UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

TESIS DE MAESTRÍA

Dinámica Lineal y Razón de Crecimiento de Funciones Enteras Para Operadores de no Convolución

---

Autor:
Wilson Mesa Morales

Director:
Dr. Blas Melendez Caraballo

Codirector:
Dr. Luis Enrríque Benítez Babilonia

Tesis presentada como requisito parcial
para optar al grado de Magíster en Matemáticas

Grupo de Investigación Matemáticas Unicórdoba
Departamento de Matemáticas y Estadística

29 de agosto de 2023

Dinámica Lineal y Razón de Crecimiento de Funciones Enteras Para Operadores de no Convolución

Tesis de Maestría aprobada por:

Dr. Blas Melendez Caraballo

Director de Tesis

Dr. Luis Enrique Benítez Babilonia

Codirector de Tesis

Dr. Michael Alexander Rincón Villamizar

Jurado de Tesis

Dr. Carlos Alberto Banquet Brango

Jurado de Tesis

Ricardo Guzman

Msc. Ricardo Miguel Guzmán Navarro

Jefe de departamento de Matemáticas y Estadística

Declaración de Autoría

Yo, **Wilson Mesa Morales**, declaro que esta tesis titulada, «Dinámica Lineal y Razón de Crecimiento de Funciones Enteras Para Operadores de no Convolución» y el trabajo presentado en ella son de nuestra autoría. Nosotros confirmamos que:

- Este trabajo se realizó total o principalmente mientras estábamos en la candidatura para un título de Maestría en Matemáticas en la Universidad de Córdoba. Si alguna parte de esta tesis ha sido presentada previamente para un título o cualquier otra titulación en esta Universidad o cualquier otra institución, esto ha sido claramente establecido. Cuando hemos consultado el trabajo publicado de otros, esto siempre se atribuye claramente. Donde hemos citado el trabajo de otros, la fuente siempre se ha dado. Con la excepción de tales citas, esta tesis es completamente nuestro propio trabajo. Reconocemos todas las principales fuentes de ayuda. Cuando la tesis se basa en el trabajo hecho por nosotros junto con otros, hemos dejado en claro exactamente la ayuda ofrecida y lo que nosotros hemos contribuido.

Firmado:

Fecha: **29 de agosto de 2023**

Resumen

En este trabajo se establecen tasas de crecimiento de funciones que resultan hipercíclicas o frecuentemente hipercíclicas para una clase importante de operadores de no convolución sobre el espacio de Fréchet de todas las funciones enteras. Asimismo, se investigan algunas propiedades clásicas de la dinámica lineal como caos, mezcla, recurrencia en cadena y superciclicidad para esta clase de operadores.

Abstract

In this work we establish growth rates of functions which are hypercyclic or frequently hypercyclic for an important class of non-convolution operators on the Fréchet space of all entire functions. Moreover, we also investigate some classical properties of linear dynamics such as chaos, mixing, chain recurrence and supercyclicity for this class of operators.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad de Córdoba y a todos los docentes de la Maestría en Matemáticas, muy especialmente a mi director, el doctor Blas Melendez Caraballo por su inconmensurable apoyo para la realización de este trabajo. Al director de la Maestría, el doctor Carlos Banquet por la paciencia extrema que tuvo. Y a mi codirector, el doctor Luis Enrrique Benítez Babilonia, por sus oportunos comentarios.

También, le doy gracias a mi familia, mis padres Octavio y Trinidad por el amor que me han demostrado siempre y ser una parte fundamental e indispensable en todas las etapas de mi vida. A mis compañeros de estudio: Calixto, Gabirel, Laura y Samuel, por sus valiosas colaboraciones en el transcurso de la maestría, por sus consejos y por sus siempre palabras de aliento.

Un agradecimiento especial al profesor Hugo Aduen Múskus, por sus siempre respuestas positivas ante dudas que aparecieron durante la realización de este trabajo. Por mostrarme y enseñarme desde el pregrado la verdadera belleza de las matemáticas.

Finalmente, le agradezco a Dayana, por estar para mí en los momentos más complejos de mi vida y ayudarme a superar con éxito situaciones emocionales que nunca pensé vivir y que pusieron el jaque la culminación de este trabajo. Asimismo a muchos amigos que siempre tuvieron una palabra de apoyo y aliento en los momentos difíciles: Lily, Vayra, Eliana, Óscar, Keimer, Héctor, Juan, entre otros.

Índice general

Dedicatoria: *A mi hija Sofía.*

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es estimar la forma en la que crecen las funciones enteras que son hipercíclicas o frecuentemente hipercíclicas para los operadores de no convolución $T_{\lambda,b}$ definidos en el espacio de Fréchet de todas las funciones enteras $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ por $T_{\lambda,b}f(z) = f'(\lambda z + b)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

La hiperciclicidad y el caos ocupan dos de los puestos del podium sobre las propiedades más importantes en el estudio de la dinámica de operadores lineales definidos en espacios de Banach o de Fréchet. Para el momento cuando inició el estudio de los sistemas dinámicos lineales, probablemente en el año 1982, con la tesis doctoral de Carol Kitai [13], los sistemas dinámicos caóticos llevaban dos décadas en pleno desarrollo y gozaban de una popularidad que trascendía más allá del ámbito científico.

Se tuvo mucho tiempo la idea errónea de que los sistemas lineales tienen un comportamiento predecible y que por tanto, el caos está íntimamente relacionado con la no linealidad. De hecho, en 2007 Leonard A. Smith en la introducción del primer capítulo de su libro titulado *Chaos: A very short introduction* [36] escribe: *Los sistemas caóticos no solo presentan una dependencia sensible, sino también otras dos propiedades: son deterministas y no lineales.* Se demostraría después que esta afirmación es falsa en dimensión infinita, es decir, existen operadores lineales caóticos, esto sin duda marca un hecho importante en el estudio de la Dinámica Lineal.

El término hipercíclico surge de la noción de operador cíclico, en relación al problema del subespacio invariante. El problema del subespacio invariante (con solo respuestas parciales hasta la fecha) pregunta si cualquier operador en un espacio de Banach (o de Hilbert) tiene subespacios cerrados invariantes no triviales. Si todo vector no nulo del espacio es cíclico para un operador T, entonces T no tiene subespacios cerrados invariantes no triviales. De manera análoga, el estudio de los operadores lineales hipercíclicos está ligado a la existencia de subconjuntos cerrados invariantes, esto es, dado un operador lineal $T : X \to X$, ¿existe un subconjunto cerrado no trivial $F \subset X$ tal que $T(F) \subset F$? Un operador tal que todo vector no nulo es hipercíclico no tiene subconjuntos cerrados invariantes no triviales.

Históricamente, los fundamentos de la Dinámica Lineal se investigan primero en un contexto general, y después en el entorno específico de una clase de operadores lineales versátiles que ha tenido una explosión de interés en las últimas décadas: los operadores de composición $T_f : \varphi \to \varphi \circ f$. Esta es una rama relativamente nueva del Análisis Funcional, como lo muestran las referencias clásicas [4, 21]. A nosotros, dentro de otras cosas, nos interesa estudiar algunas propiedades clásicas de los sitemas dinámicos lineales en una clase de operadores que no son de convolución.

Una vez establecido que un operador, definido por ejemplo en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, es hipercíclico o frecuentemente hipercíclico, es de interés saber cuán lento crecen las funciones que son hipercíclicas o frecuentemente hipercíclicas. Esto, se conoce como razón o tasa de crecimiento, y ha sido uno de los temas que más ha crecido en los últimos años, como lo muestra por ejemplo [6, 8, 12, 18, 29, 30]. Para el caso de los operadores de no convolución, $T_{\lambda,b}$, los cuales son frecuentemente hipercíclicos (y por ende hipercíclicos) en el caso $|\lambda| \geq 1$ [3] y supercíclicos en el caso $|\lambda| < 1$ [33]. No hay hasta la fecha resultados referentes a la razon de crecimiento de sus funciones hipercíclicas o frecuentemente hipercíclicas, es por esto que allí radica nuestro principal interés.

Otra parte que llama la atención a los investigadores es analizar propiedades estudiadas en general para sistemas dinámicos no necesariamente lineales en un contexto lineal, es decir estudiar estas propiedades para sistemas dinámicos lineales. En ese sentido nociones nuevas en la dinámica lineal son por ejemplo el *sombreamiento* y la *recuerrencia en cadena* [1, 23]. Estudiaremos entonces la recurrencia en cadena para los operadores $T_{\lambda,b}$, así como la caoticidad de los mismos.

La tesis está organizada en 3 capítulos, cada uno de ellos precedido por una breve introducción sobre el tema tratado.

En el Capítulo 1 se introduce el concepto general de espacio de Fréchet y se construye el espacio de las funciones enteras $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ el cual es un ejemplo clásico de un espacio de Fréchet y en el cual se han llevado acabo innumerables estudios de la dinámica lineal y no lineal. En la segunda sección del capítulo se definen algunas de las nociones más importantes estudiadas para operadores lineales definidos en espacios de Fréchet, como hiperciclicidad, hiperciclicidad frecuente, caos, recuerrencia en cadena y mezcla. Se enuncian caracterizaciones de las mismas y se mencionan resultados importantes en el área.

En el Capítulo 2 se definen los operadores de interés en nuestro estudio $T_{\lambda,b}$ y se establecen nuestros resultados principales, los cuales obedecen a una razón o tasa de crecimiento de funciones enteras que resultan hipercíclicas o frecuentemente hipercíclicas para los operadores de no convolución $T_{\lambda,0}$.

Finalmente, en el Capítulo 3, se muestra que los operadores de no convolución resultan ser caóticos y mezclantes, además se da un demostración directa de que en el caso $|\lambda| \geq 1$, dichos operadores son también recuerrentes en cadena, al final se da una demostracióin alterna a la conocida en [33] sobre la superciclicidad de los operadores en el caso $|\lambda| < 1$.

Capítulo 1

Dinámica Lineal en Espacios de Fréchet

El desarrollo actual de la Dinámica Lineal se lleva a cabo en los denominados ***espacios de Fréchet***. Dichos espacios son una generalización de los Espacios de Banach; ampliamente conocidos, estudiados y usados en el ámbito del Análisis Funcional. Empezamos haciendo un resumen detallado, pero no profundo sobre los espacios de Fréchet para estudiar los conceptos más importantes de la Dinámica Lineal. Recomendamos las referencias [4, 9, 21, 26] para comprender mejor el contenido de este capítulo.

1.1. Espacios de Fréchet

Los espacios normados fueron por mucho tiempo el eje central del desarrollo del Análisis Funcional. Pronto se observó que estos eran insuficientes para aplicar conceptos topológicos a la disciplina, por ejemplo, cuando se intentó establecer convergencia de sucesiones de funciones enteras o trabajar con espacios de funciones infinitamente diferenciables. En el año 1950 se empieza el estudio sistemático de los **espacios vectoriales topológicos**, una clase de espacios un poco menos restrictiva, aunque previamente, en la tesis de M. Fréchet habían ejemplos de dichos espacios. Un par de referencias importantes en esta parte son [9, 26].

Todos los espacios vectoriales considerados en este capítulo serán espacios vectoriales sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 1.1 *Sea* $(X, +, \cdot)$ *un espacio vectorial equipado con una topología* $\mathcal{T}$*, donde* $+ : X \times X \to X$ *es la suma vectorial y* $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ *es la multiplicación por escalar. Diremos que* $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$ *es un* ***espacio vectorial topológico (e. v. t.)*** *si las funciones* $+$ *y* $\cdot$ *resultan continuas respecto a la topología* $\mathcal{T}$*. En este caso, se dice que* $\mathcal{T}$ *es una* ***topología vectorial*** *o que es* ***compatible con la estructura lineal****. Usualmente, decimos que* X *es un e. v. t. en lugar de* $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$*.*

Diremos además que X *es un e. v. t.* ***separado*** *si la topología* $\mathcal{T}$ *es Hausdorff. Aquí, el espacio* $\mathbb{K}$ *tiene la topología usual y los espacios* $X \times X$ *y* $\mathbb{K} \times X$ *tienen la topología producto.*

Se puede demostrar que, como consecuencia de la compatibilidad entre la estructura topológica y la lineal, un espacio vectorial topológico es Hausdorff si, y solo si, todo conjunto de un punto es cerrado. Algunos autores consideran como hipótesis en la definición de e. v. t. que la topología sea Hausdorff.

Dados un e. v. t. X y $a \in X$, entenderemos por entorno de a, a cualquier subconjunto $U \subset X$ tal que $a \in \text{int}(U)$. Además, la continuidad de las funciones $+$ y $\cdot$ implica que si U es un entorno de cero, entonces para todo $a \in X$, el conjunto $a + U$ es un entorno de a. De esto se tiene que para conocer la topología de un e. v. t. basta conocer los entornos de cero, es decir, basta conocer una base local de entornos de cero.

Ejemplo 1.1 *Todo espacio normado equipado con la topología inducida por la norma es un e. v. t.*

Con este ejemplo se tiene una gran variedad de espacios vectoriales topológicos simples. Por ejemplo, el campo $\mathbb{K}$ como espacio vectorial usual, es un e. v. t.

