, & \text{Si } n \neq 0, 1. \end{cases}$$

Ahora, vamos a descomponer el espacio X como la unión de dos abiertos U, V de la siguiente manera

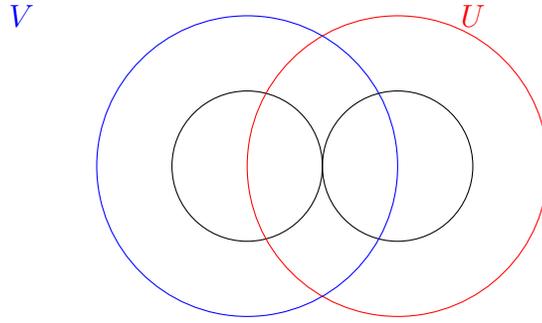


Figura 3.13: Descomposición de X como unión de U y V

Es decir, los abiertos U y V se ven de la siguiente manera

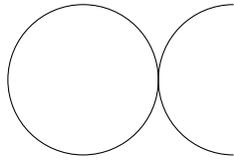


Figura 3.14: U

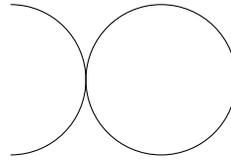


Figura 3.15: V

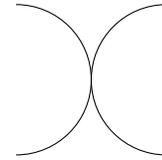
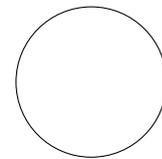
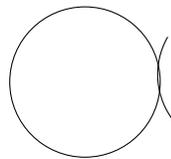
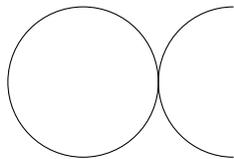
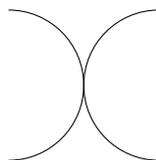


Figura 3.16: $U \cap V$

Ahora veamos de manera gráfica que el espacio U es homeomorfo a S^1 . Esto se verá como sigue



Por tanto, los grupos de homología del espacio U serán los mismos de S^1 . Análogamente se puede notar que el espacio V es homeomorfo a S^1 (*). Ahora, veamos de manera gráfica que $U \cap V$ es contráctil, es decir, podemos colapsar el espacio a un punto.



Por tanto, los grupos de homología del espacio $U \cap V$, serán los mismos grupos de homología del punto que calculamos en el Ejemplo 3.4 (**). Ahora, hagamos uso de la sucesión de Mayer- Vietoris para hacer los cálculos de los grupos de homología.

$$\begin{array}{ccccccc}
H_3(U \cap V) & \longrightarrow & H_3(U) \oplus H_3(V) & \xrightarrow{\alpha} & H_3(X) & \xrightarrow{\beta} & H_2(U \cap V) \\
\downarrow & & & & & & \downarrow \partial \\
H_2(U) \oplus H_2(V) & \xrightarrow{\alpha} & H_2(X) & \longrightarrow & H_1(U \cap V) & \longrightarrow & H_1(U) \oplus H_1(V) \\
\downarrow & & & & & & \downarrow \\
H_1(X) & \longrightarrow & H_0(U \cap V) & \longrightarrow & H_0(U) \oplus H_0(V) & \longrightarrow & H_0(X) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Figura 3.17: Aplicación de Mayer- Vietoris al espacio X .

Gracias a las observaciones hechas en (*) y (**), lo anterior se reduce como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \xrightarrow{\beta} 0 \\
\downarrow & & & & & & \downarrow \partial \\
0 \oplus 0 & \xrightarrow{\alpha} & H_2(X) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R \oplus R \\
\downarrow & & & & & & \downarrow \\
H_1(X) & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R \oplus R & \longrightarrow & R \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Del anterior diagrama podemos extraer la siguiente sucesión, la cual sabemos que es exacta porque la sucesión de Mayer - Vietoris es exacta en cada R -módulo.

$$0 \xrightarrow{f} H_n(X) \xrightarrow{g} 0.$$

Por la exactitud en $H_n(X)$ se tiene que

$$0 = \text{Im}(f) = \text{Ker}(g) = H_n(X).$$

Así, hemos obtenido que $H_n(X) = 0$ para todo $n \geq 2$. De manera similar, vamos a extraer la siguiente sucesión de la Figura 3.17.

$$0 \longrightarrow R \oplus R \xrightarrow{h} H_1(X) \xrightarrow{\delta} R \xrightarrow{k} R \oplus R \xrightarrow{w} R \longrightarrow 0.$$

Nuevamente, por exactitud de la sucesión, se tiene que $\text{Im}(\delta) = \text{Ker}(k)$. La función K está definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
k : R &\rightarrow R \oplus R \\
a &\mapsto (a, a).
\end{aligned}$$

Por tanto, por la misma definición de la función k es claro que la función es inyectiva, por tanto $\text{Ker}(k) = 0$, es decir, $\text{Im}(\delta) = 0$. Luego

$$0 \longrightarrow R \oplus R \xrightarrow{h} H_1(X) \longrightarrow 0.$$

Por los Ejemplos 2.1.3 y 2.1.1 se tiene que h es un isomorfismo, por lo que se sigue que $H_1(x) \cong R \oplus R$.

Finalmente, se obtuvo que los grupos de homología del espacio X están dados de la siguiente manera:

$$H_n(X; R) = \begin{cases} R, & \text{Si } n = 0; \\ R \oplus R, & \text{Si } n = 1; \\ 0, & \text{Si } n > 1. \end{cases}$$

Bibliography

- [1] M. Agoston, *Algebraic topology: a first course*. M. Dekker, 1976.
- [2] M. Atiyah, *Introducción al álgebra conmutativa*. Reverté, 1989.
- [3] G. Bredon, *Topology and geometry*. Springer, 2013.
- [4] D. Dummit, R. Foote, *Abstract Algebra*. Wiley, 2004.
- [5] J. Fraleigh, *A First course in abstract algebra*. Addison-Wesley, 2008.
- [6] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2005.
- [7] C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*. Cambridge University Press, 1980.
- [8] J. Lee, *Introduction to topological manifolds*. Springer, 2010.
- [9] M. Macho, *Topología Algebraica*. Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea, 2005.
- [10] V. Navarro, *Topología algebraica*. Universidad de Barcelona, Editorial 1999.
- [11] N. Ortégón, *Fundamentos de topología algebraica*. Universidad Nacional de Colombia, 2007.
- [12] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, 2009.
- [13] M. Stadler, *De la homología a la cohomología : Teoremas de Dualidad*. Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea, 2006.