Definición 1.2 *Sean* X *un e. v. t. y* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión en* X*. Se dice la sucesión* ***converge*** *a* $x \in X$ *si para todo entorno* U *de* x *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq N$*, se tiene que* $x_n \in U$*.*

Diremos que la sucesión es ***de Cauchy*** *si para todo entorno* U *de cero existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $m, n \geq \mathbb{N}$*, se tiene que* $x_n - x_m \in U$*.*

Definición 1.3 *Sea* X *un e. v. t.. Diremos que* X *es* ***completo****, si toda sucesión de Cauchy en* X *converge en* X*.*

Definición 1.4 *Sean X un espacio vectorial y $A, B \subset X$.*

(a) *Diremos que A es **convexo** si*

$$tA + (1-t)A \subseteq A, \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

(b) *Diremos que A es **equilibrado** si $\alpha A \subset A$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leq 1$.*

(c) *Diremos que A es **absorbente** si para todo $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha x \in A$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| < \delta$.*

A continuación un resultado clave para la construcción de topologías vectoriales.

Teorema 1.1 *Sean X un espacio vectorial y $\mathcal{B}_0$ una colección no vacía de subconjuntos de X que satisface:*

(I) *Cada $U \in \mathcal{B}_0$ es absorbente y equilibrado.*

(II) *Dado $U \in \mathcal{B}_0$ existe $V \in \mathcal{B}_0$ tal que $V + V \subset U$.*

(III) *Dados $U, V \in \mathcal{B}_0$, existe $W \in \mathcal{B}_0$ tal que $W \subseteq U \cap V$.*

Si $\mathcal{T}$ es la familia de todos los subconjuntos A de X tales que, dado $a \in A$ existe $U \in \mathcal{B}_0$ tal que $a + U \subseteq A$, entonces $\mathcal{T}$ es la única topología vectorial en X que admite $\mathcal{B}_0$ como base de entornos de cero.

Demostración. Veáse [9, Section 1.2]. ■

Luego de los e. v. t. siguen en la linea de estudio los los siguientes espacios:

Definición 1.5 *Sea X un e. v. t.. Diremos que X es un **espacio localmente convexo (e. l. c.)** si todo entorno de cero, contiene un entorno convexo de cero. En este caso diremos que la topología es localmente convexa.*

Como las bolas en los espacios normados son convexas se tiene que todo espacio normado es un e. l. c.

Para construir topologías localmente convexas, se tiene como consecuencia del Teorema 1.1 el siguiente resultado.

Corolario 1.1 *Sean X un espacio vectorial y $\mathcal{R}$ una colección de subconjuntos de X absorbentes, equilibrados y convexos tales que para todo $U, V \in \mathcal{R}$, existe $W \in \mathcal{R}$ tal que $W \subset U \cap V$. Si $\mathcal{A}_0$ es la colección de todos los conjuntos de la forma βU con $\beta \in \mathbb{R}^+$ y $U \in \mathcal{R}$, entonces existe una única topología sobre X con la que es un espacio localmente convexo y con la que $\mathcal{A}_0$ es una base local de entornos de cero.*

Como insumo fundamental para nuestro estudio, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2 ***(El espacio de las funciones enteras)*** *Consideremos el conjunto $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ definido por*

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} / f \text{ es entera}\}.$$

Si dotamos este conjunto con las operaciones usuales de suma de funciones complejas y producto por escalar se tiene que es un espacio vectorial. Ahora, para cada $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto y $\varepsilon > 0$ consideremos el conjunto $U_{\varepsilon,K}$ dado por

$$U_{K,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \;/\; |f(z)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } z \in K\}.$$

No resulta difícil demostrar que la colección

$$\mathcal{F}_0 = \{U_{K,\varepsilon} / K \subseteq \mathbb{C} \text{ compacto}, \varepsilon > 0\},$$

forma una base local de entornos de cero, según el Teorema 1.1, para una topología τ en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, la cual es conocida como la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Además, es simple verificar que para todo $K \subset \mathbb{C}$ compacto y todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $U_{K,\varepsilon}$ resulta ser convexo, equilibrado y absorbente. Por lo que, por el Corolario 1.1, $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es un e. l. c..

Todos los resultados referentes a e. l. c. se pueden particularizar al caso en que la topología sea generada por una familia de seminormas. A continuación definimos y analizamos lo que entenderemos por seminorma.

Definición 1.6 ***(Seminorma)*** *Sea X un espacio vectorial. Una función $p : X \to \mathbb{R}$ es llamada **seminorma** si verifica las siguientes propiedades:*

(a) $p(x) \geq 0$ *para todo $x \in X$;*

(b) $p(tx) = |t|p(x)$ *para todo* $t \in \mathbb{K}$ *y todo* $x \in X$;

(c) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *para todo* $x, y \in X$.

Una seminorma es llamada ***norma*** *si verifica que,* $p(x) = 0$ *implica* $x = 0$.

En los espacios vectoriales topológicos en general se trabaja con los entornos de cero como herramienta principal para verificar y estudiar propiedades de continuidad, convergencia y otras. En los e. l. c. usamos las seminormas, es decir, existe una relación estrecha entre seminormas y entornos. Las seminormas generan topologías localmente convexas, a través de la colección de conjuntos εU con $\varepsilon > 0$ y

$$U = \{x / p(x) < 1\},$$

donde p es una seminorma.

Ejemplo 1.3 *Si* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *es inmediato que la función* $p_n : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to [0, \infty)$ *definida por*

$$p_n(f) = \sup_{|z| \leq n} |f(z)|$$

resulta una seminorma sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. *La familia* $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *de seminormas genera la topología localmente convexa de la convergencia uniforme sobre compactos en* $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Teniendo en cuenta la relación entre seminormas y entornos, vemos que una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en un e. l. c. cuya topología es generada por la familia de seminormas $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x si , y solo si, $p_n(x_k - x) \to 0$, cuando $k \to \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular dada una sucesión de funciones $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, decimos que f_k converge a f en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ si, y solo si, f_k converge a f uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ si, y solo si,

$$p_n(f_k - f) \to 0, \quad \text{cuando} \quad k \to \infty, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definición 1.7 ***(Espacio de Fréchet)*** *Sea X un e. l. c.. Si su topología es inducida por una métrica completa, diremos que X es un* ***Espacio de Fréchet***.

A continuación una lista de ejemplos de espacios de Fréchet.

Ejemplo 1.4 (a) *Todo espacio de Banach es un espacio de Fréchet.*

(b) *El espacio de las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$, denotado por $C(\mathbb{R})$, con las seminormas defindas por*

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

para $f \in C(\mathbb{R})$ y $K \subset \mathbb{R}$ compacto, es un espacio de Fréchet.

(c) *El espacio de las funciones diferenciables de clase C^k en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, denotado por $C^k(\Omega)$, con la familia de seminormas*

$$p_{K,k}(f) = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} + \cdots + \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \right|$$

para $f \in C^k(\Omega), K \subset \Omega$ compacto, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, es un espacio de Fréchet.

(d) *El espacio de todas la sucesiones sobre el campo $\mathbb{K}$, denotado por ω, definido por*

$$\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} / x_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\},$$

con la familia de seminormas

$$p_n(x) = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|,$$

para $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \omega$ y $n \in \mathbb{N}$, es un espacio de Fréchet.

(e) *El espacio de las funciones enteras $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ con la familia de seminormas*

$$p_n(f) = \sup_{|z| \leq n} |f(z)|$$

para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $n \in \mathbb{N}$, es un esapcio de Fréchet.

Finalizaremos esta sección mostrando que en realidad, $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es un espacio de Fréchet. Antes enunciaremos un resultado clásico de metrizabilidad.

Teorema 1.2 *Sea X un e. l. c. de Hausdorff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) *Existe una métrica en X que define la topología de X, es decir, X es metrizable.*

(b) *Existe una base numerable de entornos de cero en X.*

(c) *Existe una sucesión de seminormas que define la topología en X.*

Nota. la sucesión de la parte (c) se puede suponer creciente.

Demostración. Veáse [9, Section 1.6]. ■

Por otro lado, si tenemos una sucesión creciente $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de seminormas que inducen la topología de un espacio de Fréchet X, entonces

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x-y)\}, \quad \text{para todo } x, y \in X, \tag{1.1}$$

define una métrica en X. Además, esta métrica es **invariante bajo traslaciones**, es decir,

$$d(x,y) = d(x+z, y+z), \quad \text{para todo } x, y, z \in X.$$

También, para cualquier $x, y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que: si $p_n(x-y) < \frac{1}{2^n}$, entonces $d(x,y) < \frac{2}{2^n}$. De esto se deduce que, dado $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x, y \in X$

$$p_n(x-y) < \delta/2 \implies d(x,y) < \delta.$$

Finalizamos esta sección verificando que en realidad $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es un espacio de Fréchet.

Ejemplo 1.5 ***(Espacio de las funciones enteras).*** *Consideremos el e. l. c. $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ cuya topología es generada por la familia creciente de seminormas*

$$p_n(f) = \sup_{|z|\leq n} |f(z)|, \quad \textit{para } f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Veamos que es un espacio de Fréchet. En efecto: para verificar que sea metrizable solo falta mostrar que es de Hausdorff. Esto se tiene si $\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker p_n = \{0\}$, donde, lo cual es inmediato, pues si $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker p_n$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $p_n(f) = 0$, en particular, $\sup_{|z|\leq 1} |f(z)| = 0$, de donde $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ (por ser f entera) y por ende se tiene la contenencia no trivial. Sigue entonces del Teorema 1.2 que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es metrizable. Falta probar que es completo, sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, sigue que $\{p_n(f_k)\}_{k=1}^{\infty}$ es *una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto,*

$$\left\{ f_k|_{\overline{D(0,n)}} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach de las funciones continuas sobre $\overline{D(0,n)}$, $C\left(\overline{D(0,n)}\right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $f_{(n)} \in C\left(\overline{D(0,n)}\right)$ tal que

$$p_n(f_k - f_{(n)}) \to 0, \qquad \text{cuando } k \to \infty.$$

Por el Teorema de Weierstrass, cada $f_{(n)}$ es holomorfa en el disco $D(0,n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, defina $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = f_{(n)}(z), \qquad \text{si } |z| \leq n, \quad \text{para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Observe que f está bien definida, pues si $z \in \mathbb{C}$ y $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$ tal que $|z| \leq m < n$, entonces

$$f_{(n)}(z) = \lim_{k\to\infty} f_k|_{\overline{D(0,n)}}(z) = \lim_{k\to\infty} f_k|_{\overline{D(0,m)}}(z) = f_{(m)}(z).$$

Además, f es entera, pues cada $f_{(n)}$ es holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$p_n(f_k - f) = p_n(f_k - f_{(n)}) \to 0, \qquad \text{cuando } k \to \infty.$$

Así, $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es un espacio completo y por ende de Fréchet.

1.2. Dinámica Lineal

La Dinámica Topológica o la Teoría de Sistemas Dinámicos es el estudio matemático del comportamiento a largo plazo de sistemas en evolución, entendidos como funciones que actúan sobre determinados espacios. Se originó a finales del siglo XIX y en su etapa inicial, se centró principalmente en sistemas no lineales (es decir, sistemas generados por funciones no lineales), considerados más aptos, que los lineales, para poseer comportamientos extraños y, por tanto, más intrigantes desde el punto de vista dinámico. Un paso decisivo en sentido contrario se dio en la primera mitad del siglo XX, cuando los estudios demostraron que incluso los sistemas lineales pueden comportarse de forma impredecible, lo que dio lugar al nacimiento de la llamada dinámica lineal.

Empezamos esta sección de resultados recordando que en todo espacio topológico, una función es **continua** si devuelve abiertos en abiertos. En el contexto de los espacios de Fréchet usaremos la siguiente caracterización para operadores lineales continuos.

Proposición 1.1 *Sean X, Y espacios de Fréchet con $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ familias de seminormas que definen la topología de X e Y, respectivamente. Un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y solo si, dado $q \in \mathcal{Q}$, existen $p \in \mathcal{P}$ y $c > 0$ tales que*

$$q(Tx) \leq cp(x)$$

para todo $x \in X$.

Como ejemplo, exhibimos un par de operadores continuos en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Ejemplo 1.6 *Los siguientes operadores son continuos:*

(a) *Sea $a \in \mathbb{C}$. El operador $T_a : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definido por*

$$T_a f(z) = f(a + z),$$

*para todo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{C}$, es conocido como el **operador de traslación**.*

(b) *El operador $D : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definido por*

$$Df(z) = f'(z)$$

*para todo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{C}$, es conocido como el **operador diferenciación**.*

Algunas de las nociones más importantes y estudiadas en la dinámica lineal, son distintos niveles de *ciclidad* de un operador.

En el resto de la sección, X representa un espacio de Fréchet separable de dimensión infinita sobre $\mathbb{C}$. Denotemos por $\mathcal{L}(X)$ el espacio de todos los operadores $T : X \to X$ lineales y continuos. Para el lector interesado en profundizar este tema, recomendamos las referencias [4, 21].

1.2.1. Superciclicidad e Hiperciclicidad

Los operadores hipercíclicos fueron inicialmente estudiados motivándose en el *problema del subespacio invariante*. Existe relación directa con el concepto de vector cíclico. Dicho problema, con solo soluciones parciales hasta hoy, pregunta si todo operador de un espacio de Hilbert posee un subespacio cerrado invariante distinto de los triviales dados por $\{0\}$ y el espacio entero. Existen contraejemplos para operadores en espacios no reflexivos como ℓ^1. De la misma forma tenemos un vínculo entre la hiperciclicidad y *el problema del subconjunto invariante*: ¿posee todo operador de un espacio de Hilbert un subconjunto cerrado invariante distinto de los triviales dados por $\{0\}$ y todo el espacio? La relación está determinda en el sentido que, un operador no tiene subconjuntos cerrados invariantes no triviales si, y solo si, todo vector no nulo es hipercíclico.

Definición 1.8 *Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ y $x \in X$. La **órbita** de x bajo T es el conjunto denota por* $\mathrm{orb}(x, T)$ *y definido por*

$$\mathrm{orb}(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\} = \{T^n x : n \geq 0\}.$$

Definición 1.9 ***(Niveles Ciclicidad)*** *Decimos que un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ es:*

(I) ***Cíclico*** *si existe $x \in X$ tal que el generado lineal de la órbita es denso en X, es decir si,*

$$\overline{\mathrm{span}(\mathrm{orb}(x, T))} = X.$$

(II) ***Supercíclico*** *si existe $x \in X$ tal que la **órbita proyectiva** sea densa en X, es decir si,*

$$\overline{\{\alpha T^n x : \alpha \in \mathbb{C}, n \geq 0\}} = X.$$

(III) ***Hipercíclico*** *si existe $x \in X$ tal que su órbita es densa en X, es decir si,*

$$\overline{\mathrm{orb}(x,T)} = X.$$

*En cada caso, los vectores que satisfacen las definiciones reciben unos nombres especiales. Por ejemplo en el caso de la hiperciclicidad, se dice que x es un **vector hipercíclico** para T y denotamos el conjunto de los vectores hiperciclicos para T por $HC(T)$.*

Respecto a los conceptos anteriores se cumple las siguientes implicaciones:

$$\text{(iii)} \Longrightarrow \text{(ii)} \Longrightarrow \text{(i)}. \tag{1.2}$$

En el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, introducido en la sección anteiror se establecieron los primeros ejemplos de operadores hipercíclicos. En 1929, G. D. Birkhoff [7] demostró un resultado que implica que para todo $a \in \mathbb{C}$, el operador traslación es hipercíclico. Lo mismo probó en 1952, G. R. MacLane [28] para el operador diferenciación en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Estos resultados fueron unificados, generalizados y extendidos en 1991 por G. Godefroy y J. H. Shapiro [19], probando que todo operador de convolución $L : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ que no es un múltiplo escalar de la identidad es hipercíclico. Un **operador de convolución** es un operador que conmuta con las traslaciones. Los operadores de Birkhoff (traslación) y MacLane (diferenciación) son trivialmente operadores de convolución.

Una de las técnicas más usadas en el estudio de hiperciclicidad, es el célebre **Teorema de transitividad de Birkhoff** [7]. Usando este resultado se demuestra, en particular, que los operadores traslación y derivación son efectivamente operadores hipercíclicos. Otra técnica extremadamente útil para establecer hiperciclicidad es el criterio de hiperciclicidad [17], el cual mejora el tan conocido criterio de Kitai [13].

Aunque en nuestro estudio haremos uso de Criterio de Hiperciclidad Para Sucesiones enunciado a conitnuación [21, Theorem 3.24]. Una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores linelaes en X resulta hipérciclica si existe $x \in X$ cuya órbita bajo la sucesión es densa en X, donde

$$\mathrm{orb}(x,(T_n)) = \{T_n x : n \in \mathbb{N}_0\}$$

Teorema 1.3 ***(Criterio de Hiperciclicidad Para Sucesiones)*** *Sean X, Y espacios de Fréchet separables y $T_n : X \to Y$, con $n \geq 0$, una sucesión de operadores lineales. Si existen subconjuntos $X_0 \subset X$ y $Y_0 \subset Y$ densos, una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos y funciones $S_{n_k} : Y_0 \to X$, $k \geq 1$, tal que para cualquier $x \in X_0$ e $y \in Y_0$ se cumple*

(I) *$T_{n_k}x \to 0$, cuando $k \to \infty$;*

(II) *$S_{n_k}y \to 0$, cuando $k \to \infty$;*

(III) *$T_{n_k}S_{n_k}y \to y$, cuando $k \to \infty$.*

Entonces $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es hipercíclica en X.

Existen versiones análogas a los teoremas anteriores para demostrar que un operador resulta ser supercíclico. Un criterio análogo criterior de hiperciclicidad, pero en el contexto de los espacios de Banach se puede consultar en [4, Theorem 1.14]. Lo más parecido al Teorema criterio de hiperciclicidad en el contexto más general de los espacios de Fréchet, necesita el concepto de núcleo generalizado denso.

Definición 1.10 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. El* **núcleo generalizado** *de T es definido por*

$$Y := \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker T^n.$$

Aquí ker *T denota el núcleo del operador T.*

Teorema 1.4 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ con un núcleo generalizado denso. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) *T tiene rango denso;*

(II) *T es supercíclico;*

(III) *T satisface el siguiente* ***Criterio de superciclicidad:*** *Existe una secuencia creciente de enteros positivos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ y una secuencia $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$ para la cual hay*

   (1) *Un subconjunto denso $X_0 \subset X$ tal que $\lambda_{n_k}T^{n_k}x \to 0$ para cada $x \in X_0$.*

(2) *Un subconjunto denso* $Y_0 \subset X$ *y una sucesión de funciones* $S_{n_k} : Y_0 \to X$ *tal que*

(a) $\left(\frac{1}{\lambda_{n_k}}\right) S_{n_k} y \to 0$ *para cada* $y \in Y_0$.

(b) $T^{n_k} S_{n_k} y \to y$ *para cada* $y \in Y_0$.

Demostración. Ver [5, Corollary 3.3]. ∎

1.2.2. Hiperciclicidad Frecuente

Un operador es hipercíclico si existe un vector x tal que para todos los abiertos U de la topología, se tiene que $U \cap \operatorname{orb}(x, T) \neq \emptyset$. Se puede decir entonces que un operador es hipercíclico, cuando existe un vector que *visita* a todos los abiertos de la topología. Nos interesamos ahora por aquellos operadores que tienen vectores que no solo visitan los abiertos, sino que además lo hacen *frecuentemente*. Para ello, primero debemos introducir nociones que nos permitan entender a qué nos referimos con frecuentemente. Comenzaremos con una definición que nos permite formalizar esta idea.

Definición 1.11 *Sea* $A \subset \mathbb{N}_0$. *La* ***densidad inferior*** *de* A, *denotada por* $\underline{\operatorname{dens}}(A)$, *se define como*

$$\underline{\operatorname{dens}}(A) = \liminf_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{0 \leq n \leq N : n \in A\}}{N+1}.$$

Ejemplo 1.7 *Sea B el conjunto formado por los números enteros no negativos pares, es decir que* $B = \{2k : k \in \mathbb{N}_0\}$. *Para todo* $N \in \mathbb{N}$ *se cumple que*

$$\operatorname{card}\{0 \leq n \leq N : n \in B\} \geq \frac{N+1}{2}.$$

Por lo tanto

$$\underline{\operatorname{dens}}(B) = \liminf_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{0 \leq n \leq N : n \in B\}}{N+1} \geq \liminf_{N\to\infty} \frac{N+1}{2(N+1)} = \frac{1}{2} > 0.$$

Observación 1.1 *En general. Sea* $A \subset \mathbb{N}_0$. *Si* $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es la sucesión creciente de enteros que forman* A *y* $n_k \leq N < n_{k+1}$ *entonces*

$$\frac{k}{n_{k+1}} \leq \frac{\operatorname{card}\{0 \leq n \leq N : n \in A\}}{N+1} \leq \frac{k}{n_k},$$

esto implica que $\underline{\text{dens}}(B) = \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}$. *Así A tiene densidad inferior positiva si, y solo si,* $\{\frac{n_k}{k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es acotada.*

Definición 1.12 ***(Hiperciclicidad Frecuente)*** *Un operador* $T \in \mathcal{L}(X)$ *se dice* ***Frecuentemente hipercíclico*** *si existe algún* $x \in X$ *tal que, para cualquier subconjunto abierto no vacío* U *de* X

$$\underline{\text{dens}}(\{n \in \mathbb{N}_0; T^n x \in U\}) > 0.$$

En tal caso se dice que x *es un* ***vector frecuentemente hipercíclico*** *para* T *y denotamos el conjunto de los vectores frecuentemente hiperciclicos para* T *por* $FHC(T)$.

La Observación 1.1 implica el siguiente resultado.

Proposición 1.2 *Un vector* $x \in X$, *es frecuentemente hipercíclico para un operador* $T \in \mathcal{L}(X)$ *si, y solo si, para cualquier* $U \subset X$ *abierto no vacío, existe una sucesión estrictamente creciente* $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *de enteros positivos tal que*

$$\frac{n_k}{k} \leq C \quad y \quad T^{n_k}x \in U, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \text{ y alguna } C > 0.$$

Demostración. Ver [21, Pág. 237, Proposition 9.3]. ■

Observación 1.2 *La Proposición anterior implica que si* $x \in X$ *es tal que* $x \in FHC(T)$ *para algún operador* $T \in \mathcal{L}(X)$ *y* $\xi > 0$, *entonces* $\xi x \in FCH(T)$.

Todos los operadores antes mencionados son, de hecho, frecuentemente hipercíclicos.

Definición 1.13 ***(F-norma)*** *Sea X un e. l. c., una función* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ *es una F-norma si satisface las siguientes propiedades:*

(I) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in X$;

(II) $\|\alpha x\| \leq \|x\|$ *para todo* $x \in X$ *siempre que* $|\alpha| \leq 1$;

(III) $\lim_{\alpha\to 0} \|\alpha x\| = 0$.

(IV) $\|x\| = 0$, *implica* $x = 0$.

Toda norma, es claramente una F-norma.

Definición 1.14 *Sea X un espacio de Fréchet. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\omega,n}$ con $\omega \in \Omega$ y $x_{\omega,n} \in X$ es llamada uniformemente incondicionalmente convergente si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier conjunto finito $E \subset \{N, N+1, N+2, \ldots\}$ se tiene que*

$$\left\| \sum_{n \in E} x_{\omega,n} \right\| < \varepsilon, \qquad \text{para todo } \omega \in \Omega.$$

Aquí, $\| \cdot \|$ es una F-norma que induce la topología del espacio de Fréchet.

La siguiente proposición es clave para obtener uno de nuestros resultados principales y se puede encontrar en [21, Example 11.8]

Proposición 1.3 *Sea X un espacio de Fréchet. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\omega,n}$ con $\omega \in \Omega$ y $x_{\omega,n} \in X$ es uniformemente incondicionalmente convergente si para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $y_n \in X, a_{\omega,n} \in \mathbb{K}$ y $c_n > 0$ tale que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$ converge incondicionalmente, y además para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $\omega \in \Omega$ se cumple que*

$$x_{\omega,n} = a_{\omega,n} y_n, \qquad \text{con} \quad |a_{\omega,n}| \leq c_n.$$

Haremos uso del **Criterio de Hiperciclicidad Frecuente para sucesiones**, cuya demostración se puede encontrar en [10, Theorem 2.4].

Teorema 1.5 ***(Criterio de Hiperciclicidad Frecuente para sucesiones)*** *Sean X e Y espacios de Fréchet separables y $T_n : X \to Y$, con $n \geq 0$ una sucesión de operadores lienales. Si existe un subconjunto denso Y_0 de Y y sucesiones $S_n : Y_0 \to X$ con $n \geq 0$, tal que para cualquier $y \in Y_0$ se cumple que:*

(I) *$\sum_{n=1}^{m} T_m S_{m-n} y$, converge incondicionalmente en Y, uniformemente para $m \geq 0$;*

(II) *$\sum_{n=1}^{\infty} T_m S_{m+n} y$, converge incondicionalmente en Y, uniformemente para $m \geq 0$;*

(III) *$\sum_{n=1}^{\infty} S_n y$ converge incondicionalmente en X;*

(IV) *$T_n S_n y \to y$, cuando $n \to \infty$,*

entonces, la sucesión de operadores $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es frecuentemente hipercíclica en X.

Nótese que en la parte (I), *la suma finita puede entenderse como series infinitas añadiendo términos iguales a* 0.

1.2.3. Otras Propiedades de la Dinámica Lineal

Algunas de las propiedades más estudiadas para sistemas dinamicos lineales son por ejemplo: la mezcla topológica, la expansividad, el sombreado, la hiperbolicidad, la hiperbolicidad generalizada y, en particular, el caos. En las últimas décadas, el término caos se ha aplicado a una variedad de sistemas lineales que muestran algún tipo de comportamiento extraño o aleatorio. Esta variedad de enfoques impide una definición única de la palabra *caos*, dando lugar a multitud de nociones, como el caos de Devaney y el caos de Li-Yorke, por citar solo algunas de ellas. Nos enfocamos aquí, solo en la primera.

A continuación damos la defincíón de algunas propiedades en dinámica lineal que vamos a estudiar más adelante.

Definición 1.15 *Sean X un espacio de Fréchet y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador.*

(a) *El operador T es llamado* ***caótico*** *si es hiperciclico y tiene un conjunto denso de puntos períodicos.*

(b) *El operaodr T es llamado* ***mezclante*** *si para todo para de subconjuntos abiertos no vacíos U, V existe $N \geq 0$ tal que*

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset, \quad \textit{para todo } n \geq N.$$

Una propiedad recientemente estudiada en la dinámica lineal es la de **recurrencia en cadena**, a continuación establecemos su definición en el contexto de los espacios métricos.

Definición 1.16 *Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función. Dado $\delta > 0$, una* ***δ-pseudotrayectoria*** *de f es una sucesión finita o infinita, $\{x_n\}_{i \leq n \leq k}$ en X, con $-\infty \leq i < k \leq \infty$ y $k - i \geq 3$, tal que*

$$d\left(f(x_n), x_{n+1}\right) \leq \delta, \quad \textit{para todo } i < n < k - 1.$$

Una δ-pseudotrayectoria finita de la forma $\{x_n\}_{n=0}^{k}$ también se denomina ***δ-cadena*** *para f de x_0 a x_k y el número k es su* ***longitud***.

Ejemplo 1.8 *Presentamos dos ejemplos de δ-pseudotrayectorias, uno en el contexto general de espacios métricos y otro en el contexto lineal, respectivamente.*

(a) *Considere $\mathbb{R}$ como espacio métrico con la métrica definda por el valor absoluto y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por*

$$f(x) = (x + \pi)|\operatorname{sen} x|, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por

$$x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}_0,$$

es una δ-pseudotrayectoria de f. En efecto, basta notar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$f(x_n) = (x_n + \pi)|\operatorname{sen}(x_n)| = \left((2n+1)\frac{\pi}{2} + \pi\right)|(-1)^n| = (2n+3)\frac{\pi}{2} = x_{n+1}.$$

Así, dado $\delta > 0$, se sigue que

$$|f(x_n) - x_{n+1}| = |x_{n+1} - x_{n+1}| = 0 < \delta, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) *Considere D el operador diferenciación definido en la parte* (b) *del Ejemplo 1.6. La sucesión $\{f_n\}_{0\leq n\leq 4}$ en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ definida como*

$$f_0(z) = \operatorname{sen} z,\ f_1(z) = \cos z,\ f_2(z) = -\operatorname{sen} z,\ f_3(z) = -\cos z,\ y\ \ f_4(z) = \operatorname{sen} z,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, es una δ-cadena para D de longitud 4, para todo $\delta > 0$.

Definición 1.17 *Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que una función $f : X \to X$ es **recurrente en cadena** (resp. **transitiva en cadena**) si para cada $x \in X$ (resp. $x, y \in X$) y cada $\delta > 0$, existe una δ-cadena, de x a sí misma (resp. de x a y).*

Una conocida relación de equivalencia entre sistemas dinámicos es la conjugación, esencial para clasificar el comportamiento de los sistemas dinámicos. Finalizamos esta sección introduciendo el concepto de operadores cuasiconjugados, que aplicaremos en el Capítulo 3.

Definición 1.18 *Sean X, Y espacios de Fréchet y $T \in \mathcal{L}(X), S \in \mathcal{L}(Y)$.*

(a) *T es llamado* ***cuasiconjugado*** *de S si existe una función continua $h : Y \to X$, con rango denso, tal que $T \circ h = h \circ S$*

(b) *Si h es un homeomorfismo, entonces S y T se dicen* ***conjugados****.*

El conjugado es claramente una relación de equivalencia entre sistemas dinámicos, y los sistemas dinámicos conjugados tienen el mismo comportamiento en su dinámica. Lo que hace que esta noción sea aún más interesante es el hecho de que de ninguna manera es siempre obvio si dos sistemas son conjugados o no.

Las propiedades definidas hasta aquí se preservan bajo cuasiconjugación, es decir, si S y T son operadores cuasiconjugados, entonces tienen las mismas propiedades dinámicas (caos, mezcla, recurrencia en cadena, hiperciclicidad). Estos resultados se pueden encontrar en [21, Chapter 1].

Capítulo 2

Razón de Crecimiento Para Operadores de no Convolución

Se tiene un interés notable por determinar las posibles tasas o razones de crecimiento de funciones enteras hipercíclicas o frecuentemente hipercíclicas para una gran variedad de operadores, por ejemplo. Para los operadores clásicos de diferenciación y traslación se puede ver [20, 34, 35], trabajos que fueron generalizados y mejorados en cierto sentido por Blasco, Bonilla y Grosse-Erdmann en [8]. También para el operador de Dunkl [6] se hicieron estimativas importantes para sus funciones hipercíclicas y frecuentemente hipercíclicas. Otras referencias importantes en este sentido son [11, 12, 29].

En esa misma dirección, pero con otros interrogantes, se ha empezado a preguntar por la razón de crecimiento óptima, en el sentido de una tasa de crecimieto mínima condicionada a unas funciones pesos. Así por ejemplo, los resultados de Blasco, Bonilla y Grosse-Erdmann en [8] fueron mejorados por Drasin y Saksman en [14] para el caso del operador diferenciación. Otras tasas de crecimiento óptimas se han estudiado recientemente, veáse por ejemplo [18, 30].

2.1. Antecedentes

Durante algún tiempo el desarrollo de la Dinámica Lineal se centró en una clase de operadores llamados operadores de convolución. Un resultado demostrado por G. Godefroy y J. H. Shapiro en [19] recoge los ejemplos clásicos de operadores hipercíclicos definidos en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, en los operadores de convolución.

Surgiría entonces el interés sobre la existencia de operadores de no convolución en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ hipercíclicos. Esto es, ¿existen operadores de no convolución hipercíclios en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$? Este interrogante tuvo respuesta positiva en 2004 por Aron y Markose [3], quienes introdujeron los operadores $T_{\lambda,b} : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definidos a continuación.

Definición 2.1 *Sean $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ el espacio de las funciones enteras y $\lambda, b \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \geq 1$. Definimos el operador $T_{\lambda,b} : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ por $T_{\lambda,b}f(z) = f'(\lambda z + b)$, para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{C}$. Estos operadores son de convolución si, y solamente si, $\lambda = 1$.*

Aron y Markose demostraron que $T_{\lambda,b}$ es hipercíclico cuando $|\lambda| \geq 1$ y $b \in \mathbb{C}$, y que no es hipercíclico cuando $|\lambda| < 1$, aunque su demostración presentaba errores que posteriormente fueron corregidos por Fernández y Hallack en 2005 [16], y León-Saavedra y Romero-de la Rosa en 2014 [27]. Estos operadores $T_{\lambda,b}$ han sido estudiados por varios autores (vea por ejemplo [16, 27, 31, 32]). De hecho, en el año 2015, Muro, Pinasco y Savransky [31, Proposition 2.3] demostraron un resultado que implica la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \geq 1$ y $b \in \mathbb{C}$, el operador $T_{\lambda,b}$ es frecuentemente hipercíclico en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Al igual que la propiedad de la hiperciclicidad para operadores en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, uno puede preguntarse e investigar la existencia de funciones frecuentemente hipercíclicas para los operadores $T_{\lambda,b}$ con algún tipo de crecimiento exponencial.

El Teorema de Duyos-Ruiz [34, Theorem 4.23] nos dice que las funciones hipercíclicas para los operadores de traslación pueden crecer de forma arbitraria en el infinito. Pero esto ya no es cierto en el contexto más amplio de funciones frecuentemente hipercíclicas [21, Theorem 9.26].

A fin de precisar los referentes que motivaron nuestro estudio, presentamos las condiciones de crecimiento de funciones hipercíclicas y frecuentemente hipercíclicas para el operador diferenciación en términos de las L^p-medias, (veáse los Teoremas 2.1 y 2.2 abajo).

Dada una función entera f y $1 \leq p < \infty$, recordamos la L^p-media de f

$$M_p(f,r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{it}\right)\right|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad r > 0,$$

y

$$M_\infty(f,r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|, \qquad r > 0.$$

Respecto a las L^p-medias se tiene que si $1 \leq p \leq q < \infty$, entonces

$$M_p(f,r) \leq M_q(f,r) \leq M_\infty(f,r).$$

Las L^p- medias son indispensables en el estudio de los conocidos espacios de Hardy, espacios que resultan ser de Banach y que se usan en el Análisis Armónico [15, 25].

Teorema 2.1 [8, Theorem 2.1] Sea $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Para cualquier función $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ tal que $\phi(r) \to \infty$, cuando $r \to \infty$, existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ hipercíclica para el operador diferenciación tal que

$$M_p(f,r) \leq \phi(r)\frac{e^r}{\sqrt{r}}, \quad \text{para } |z| = r > 0 \text{ suficientemente grande.}$$

(b) No existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ hipercíclica para el operador diferenciación tal que

$$M_p(f,r) \leq C\frac{e^r}{\sqrt{r}}, \quad r > 0$$

con alguna constante $C > 0$.

Para el caso frecuentemente hipercíclico se tienen el siguiente resultado.

Teorema 2.2 [8, Theorem 2.3 y 2.4] Sea $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Si $a = \frac{1}{2\,\text{máx}\{2,p\}}$, entonces para cualquier función $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ tal que $\varphi(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$, existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con

$$M_p(f,r) \leq \varphi(r)\frac{e^r}{r^a}, \quad \text{para } r > 0 \quad \text{suficientemente grande.}$$

que es frecuentemente hiperciclica para el operador diferenciación.

(b) Si $a = \frac{1}{2\min\{2,p\}}$ y $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ es cualquier función tal que $\psi(r) \to 0$ cuando $r \to \infty$, entonces no existe una función entera frecuentemente hipercíclica para el operador diferenciación tal que

$$M_p(f,r) \leq \psi(r)\frac{e^r}{r^a}, \quad \text{para } r > 0 \quad \text{suficientemente grande.}$$

2.2. Resultados Principales

En vista del interés generalizado en la comunidad científica por establecer razones de crecimiento de funciones que son hipercíclicas o frecuentemente hipercíclicas y de que en la literatura no se encuentran registros de resultados de este tipo para los operadores $T_{\lambda,b}$, nos damos a la tarea de investigar este comportamiento.

A continuación exponemos algunos avances en ese sentido para el caso $b = 0$ (veáse los Teoremas 2.3 y 2.5 abajo), ya que como se evidencia en [3, Theorem 13], las órbitas de los operadores $T_{\lambda,b}$ con $b \neq 0$ son más difíciles de manejar. Además como se puede ver en [31, Pág. 5] los operaodres $T_{\lambda,b}$ son conjugados con $T_{\lambda,0}$ mediante los operadores de traslación

$$T_{\frac{b}{1-\lambda}} : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}); \;\; (Tf)(z) = f(z + \tfrac{b}{1-\lambda})$$

y

$$T_{\frac{b}{\lambda-1}} : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}); \;\; (Tf)(z) = f(z + \tfrac{b}{\lambda-1})$$

para cada $f \in H(\mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{C}$. Esto abre la posibilidad de generalizar los resultados obtenidos para $T_{\lambda,0}$ a los operadores $T_{\lambda,b}$ con $b \neq 0$.

Antes de probar los Teoremas 2.3 y 2.5, establecemos algunos resultados auxiliares para nuestro propósito principal.

Lema 2.1 *Sean $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ el espacio de las funciones enteras, $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > 1$ y $Y_0 \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{C})$ el conjunto de todos los polinomios complejos. Si $T_n : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $S_n : Y_0 \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ son sucesiones definidas por $T_n = T_{\lambda,0}^n$ y $S_n = S^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, donde*

$$T_{\lambda,0}f(z) = f'(\lambda z) \quad \textit{para } f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}),\ z \in \mathbb{C}$$

y

$$Sf(z) = \lambda \int_0^{\lambda^{-1}z} f(w)\,\mathrm{d}w \quad \text{para } f \in Y_0,\ z \in \mathbb{C},$$

entonces:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{m} T_m S_{m-n} f(z) = \sum\limits_{n=1}^{k} T_n f(z)$, *para* $m \in \mathbb{N}$ *y* $f \in Y_0$, *donde* k *es el grado del polinomio* f.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_m S_{m+n} f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n f(z)$, *para* $m \in \mathbb{N}$ *y* $f \in Y_0$.

Demostración. Inicialmente, note que S_n está bien definida, pues $S(Y_0) \subset Y_0$, lo cual garantiza la buena definición de las iteraciones. Además, por lo hecho en [3, Theorem 13] tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \mathbb{C}$

$$T_n f(z) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f^{(n)}(\lambda^n z), \quad \text{con } f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

De otra parte, sabemos que para toda $f \in Y_0$ existen $d \in \mathbb{N}_0$ y $a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{d} a_j z^j$. Luego, por la linelidad de los T_n y S_n podemos considerar solo los polinomios canónicos $e_k(z) = z^k$ donde $k \in \mathbb{N}_0$ y $z \in \mathbb{C}$.

Por otro lado, de forma inductiva se obtiene que

$$S_n e_k(z) = \frac{k!}{(k+n)!} \lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}} e_{k+n}(z) = \frac{k!}{(k+n)!} \lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}} z^{k+n}, \tag{2.1}$$

para todo $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Veamos por inducción que esta igualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, para $n = 1$, nótese que

$$S_1 e_k = \lambda \int_0^{\lambda^{-1}z} w^k\,\mathrm{d}w = \lambda \frac{\left(\lambda^{-1}z\right)^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1} \lambda^{-k-1+1} z^{k+1} = \frac{k!}{(k+1)!} \lambda^{-k+0} e_{k+1}(z).$$

Supongamos que la igualdad es cierta para n, es decir, supongamos que

$$S_n e_k(z) = \frac{k!}{(k+n)!} \lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}} e_{k+n}(z),$$

y veamos para $n+1$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1}e_k(z) = S(S_n e_k)(z) &= \lambda \int_0^{\lambda^{-1}z} \frac{k!}{(k+n)!}\lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}} w^{k+n}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{k!}{(k+n)!}\lambda \left(\lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{k+n+1} (\lambda^{-1}z)^{k+n+1} \right) \\
&= \frac{k!}{(k+n+1)!}\lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}+1-k-n-1} z^{k+n+1} \\
&= \frac{k!}{(k+n+1)!}\lambda^{-nk-\frac{(n+1)n}{2}} e_{k+n+1}(z).
\end{aligned}$$

Lo cual establece (2.1).

(a) Sean $m, k \in \mathbb{N}$. Observe que para $n \in \mathbb{N}$ con $n < m$, tenemos

$$S_{m-n}e_k(z) = \frac{k!}{(k+m-n)!}\lambda^{-(m-n)k-\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}} z^{k+m-n},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Si denotamos $g(z) = \frac{k!}{(k+m-n)!}\lambda^{-(m-n)k-\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}} z^{k+m-n}$ con $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$T_m S_{m-n} e_k(z) = \lambda^{\frac{m(m-1)}{2}} g^{(m)}(\lambda^m z), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Una cuenta simple permite verificar que:

$$g^{(m)}(z) = \frac{k!}{(k+m-n)!}\lambda^{-(m-n)k-\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}} G(k,n,m) z^{k-n}, \quad \text{para } n \leq k,$$

donde $G(k,n,m) = (k+m-n)(k+m-n-1)\cdots(k+m-n-(m-1))$ y $z \in \mathbb{C}$. Es fácil ver que $G(k,n,m) = \frac{(k+m-n)!}{(k-n)!}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n < m$ y $n \leq k$, por tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
g^{(m)}(\lambda^m z) &= \tfrac{k!}{(k-n)!}\lambda^{-(m-n)k-\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}} (\lambda^m z)^{k-n} \\
&= \tfrac{k!}{(k-n)!}\lambda^{-(m-n)k-\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}+m(k-n)} z^{k-n}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T_m S_{m-n} e_k(z) = \frac{k!}{(k-n)!}\lambda^{\frac{m(m-1)}{2}-(m-n)k-\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}+m(k-n)} z^{k-n}$. Observe que

$$\frac{m(m-1)}{2} - (m-n)k - \frac{(m-n)(m-n-1)}{2} + m(k-n) = nk - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por lo que

$$T_m S_{m-n} e_k(z) = \frac{k!}{(k-n)!} \lambda^{nk - \frac{n(n+1)}{2}} z^{k-n}, \quad \text{para } n \leq k \text{ y todo } z \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Ahora, como $e_k^{(n)}(\lambda^n z) = k(k-1)\cdots(k-(n-1))\lambda^{n(k-n)} z^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!}\lambda^{n(k-n)} z^{k-n}$ para $n \leq k$ y $z \in \mathbb{C}$, obtenemos

$$T_n e_k(z) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} e_k^{(n)}(\lambda^n z) = \frac{k!}{(k-n)!} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2} + n(k-n)} z^{k-n} \quad \text{para } n \leq k \text{ y todo } z \in \mathbb{C}.$$

Es claro que $T_n e_k(z) = 0$ para $n > k$. Nótese que $\frac{n(n-1)}{2} + n(k-n) = nk - \frac{n(n+1)}{2}$, por lo que

$$T_n e_k(z) = \frac{k!}{(k-n)!} \lambda^{nk - \frac{n(n+1)}{2}} z^{k-n}, \quad \text{para } n \leq k \text{ y todo } z \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Luego, de (2.2) y (2.3) sigue evidentemente que $T_m S_{m-n} e_k(z) = T_n e_k(z)$, la cual es diferente de cero para $n \leq k$, e igual a cero para $n > k$. Así

$$\sum_{n=1}^{m} T_m S_{m-n} e_k(z) = \sum_{n=1}^{k} T_n e_k(z), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

En particular, si k es el grado del polinomio f, entonces

$$\sum_{n=1}^{m} T_m S_{m-n} f(z) = \sum_{n=1}^{k} T_n f(z), \quad \text{para } m \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C} \text{ y } f \in Y_0.$$

(b) Sean $m, k \in \mathbb{N}$. Nótese que

$$S_{m+n} e_k(z) = \frac{k!}{(k+m+n)!} \lambda^{-(m+n)k - \frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} z^{k+m+n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}.$$

Si denotamos $h(z) = \frac{k!}{(k+m+n)!}\lambda^{-(m+n)k - \frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} z^{k+m+n}$, entonces se tiene que $T_m S_{m+n} e_k(z) = \lambda^{\frac{m(m-1)}{2}} h^{(m)}(\lambda^m z)$ para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$. Una cuenta simple permite verificar que

$$h^{(m)}(z) = \frac{(k+m+n)!}{(k+n)!} \lambda^{-(m+n)k - \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} + m(k+n)} z^{k+n}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}.$$

Además, también es claro que

$$-(m+n)k - \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} + m(k+n) = -nk - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Por lo tanto

$$T_m S_{m+n} e_k(z) = \frac{k!}{(k+n)!} \lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}} z^{k+n}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \text{ y } z \in \mathbb{C}. \tag{2.4}$$

Luego, combinando (2.3) y (2.4) sigue claramente que $T_m S_{m+n} e_k(z) = S_n e_k(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$, en consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_m S_{m+n} e_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n e_k(z), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

En particular se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_m S_{m+n} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n f(z), \quad \text{para } m \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C} \ \text{ y } \ f \in Y_0.$$

■

Observación 2.1 *Es importante notar la siguiente relación respecto a la sucesión S_n.*

$$S_n e_k(z) = \frac{k!}{(k+n)!} \lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}} e_{k+n}(z), \quad \textit{para todo } n,k \in \mathbb{N} \ \textit{ y } \ z \in \mathbb{C}.$$

Estamos ahora en condiciones de demostrar nuestro primer resultado principal.

Teorema 2.3 ***(Razón de Crecimiento Para Funciones Hipercíclicas)*** *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \geq 1$.*

(a) *Si $|\lambda| = 1$, entonces para cualquier función $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ tal que $\phi(r) \to \infty$, cuando $r \to \infty$, existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ hipercíclica para $T_{\lambda,0}$ tal que*

$$M_p(f,r) \leq \phi(r) \frac{e^r}{\sqrt{r}}, \quad \textit{para } |z| = r > 0, \textit{ suficientemente grande.} \tag{2.5}$$

Además, no existe función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ hipercíclica para el operador $T_{\lambda,0}$ tal que

$$M_p(f,r) \leq C\frac{e^r}{\sqrt{r}}, \quad r > 0 \tag{2.6}$$

donde $C > 0$ es una constante.

(b) *Si $|\lambda| > 1$, entonces existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ hipercíclica para el operador $T_{\lambda,0}$ tal que*

$$M_p(f,r) \leq C\frac{e^{\frac{r}{|\lambda|}}}{\sqrt{r}}, \quad \textit{para } |z| = r > 0, \textit{ suficientemente grande,} \tag{2.7}$$

donde $C > 0$ es alguna constante. Además, si $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ es una función de orden $|\lambda|^{-\frac{r(r-1)}{2}}$ para $r > 0$, entonces no existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ hipercíclica para el operador $T_{\lambda,0}$ tal que

$$M_p(f,r) \leq \psi(r)\frac{e^{\frac{r}{|\lambda|}}}{\sqrt{r}}, \quad r > 0. \tag{2.8}$$

Demostración.

(a) La demostración de este resultado sigue directamente del resultado expuesto en [8, Theorem 2.1]. Sin embargo, exponemos aquí una demostración detallada.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ fijo. Como $M_p(f,r) \leq M_\infty(f,r)$ para todo $p \in [1,\infty)$ podemos verificar simplemente que

$$|f(z)| \leq \phi(r)\frac{e^r}{\sqrt{r}}, \quad \text{para } r > 0, \text{ suficientemente grande.}$$

Consideremos el conjunto

$$X^* = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) / \sup_{r=|z|>0} \frac{\sqrt{r}|f(z)|}{\phi(r)e^r} < \infty \right\}.$$

Además, se define para $f \in X^*$ la norma $\|f\|_{X^*} = \sup_{r>0} \frac{\sqrt{r}|f(z)|}{\phi(r)e^r}$. Es rutinario verificar que $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ es un espacio de Banach que está continuamente encajado en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Sean $X_0 = Y_0 \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ el conjunto de todos los polinomios complejos. Es claro que $X_0 \subset X^*$. Considere X la clausura de X_0 en X^*. Es claro que X es un espacio de Banach y que X_0 es denso en X.

Ahora bien, sean $S_n : Y_0 \to X$ y $T_n : X \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ como en el Lema 2.1. Veamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.3 con $n_k = k = n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Observe que para toda $f \in X$ se tiene que $T_n f = 0$ para todo $n \geq N$, pues f es un polinomio, por tanto $T_n f \to 0$, cuando $n \to \infty$, es decir se tiene la parte (I) del Teorema 1.3.

La parte (III) se tiene trivialmente pues, $T_n S_n f = f$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $f \in Y_0$, nos queda por establecer entonces la parte (II).

Para esto, notemos que al igual que en la prueba del Lema 2.1 basta considerar los polinomios canónicos $e_k(z) = z^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Sigue de la Observación 2.1 que

$$S_n e_k = \frac{k!}{(n+k)!}\lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}} e_{k+n} \quad \text{y} \quad S_{n+k} e_0 = \frac{1}{(n+k)!}\lambda^{\frac{-(n+k)(n+k-1)}{2}} e_{k+n}$$

para $n, k \in \mathbb{N}$. Luego, se tiene que $S_n e_k = k! M_\lambda S_{n+k} e_0$, donde M_λ es una constante que depende de λ tal que

$$M_\lambda \lambda^{\frac{-(n+k)(n+k-1)}{2}} = \lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}},$$

es decir que

$$M_\lambda = \lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}+\frac{-(n+k)(n+k-1)}{2}},$$

Un cálculo sencillo muestra que $-nk - \frac{n(n-1)}{2} + \frac{-(n+k)(n+k-1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$. Por tanto

$$S_n e_k = k! \lambda^{\frac{k(k+1)}{2}} S_{n+k} e_0.$$

Así, dado que $k!\lambda^{\frac{k(k+1)}{2}}$ no depende de n, para cumplir la hipótesis (II) es suficiente mostrar que $S_n e_0 \to 0$ en X, cuando $n \to \infty$. En efecto

$$\|S_n e_0\| = \left\| \lambda^{\frac{-n(n-1)}{2}} \frac{e_n}{n!} \right\| = \sup_{r>0} \frac{|\lambda|^{\frac{-n(n-1)}{2}} r^{n+\frac{1}{2}}}{n! \phi(r) e^r} = \sup_{r>0} \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{n! \phi(r) e^r}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $\phi(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$, existe $R > 0$ tal que

$$\phi(r) > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{para todo } r \geq R. \tag{2.9}$$

Luego, teniendo en cuenta que $(0,\infty) = (0,R) \cup [R,\infty)$ sigue

$$\sup_{r>0} \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{n!\phi(r)e^r} \leq \sup_{0<r<R} \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{n!\phi(r)e^r} + \sup_{r \geq R} \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{n!\phi(r)e^r}. \tag{2.10}$$

Para $0 < r < R$, suponiendo $c_1 = \inf\limits_{0<r<R} \phi(r) > 0$ y teniendo en cuenta que $e^r > 1$ para $r > 0$, sigue que

$$\sup_{0<r<R} \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{n!\phi(r)e^r} \leq c_1 \frac{R^{n+\frac{1}{2}}}{n!}.$$

De donde, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$, entonces $\frac{R^{n+\frac{1}{2}}}{n!} < \varepsilon$, por lo que

$$\sup_{0<r<R} \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{n!\phi(r)e^r} < c_1\varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq N_1. \tag{2.11}$$

Para $r \geq R > 0$, usando la función auxiliar $h(x) = \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{e^x}$ se verifica que

$$\sup_{r>0} \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{e^r} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Luego

$$\sup_{r>R} \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^r} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Por la Fórmula de Stirling's, existe $c > 0$ tal que

$$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^{n+\frac{1}{2}}} \leq c. \tag{2.12}$$

Por lo que, sigue de (2.9), (2.12) que

$$\sup_{r>R} \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{n!\phi(r)e^r} < c\varepsilon \tag{2.13}$$

Finalmente, sea $N = N_1$, si $n \geq N$, sigue de (2.10), (2.11) y (2.13) que

$$\sup_{r>0} \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{n!\phi(r)e^r} < c_1\varepsilon + c\varepsilon = (c_1 + c_2)\varepsilon,$$

es decir que, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|S_n e_0\| < (c_1 + c_2)\varepsilon$ siempre que $n \geq N$. Esto muestra lo que queríamos y por el Teorema 1.3 se tiene que $T_{\lambda,0}$ es hipercíclico en X. Por ende existe $f \in X \subset X^*$ que es hiperciclica para $T_{\lambda,0}$ y

$$\sup_{r=|z|>0} \frac{\sqrt{r}|f(z)|}{\phi(r)e^r} < \infty$$

de donde sigue (2.5).

Para la otra parte, supongamos que existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que satisface (2.6). Luego, si $r > 0$ y dado que $|f(z)| \leq M_1(f,r)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq r$. Por la desigualdad de Cauchy sigue que

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} M_1(f,r), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, como $M_1(f,r) \leq M_p(f,r)$ para todo p tal que $1 \leq p \leq \infty$, sique que

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} M_1(f,r) \leq \frac{n!}{r^n} M_p(f,r) \leq C\frac{n!e^r}{r^{n+\frac{1}{2}}}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando $r = n$ en la desigualdad anterior tenemos que

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq C\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por la Fórmula de Stirling's, se tiene que la sucesión $\left\{f^{(n)}(0)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Como $|\lambda| = 1$ y $T_n f(z) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f^{(n)}(\lambda^n z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, sigue que $\{T_n f(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, y por ende, f no puede ser hipercíclica para T_n si $n \in \mathbb{N}$. En particular, f no puede ser hipercíclica para $T_{\lambda,0}$.

(b) Inicialmente procedemos de forma similar al inciso anterior. Teniendo en cuenta que $M_p(f,r) \leq M_\infty(f,r)$ para todo $p \in [1,\infty)$ podemos verificar simplemente que

$$|f(z)| \leq \frac{e^{\frac{r}{|\lambda|}}}{\sqrt{r}}, \quad \text{para } r > 0, \text{ suficientemente grande.}$$

Consideremos el conjunto

$$X_* = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) / \sup_{r=|z|>0} \frac{\sqrt{r}|f(z)|}{e^{\frac{r}{|\lambda|}}} < \infty \right\}.$$

Además, se define para $f \in X_*$ la norma $\|f\|_{X_*} = \sup_{r>0} \frac{\sqrt{r}|f(z)|}{e^{\frac{r}{|\lambda|}}}$. Al igual que antes, $(X^*, \|\cdot\|_{X_*})$ es un espacio de Banach que está coninuamente encajado en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Consideramos también $X_0 = Y_0 \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ el conjunto de todos los polinomios complejos, y X la clausura de X_0 en X_*, es claro que X es un espacio de Banach y que X_0 es denso en X.

Sean $S_n : Y_0 \to X$ y $T_n : X \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ como en el Lema 2.1. Para establecer las hipótesis del Teorema 1.3, procediendo como en el inciso anterior, es suficiente mostrar que $S_n e_0 \to 0$ en X, cuando $n \to \infty$. En efecto

$$\|S_n e_0\| = \left\| \lambda^{\frac{-n(n-1)}{2}} \frac{e_n}{n!} \right\| = \sup_{r>0} \frac{|\lambda|^{\frac{-n(n-1)}{2}} r^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^{\frac{r}{|\lambda|}}} = \sup_{r>0} \frac{|\lambda|^{\frac{-n(n-1)}{2}} r^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^{\frac{r}{|\lambda|}}}.$$

Usando la función auxiliar

$$h(x) = \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{e^{\frac{x}{|\lambda|}}}, \quad \text{con } x \in (0, \infty),$$

se verifica que

$$\sup_{r>0} \frac{r^{n+\frac{1}{2}}}{e^{\frac{r}{|\lambda|}}} = \frac{[|\lambda| \left(n + \frac{1}{2}\right)]^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Luego

$$\sup_{r>R} \frac{|\lambda|^{\frac{-n(n-1)}{2}} r^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^{\frac{r}{|\lambda|}}} = \frac{|\lambda|^{\frac{-n(n-1)}{2}}}{n!} \frac{[|\lambda| \left(n + \frac{1}{2}\right)]^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n+\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{|\lambda|}\right)^{\frac{1}{2}\left(n-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{8}} \left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^{n+\frac{1}{2}}} \right).$$

Ya que $|\lambda| > 1$ y $\frac{1}{2}\left(n-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{8} > 0$ a partir de algún n, sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$

$$\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)^{\frac{1}{2}\left(n-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{8}} < \varepsilon. \tag{2.14}$$

Por otro lado, por la Fórmula de Stirling's, existe $c > 0$ tal que

$$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^{n+\frac{1}{2}}} \leq c. \tag{2.15}$$

Por lo que, si $n \geq N$, sigue de (2.14) y (2.15) que

$$\sup_{r>0} \frac{|\lambda|^{\frac{-n(n-1)}{2}} r^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^{\frac{r}{|\lambda|}}} < c\varepsilon.$$

Es decir que, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|S_n e_0\| < c\varepsilon$, siempre que $n \geq N$. Esto muestra lo que queríamos y por el Teorema 1.3 se tiene el resultado.

Para la segunda parte, razonamos de forma similar al inciso anterior. Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es tal que cumple (2.8). Luego, si $r > 0$, por la desigualdad de Cauchy se tiene que

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} M_1(f,r), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, como ψ es de orden $|\lambda|^{-\frac{r(r-1)}{2}}$ y sabemos que $M_1(f,r) \leq M_p(f,r)$ para todo p con $1 \leq p \leq \infty$, sigue que

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} M_1(f,r) \leq \frac{n!}{r^n} M_p(f,r) \leq \frac{n!}{r^n}\psi(r)\frac{e^{\frac{r}{|\lambda|}}}{\sqrt{r}} \leq \frac{n!|\lambda|^{-\frac{r(r-1)}{2}} e^{\frac{r}{|\lambda|}}}{r^{n+\frac{1}{2}}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $r = n$ y dado que $|\lambda| > 1$, sigue de la desigualdad anterior que

$$\left|\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!e^{\frac{n}{|\lambda|}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \leq \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Luego, al igual que antes, por la Fórmula de Stirling's se tiene que la sucesión

$\left\{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f^{(n)}(0)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Es decir que, la sucesión $\{T_n f(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y por ende f no puede ser hipercíclica para el operador $T_{\lambda,0}$.

■

Ahora veamos los resultados relacionados con la razón de crecimiento para funciones frecuentemente hipercíclicas. Pero antes enunciamos algunos resultados auxiliares importantes.

Lema 2.2 *Sean* $0 < \alpha \leq 2$ *y* $\beta \in \mathbb{R}$*. Entonces existe* $C > 0$ *tal que, para todo* $s > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{\alpha n}}{(n+1)^{\beta}\,(n!)^{\alpha}} \leq C s^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}} e^{\alpha s}$$

La demostración de este resultado se puede consultar en [8, Lemma 2.2].

El siguiente teorema clásico será de vital importancia en la demostración de un lema previo a nuestro resultado y puede ser consultado en [15, Pág. 94] o en [25, Pág. 111].

Teorema 2.4 ***[Desigualdad de Hausdorff - Young]*** *Sean p y q exponentes conjugados con* $1 < q \leq 2$*. Entonces se cumple que:*

(a) *Si* $\Phi \in L^q[0, 2\pi]$*, entonces la sucesión de Coeficientes de Fourier* $\{c_n\}$ *de* Φ *pertenece a* ℓ^p *y*

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Phi(t)|^q \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(b) *Si* $\{c_n\}$ *es una sucesión en* ℓ^q*, entonces es la sucesión de Coeficientes de Fourier de alguna función* $\Phi \in L^p$*, y*

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Phi(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lema 2.3 *Sean* $E \subseteq \mathbb{N}$ *un conjunto finito y* $\lambda \in \mathbb{C}$ *con* $|\lambda| \geq 1$*, si* $F(z) = \sum_{n\in E} \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^n$*, entonces*

$$M_p(F, r) \leq \left(\sum_{n\in E} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}\,(n!)^q}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad r > 0,$$

donde q es el exponente conjugado de p.

Demostración. Observe que

$$\begin{aligned} M_p(F,r) &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F(re^{it})\right|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n\in E}\left(\frac{re^{it}}{\lambda}\right)^n\frac{1}{n!}\right|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n\in E}\frac{r^ne^{int}}{\lambda^n n!}\right|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

donde $\Phi(t) = \sum_{n\in E}\frac{r^ne^{int}}{\lambda^n n!}$. Para cada $j\in\mathbb{Z}$ los coeficientes de Fourier de Φ están dados por

$$\begin{aligned} c(j) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(t)e^{-ijt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\in E}\frac{r^ne^{int}}{\lambda^n n!}\right)e^{-ijt}\,\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\in E}\frac{r^ne^{i(n-j)t}}{\lambda^n n!}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n\in E}\left(\frac{r^n}{\lambda^n n!}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-j)t}\,\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

Además, dado que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-j)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi, & \text{si} \quad n=j; \\ 0, & \text{si} \quad n\neq j. \end{cases}$$

Se tiene entonces que

$$c(n) = \begin{cases} \frac{r^n}{\lambda^n n!}, & \text{si} \quad n\in E; \\ 0, & \text{si} \quad n\in\mathbb{Z}\setminus E. \end{cases}$$

Luego, por la desigualdad de Hausdorff - Young y usando lo anterior tenemos que

$$M_p(F,r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Phi(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c(n)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{n\in E}\frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}(n!)^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

donde q es el exponente conjugado de p, es decir $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (note que $1<q\leq 2$). ■

Estamos ahora en condiciones de demostrar nuestro segundo resultado principal. En adelante, $\frac{1}{2p}=0$ si $p=\infty$.

Teorema 2.5 ***(Razón de Crecimiento Para Funciones Frecuentemente Hipercíclicas)*** *Sean $1\leq p\leq\infty$ y $a=\frac{1}{2\max\{2,p\}}$. Si $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ es una función tal que $\varphi(r)\to\infty$ cuando $r\to\infty$, entonces existe $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ frecuentemente hipercíclica para $T_{\lambda,0}$*

que satisface

$$M_p(f,r) \leq \varphi(r)\frac{e^{\frac{r}{|\lambda|}}}{r^a}, \quad \textit{para } r > 0 \quad \textit{suficientemente grande.}$$

Demostración. Dado que $M_p(f,r) \leq M_2(f,r)$ para $p \in [1,2)$ y $a = \frac{1}{4}$, vamos a considerar en adelante $2 \leq p \leq \infty$. Definimos el conjunto

$$X = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : \sup_{r>0} \frac{M_p(f,r)\, r^{\frac{1}{2p}}}{\varphi(r) e^{\frac{r}{|\lambda|}}} < \infty \right\}.$$

Además, definimos para $f \in X$, la norma $\|f\|_X = \sup_{r>0} \frac{M_p(f,r)\, r^{\frac{1}{2p}}}{\varphi(r) e^{\frac{r}{|\lambda|}}}$. Es un ejercicio rutinario del Análisis Funcional demostrar que $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio de Banach. Por otro lado, por la Fórmula Integral de Cauchy se tiene que para $0 < \rho < r$

$$\sup_{|z|\leq\rho} |f(z)| \leq \frac{r}{r-\rho} M_1(f,r) \leq \frac{r}{r-\rho} M_p(f,r).$$

Esto garantiza que X está continuamente encajado en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Veamos que $T_{\lambda,0}$ es frecuentemente hipercíclico en X. Para esto, vamos a establecer las hipótesis del Teorema 1.5.

Considere $Y_0, S_n : Y_0 \to X$ y $T_n : X \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ como en el Lema 2.1. Dado que X está continuamente encajado en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, los T_n son efectivamente operadores en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sigue de Lema 2.1 (a) que

$$\sum_{n=1}^{m} T_m S_{m-n} f(z) = \sum_{n=1}^{k} T_n f(z),$$

para $m \in \mathbb{N}$ y $f \in Y_0$, donde k es el grado del polinomio f. Luego, como para cada $f \in Y_0$, la expresión $T_n f(z)$ se anula a partir de $n = k+1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, sigue que la serie $\sum_{n=1}^{m} T_m S_{m-n} f(z)$ es incondicionalmente convergente en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y uniformemente en m. Lo cual establece la parte (I) del Teorema 1.5.

Por otro lado, por la parte (b) del Lema 2.1 sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_m S_{m+n} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n f(z),$$

para $m \in \mathbb{N}$ y $f \in Y_0$. Esto implica que para cumplir las hipótesis (II) y (III) del Teorema 1.5 se debe establecer la convergencia incondicional en X de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+n)!} \lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}} e_{k+n},$$

toda vez que X está continuamente encajado en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Usando una caracterización de series incondicionalmente convergentes bastaría mostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{e_n}{|\lambda|^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^{-n}}{n!} e_n$$

converge incondicionalmente en X. En efecto, Notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+n)!} \lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}} e_{k+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+n)!} \lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}} z^{k+n}$$

Además,

$$nk + \frac{n(n-1)}{2} = k + \left[(n-1)k + \frac{n(n-1)}{2}\right] = k + (n-1)\left(k + \frac{n}{2}\right)$$

Luego,

$$\frac{z^{k+n}}{\lambda^{nk+\frac{n(n-1)}{2}}} = \frac{z^k z^n}{\lambda^{k+(n-1)\left(k+\frac{n}{2}\right)}} = \left(\frac{z}{\lambda}\right)^k \frac{z^n}{\lambda^{(n-1)\left(k+\frac{n}{2}\right)}}$$

Como $\left(\frac{z}{\lambda}\right)^k$ no depende de n, nos interesa entonces lo que ocurre con

$$\frac{z^n}{\lambda^{(n-1)\left(k+\frac{n}{2}\right)}}$$

De otra parte, dado que $|\lambda| \geq 1$, entonces $\frac{1}{|\lambda|} \leq 1$. Además es evidente que

$$(n-1)\left(k + \frac{n}{2}\right) \geq (n-1)k \geq n-1.$$

De lo anterior se sigue que

$$\frac{1}{|\lambda|^{(n-1)\left(k+\frac{n}{2}\right)}} \leq \frac{1}{|\lambda|^{(n-1)k}} \leq \frac{1}{|\lambda|^{(n-1)}}$$

También

$$\frac{k!}{(n+k)!} \leq \frac{1}{n!}$$

Por tanto tenemos que

$$\left| \frac{k!}{(k+n)!} \frac{1}{\lambda^{nk+\frac{n(n-1)}{2}}} \right| \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{|\lambda|^{n-1}}$$

Así por la Proposición 1.3 con

$$y_n = z^n, \quad a_{\omega,n} = \frac{k!}{(k+n)!} \frac{1}{\lambda^{nk+\frac{n(n-1)}{2}}} \quad \text{y} \quad c_n = \frac{1}{n!} \frac{1}{|\lambda|^{n-1}},$$

sigue que efectivamente basta establecer con la convergencia incodicional de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{z^n}{|\lambda|^n}.$$

Establecemos a continuación dicha convergencia. Sean $\varepsilon > 0$ y q el exponente conjugado de p. Como $\varphi(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$, podemos elegir $R > 0$ tal que $\varphi(r)^q \geq \frac{1}{\varepsilon}$ para $r \geq R$, es decir que

$$\frac{1}{\varphi(r)^q} \leq \varepsilon, \qquad \text{para } r \geq R. \tag{2.16}$$

Como la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{qn}}{|\lambda|^{qn}(n!)^q}$ es convergente, existe N_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \geq N_1} \frac{R^{qn}}{|\lambda|^{qn}(n!)^q} < \varepsilon^q. \tag{2.17}$$

Sea $E \subset \{N_1, N_1+1, N_1+2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito. Si $F(z) = \sum_{n\in E} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{|\lambda|}\right)^n$, por el Lema 2.3 tenemos que

$$M_p(F,r) \leq \left(\sum_{n\in E} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}\,(n!)^q} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad r > 0.$$

Luego,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^{-n}}{n!} e_n \right\|_X = \left\| \sum_{n\in E} \frac{z^n}{|\lambda|^n n!} \right\|_X = \sup_{r>0} \frac{M_p(F,r) r^{\frac{1}{2p}}}{\varphi(r) e^{\frac{r}{|\lambda|}}} \leq \sup_{r>0} \frac{\left(\sum_{n\in E} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}(n!)^q} \right)^{\frac{1}{q}} r^{\frac{1}{2p}}}{\varphi(r) e^{\frac{r}{|\lambda|}}}$$
$$= \sup_{r>0} \frac{r^{\frac{1}{2p}}}{\varphi(r) e^{\frac{r}{|\lambda|}}} \left(\sum_{n\in E} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}(n!)^q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Además, por propiedad del supremo se tiene que

$$\sup_{r>0} \frac{r^{\frac{1}{2p}}}{\varphi(r) e^{\frac{r}{|\lambda|}}} \left(\sum_{n\in E} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}(n!)^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sup_{r>0} \frac{r^{\frac{q}{2p}}}{\varphi(r)^q e^{\frac{rq}{|\lambda|}}} \sum_{n\in E} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}(n!)^q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

De donde, se sigue que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^{-n}}{n!} e_n \right\|_X = \left\| \sum_{n\in E} \frac{z^n}{|\lambda|^n n!} \right\|_X \leq \left(\sup_{r>0} \frac{r^{\frac{q}{2p}}}{\varphi(r)^q e^{\frac{rq}{|\lambda|}}} \sum_{n\in E} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}(n!)^q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Observe que como $E \subset \{N_1, N_1+1, N_1+2, \dots\}$, la desigualdad anterior se convierte en

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^{-n}}{n!} e_n \right\|_X \leq \left(\sup_{r>0} \frac{r^{\frac{q}{2p}}}{\varphi(r)^q e^{\frac{rq}{|\lambda|}}} \sum_{n\geq N_1} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}(n!)^q} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.18}$$

La parte derecha de (2.18) la podemos analizar en dos casos, para $r \leq R$ y para $r > R$. Inicialmente, para $r \leq R$, usando (2.17), suponiendo que $\inf_{r>0} \varphi(r) > 0$ y dado que $e^{\frac{qr}{|\lambda|}} > 1$ tenemos

$$\sup_{r\leq R} \frac{r^{\frac{q}{2p}}}{\varphi(r)^q e^{\frac{rq}{|\lambda|}}} \sum_{n\geq N_1} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}(n!)^q} \leq \frac{R^{\frac{q}{2p}}}{\inf_{r>0} \varphi(r)^q} \sum_{n\geq N_1} \frac{R^{qn}}{|\lambda|^{qn}(n!)^q} \leq C_1 \varepsilon^q. \tag{2.19}$$

donde $C_1 = \frac{R^{\frac{q}{2p}}}{\inf_{r>0} \varphi(r)^q} < \infty$. Por otro lado, para el caso en que $r > R$ aplicamos el Lema 2.2 con $s = \frac{r}{|\lambda|} > 0, \beta = 0, \alpha = q$ y obtenemos que existe $C_2 > 0$ una constante que depende de q tal que

$$\sum_{n\geq N_1} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}(n!)^q} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}(n!)^q} \leq C_2 \left(\frac{r}{|\lambda|} \right)^{\frac{1-q}{2}} e^{\frac{qr}{|\lambda|}}.$$

Se sigue que

$$\frac{r^{\frac{q}{2p}}}{\varphi(r)^q e^{\frac{rq}{|\lambda|}}} \sum_{n\geq N_1} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}\,(n!)^q} \leq \frac{r^{\frac{q}{2p}}}{\varphi(r)^q e^{\frac{rq}{|\lambda|}}} C_2 \left(\frac{r}{|\lambda|}\right)^{\frac{1-q}{2}} e^{\frac{qr}{|\lambda|}} = \frac{C_2 r^{\frac{q}{2p}+\frac{1-q}{2}}}{\varphi(r)^q |\lambda|^{\frac{1-q}{2}}}.$$

Luego como q es el exponente conjugado de p, se tiene que $\frac{q}{2p} + \frac{1-q}{2} = 0$. Usando esto y (2.16) sigue que

$$\sup_{r>R} \frac{r^{\frac{q}{2p}}}{\varphi(r)^q e^{\frac{rq}{|\lambda|}}} \sum_{n\geq N_1} \frac{r^{nq}}{|\lambda|^{nq}\,(n!)^q} = \sup_{r>R} \frac{C_2 r^{\frac{q}{2p}+\frac{1-q}{2}}}{\varphi(r)^q |\lambda|^{\frac{1-q}{2}}} \leq C_2 |\lambda|^{\frac{q-1}{2}} \varepsilon^q. \tag{2.20}$$

Finalmente por lo establecido en (2.19) y (2.20) se tiene que

$$\left\| \sum_{n\in E} \frac{z^n}{|\lambda|^n n!} \right\|_X \leq \left(C_1 \varepsilon^q + C_2 |\lambda|^{\frac{q-1}{2}} \varepsilon^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(C_1 + C_2 |\lambda|^{\frac{q-1}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} \varepsilon.$$

Lo anterior implica la convergencia incondicional de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{|\lambda|^n n!}$ y por ende se tienen las partes (II) y (III), como queríamos.

La parte (IV) es evidente, pues

$$T_n S_n e_k(z) = e_k(z), \qquad \text{para todo } n,k \in \mathbb{N} \text{ y } z \in \mathbb{C}.$$

Luego, por el Teorema 1.5 se sigue que $\{T_n\}$ es frecuentemente hipercíclica en X. En particular $T_{\lambda,0}$ es frecuentemente hipercíclico en X. Así, tenemos que existe $g \in X$ que es un vector frecuentemente hipercíclico para $T_{\lambda,0}$. Como $g \in X$, existe $\xi > 0$ tal que

$$\sup_{r>0} \frac{M_p(g,r)\, r^{\frac{1}{2p}}}{\varphi(r) e^{\frac{r}{|\lambda|}}} = \xi,$$

y en particular

$$M_p(g,r) \leq \xi \varphi(r) \frac{e^{\frac{r}{|\lambda|}}}{r^{\frac{1}{2p}}}.$$

Por la Obervación 1.2 sigue que $f = \xi g$ también es un vector frecuentemenete hipercíclico para $T_{\lambda,0}$ y como $M_p(f,r) = \frac{1}{\xi} M_p(g,r)$ se tiene el resultado deseado. ∎

Para el otro sentido, solo podemos establecer, hasta este momento, un resultado para $|\lambda| = 1$. Dicho resultado sigue de la misma demostración del resultado obtenido por Blasco, Bonilla y Grosse [8, Theorem 2.4]. Enunciamos aquí el resultado.

Teorema 2.6 *Sean* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $a = \frac{1}{2\min\{2,p\}}$. *Si* $|\lambda| = 1$ *y* $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *es cualquier función tal que* $\psi(r) \to 0$ *cuando* $r \to \infty$, *entonces no existe una función entera frecuentemente hipercíclica para* $T_{\lambda,0}$ *tal que*

$$M_p(f,r) \leq \psi(r)\frac{e^r}{r^a}, \quad \text{para } r > 0 \quad \text{suficientemente grande.}$$

Capítulo 3

Algunas Propiedades Dinámicas de los Operadores $T_{\lambda,b}$

En este capítulo estudiaremos algunas nociones de dinámica lineal para los operadores $T_{\lambda,b}$, a saber, mezcla, caos, superciclicidad y recurrencia en cadena. En primer lugar, los consideramos como operadores de desplazamiento hacia atrás con peso sobre el espacio de sucesiones especial $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Finalmente, exploramos estas nociones de forma más directa, es decir, sin pasar por los operadores desplazamiento con peso.

La Dinámica Lineal, que tiene como objetivo estudiar el comportamiento a largo plazo de sistemas dinámicos generados por operadores lineales, por lo general definidos en espacios de Fréchet, es extremandamente atractiva por la riqueza de argumentos que se usa. Se puede decir que está en la intersección de tres campos diferentes de la matemática: *dinámica topológica, teoría de operadores* y *universalidad* (Bayart y Matheron, [4]). Los textos clásicos [4, 21] dan una idea general de la importancia y del desarrollo del tema.

Estudiamos las nociones de recurrencia en cadena por su importancia en el área de la teoría de operadores y sus aplicaciones, debido al estrecho vínculo con la llamada propiedad de sombreado. En los últimos años se han obtenido algunos resultados interesantes sobre el sombreado y la recurrencia en cadena en el entorno de la dinámica lineal [1, 2, 22, 24].

Finalmente, para familiarizar al lector con las diferentes nociones de la dinámica lineal estudiadas, recordamos el problema de la comparación de la hiperciclicidad

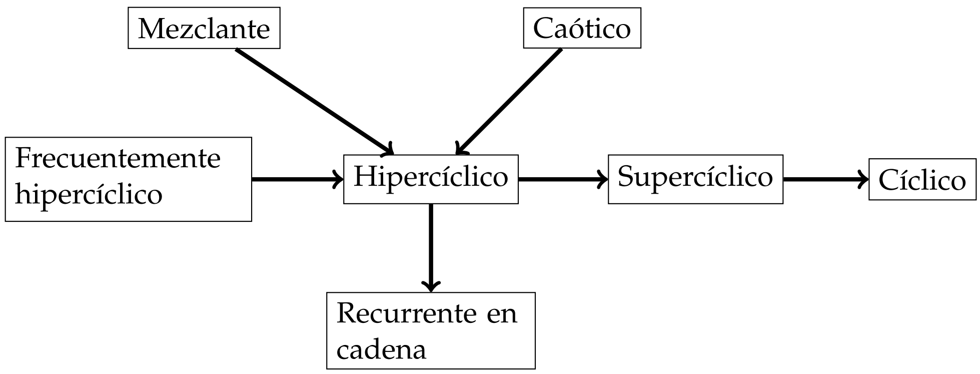

FIGURA 3.1: Relaciones entre propiedades de Dinámica Lineal

frecuente con otras formas de hiperciclicidad.

3.1. Caos Lineal y Recurrencia en Cadena Para $T_{\lambda:b}$: Caso Operador Desplazamiento con Peso

Recordemos que $\omega := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ es el espacio de Fréchet de todas las sucesiones de escalares equipado con la topología producto.

Definición 3.1 *Un espacio de sucesiones de Fréchet X es un subespacio de ω que tiene una topología de espacio de Fréchet bajo la cual la inclusión $X \hookrightarrow \omega$ es continuo. Es decir, la convergencia en X implica convergencia por coordenadas.*

Los **vectores canónicos** de ω son los vectores e_n, $n \in \mathbb{N}$, donde la coordenada n-ésima de e_n es 1 y las demás coordenadas de e_n son 0. Las sucesiones $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forman una **base** en X si están contenidas en X y si toda sucesión $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ satisface

$$x = \lim_{n\to\infty}(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Esto significa que cada $x \in X$ tiene una única representación $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, con escalares $x_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base en cualquiera de los espacios de sucesiones de Fréchet ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, c_0 y ω.

Ejemplo 3.1 *El espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ de funciones enteras puede verse como un espacio de sucesiones identificando la función entera $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ con la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por la fórmula del radio de convergencia de las series de Taylor, este espacio de sucesiones viene dado* *por*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbb{C}) &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \omega : \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0\} \\ &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| m^n < \infty, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}\},\end{aligned}$$

cuya topología está inducida por la secuencia de seminormas dada por

$$\|f\|_m := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| m^n$$

para $f = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$*. Además, las sucesiones unitarias* e_n *corresponden a los monomios* $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$*, y forman una base en* $\mathcal{H}(\mathbb{C})$*.*

Dada una sucesión $w := \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de escalares distintos de cero, se deduce del teorema del grafo cerrado que el **desplazamiento hacia atrás con peso**

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (w_2 x_2, w_2 x_3, \ldots)$$

es un operador lineal continuo sobre un espacio de sucesiones de Fréchet X en cuanto aplica X en sí mismo.

Ejemplo 3.2 *El operador* $T_{\lambda,0}$*,* $\lambda \in \mathbb{C}$*, actúa como un desplazamiento hacia atrás con peso sobre* $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ *con sucesión de pesos*

$$w_n = (n+1)\lambda^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En efecto, para toda función entera $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ *obtenemos que*

$$(T_{\lambda,0} f)(z) = f'(\lambda z) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\lambda^n a_{n+1} z^n,$$

es decir,

$$T_{\lambda:0}(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (2\lambda a_2, 3\lambda^2 a_3, \ldots).$$

Teorema 3.1 *Sea* X *un espacio de sucesiones de Fréchet cuya topología está inducida por una sucesión creciente* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de seminormas, en la que* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base. Supongamos que el desplazamiento hacia atrás con peso* B_w *es un operador sobre* X*.*

(a) *Entonces B_w es mezclante si, y solo si,*

$$\frac{e_n}{w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n} \to 0$$

en X cuando $n \to \infty$.

(b) *Suponga que la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es incondicional. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *B_w es caótico;*

(II) *la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n}$$

converge en X;

(III) *la sucesión*

$$\left\{ \frac{1}{w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

pertenece a X;

(IV) *B_w tiene un punto periódico no trivial.*

(c) *Entonces B_w es recuerrente en cadena si, y solo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n|}{\|e_n\|_m} = \infty,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Las parte (a) y (b) se pueden encontrar en [21, Theorem 4.8], mientras que la parte (c) se puede ver en [23, Theorem 16]. ■

Aplicando el Teorema 3.1(a-b), no es difícil demostrar que un desplazamiento hacia atrás con peso B_w sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es mezclante si, y solo si, es caótico, y que la condición caracterizadora es

$$\lim_{n\to\infty} \left(|w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n|\right)^{1/n} = \infty.$$

Como aplicación del teorema anterior, estudiamos las nociones de mezcla, caos y recurrencia en cadena para $T_{\lambda,b}$.

Teorema 3.2 *Los operadores $T_{\lambda,b}$ con $|\lambda| \geq 1$ son caóticos (por ende, mezclantes) en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Demostración. Supongamos inicialmente que $b = 0$. Teniendo en cuenta el comentario anterior y los ejemplos 3.1 y 3.2, basta verificar que

$$\lim_{n\to\infty} (|w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n|)^{\frac{1}{n}} = \infty,$$

donde $w_n = (n+1)\lambda^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, observe que

$$|w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n| = (n+1)!|\lambda|^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} (|w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n|)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left((n+1)!|\lambda|^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} |\lambda|^{\frac{n+1}{2}} \sqrt[n]{(n+1)!}.$$

Como $|\lambda| \geq 1$, es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda|^{\frac{n+1}{2}} \sqrt[n]{(n+1)!} = \infty$. Lo cual muestra que $T_{\lambda,0}$ es caótico.

Utilizando la conjugación entre $T_{\lambda,0}$ y $T_{\lambda,b}$, obtenemos $T_{\lambda,b}$ es caótico. ∎

Como vemos en la Figura 3.1, la hiperciclicidad de un operador implica la recurrencia en cadena. Por ende, los operadores $T_{\lambda,b}$ son recurrentes en cadena para $|\lambda| \geq 1$. Para el caso $|\lambda| < 1$ no se tiene conocimiento sobre la recurrencia en cadena, el siguiente resultado demuestra que para los operadores $T_{\lambda,b}$, la recurrencia en cadena solo es posible si $|\lambda| \geq 1$.

Teorema 3.3 *Los operadores $T_{\lambda,b}$ con $\lambda, b \in \mathbb{C}$, son recurrentes en cadena en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ si, y solo si, $|\lambda| \geq 1$.*

Demostración. Supongamos inicialmente que $b = 0$. Teniendo en cuenta los Ejemplos 3.1 y 3.2, y el Teorema 3.1 (c), la recurrencia en cadena de los operadores $T_{\lambda,0}$ equivalente a la siguiente igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!|\lambda|^{\frac{n(n+1)}{2}}}{m^n} = \infty,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo y considere

$$x_n = \frac{(n+1)!|\lambda|^{\frac{n(n+1)}{2}}}{m^n}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Observe que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+2)!|\lambda|^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{m^{n+1}}}{\frac{(n+1)!|\lambda|^{\frac{n(n+1)}{2}}}{m^n}} = \frac{m^n(n+2)!|\lambda|^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{m^{n+1}(n+1)!|\lambda|^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{(n+2)|\lambda|^{n+1}}{m}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, es evidente que

$$\lim_{n\to\infty}(n+2)|\lambda|^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\lambda| < 1; \\ \infty & \text{si} \quad |\lambda| \geq 1. \end{cases}$$

Luego, por el Criterio de la Razón para convergencia de series, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!|\lambda|^{\frac{n(n+1)}{2}}}{m^n}$, converge si, y solo si, $|\lambda| < 1$. Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!|\lambda|^{\frac{n(n+1)}{2}}}{m^n} = \infty \tag{3.1}$$

si, y solo si, $|\lambda| \geq 1$. Es decir que, los operadores $T_{\lambda,0}$ son recurrentes en cadena en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ si, y solo si, $|\lambda| \geq 1$. Utilizando la conjugación entre $T_{\lambda,0}$ y $T_{\lambda,b}$, obtenemos que los $T_{\lambda,b}$ son recucrrentes en cadena. ■

3.2. Mezcla, Recurrencia en Cadena y Superciclicidad Para $T_{\lambda,b}$

Empecemos por demostrar que los operadores $T_{\lambda,b}$ son mezclantes, de una forma directa.

Teorema 3.4 *Los operadores $T_{\lambda,b}$ con $|\lambda| \geq 1$ y $b \in \mathbb{C}$ son mezclantes en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Demostración. Esta prueba sigue la misma idea del caso del operador de diferenciación. Sean U y V conjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Dado que los polinomios son densos en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, hay polinomios $p \in U$ y $q \in V$, digamos

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \quad \text{y} \quad q(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^k, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Como U es abierto, existen $\delta, R > 0$ tales que

$$\left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : \sup_{|z| \leq R} |f(z) - p(z)| < \delta \right\} \subset U. \tag{3.2}$$

Primero, veamos que los operadores $T_{\lambda,0}$ son mezclantes. Fije $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \geq 1$. En vista de que

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{k!|b_k||\lambda|^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}}}{(k+n)!} R^{k+n} \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

existe $N_0 > N$ tal que

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{k!|b_k||\lambda|^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}}}{(k+n)!} R^{k+n} < \delta, \quad \text{para todo } n \geq N_0.$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N_0$, fijando

$$r_n(z) = p(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{k! b_k \lambda^{-nk-\frac{n(n-1)}{2}}}{(k+n)!} z^{k+n}, \quad z \in \mathbb{C},$$

por (3.2), $r_n \in U$ y claramente $T_{\lambda,0}^n r_n = q \in V$ para todo $n \geq N_0$. Esto es,

$$T_{\lambda,0}^n(U) \cap V \neq \emptyset, \quad \text{para cada } n \geq N_0.$$

Se tiene así que $T_{\lambda,0}$ es mezclante.

Por último, dado que la propiedad de mezcla se conserva bajo cuasiconjugación, se deduce que $T_{\lambda,b}$ es mezclante. ■

Para mostrar la recurrencia en cadena para $T_{\lambda,b}$, recordamos el siguiente resultado: para cada operador T sobre un espacio de Fréchet X, el conjunto

$$O_0(T) := \{x \in X : \text{ para cada } \delta > 0, \text{ existe una } \delta\text{-cadena para } T \text{ desde } 0 \text{ a } x\}$$

es un subespacio lineal cerrado T-invariante de X [23, Lemma 8]. En consecuencia, T es recurrente en cadena si, y solo si, $O_0(T)$ es denso en X.

Proposición 3.1 *Sea T un operador en un espacio de Fréchet X. Entonces T es recurrente en cadena si, y solo si, $O_0(T)$ es denso en X.*

Recordemos que si tenemos una sucesión creciente $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de seminormas que inducen la topología de un espacio de Fréchet X, entonces

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x-y)\}, \quad \text{para todo } x, y \in X, \tag{3.3}$$

define una métrica en X.

Teorema 3.5 *Los operadores $T_{\lambda,b}$ con $|\lambda| \geq 1$ y $b \in \mathbb{C}$ son recurrentes en cadena en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Demostración. Aplicando la conjugación entre $T_{\lambda:b}$ y $T_{\lambda,0}$, basta demostrar que los operadores $T_{\lambda,0}$ son recurrentes en cadena en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. En vista de la Proposición 3.1, puesto que los polinomios son densos en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, la recurrencia en cadena de $T_{\lambda,0}$ se deduce del hecho que $e_k \in O_0(T_{\lambda:0})$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Demostremos que $e_k \in O_0(T_{\lambda,0})$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. En efecto, sean $k \in \mathbb{N}_0$ y $\delta > 0$ fijos. Consideramos $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ dotado de su métrica canónica d dada por (3.3). Entonces, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f,0) < \delta \quad \text{siempre que} \quad f \in H(\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad \|f\|_l = \sup_{|z|\leq l} |f(z)| < \delta/2. \tag{3.4}$$

Como $|\lambda| \geq 1$, sigue de la Ecuación (3.1) que,

$$\frac{1}{l^{k+1}} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{n(n-1)\ldots(k+3)(k+2)|\lambda|^{k+(n-1+n-2+\cdots+k+2+k+1)}}{l^n} = \infty.$$

Por lo tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$t := \frac{k+1}{l^{k+1}} + \sum_{n=k+2}^{k+m} \frac{n(n-1)\ldots(k+3)(k+2)(k+1)|\lambda|^{k+(n-1+n-2+\cdots+k+2+k+1)}}{l^n} > \frac{2}{\delta}.$$

Definimos ahora las funciones enteras

$$g = S^m e_k, \quad f_1 = \frac{g}{t\|g\|_l} \quad \text{y} \quad f_{j+1} = T_{\lambda,0} f_j + \frac{T^j_{\lambda:0}\, g}{t\|T^j_{\lambda,0}\, g\|_l}$$

para $1 \leq j < m$, donde S es la función dada por

$$Sf(z) = \lambda \int_0^{z/\lambda} f(w)\,\mathrm{d}w, \quad \text{para } f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ y } z \in \mathbb{C}.$$

Por la Observación 1.2, tenemos que

$$g = \frac{k!}{(k+m)!} \lambda^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}} e_{k+m}.$$

Por otro lado, note que

$$f_1 = \frac{\lambda^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}} e_{k+m}}{t|\lambda|^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}} l^{k+m}},$$

$$f_2 = \frac{(k+m)\lambda^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}+k+m-1} e_{k+m-1}}{t|\lambda|^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}} l^{k+m}} + \frac{\lambda^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}+k+m-1} e_{k+m-1}}{t|\lambda|^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}+k+m-1} l^{k+m-1}},$$

$$\begin{aligned} f_3 = {} & \frac{(k+m)(k+m-1) e_{k+m-2} \lambda^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}+k+m-1+k+m-2}}{t|\lambda|^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}} l^{k+m}} \\ & + \frac{e_{k+m-2}(k+m-1)\lambda^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}+k+m-1+k+m-2}}{t|\lambda|^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}+k+m-1} l^{k+m-1}} \\ & + \frac{(k+m-1)\lambda^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}+k+m-1+k+m-2} e_{k+m-2}}{t|\lambda|^{-mk-\frac{m(m-1)}{2}+k+m-1+k+m-2} l^{k+m-2}}. \end{aligned}$$

Siguiendo este proceso, de forma inductiva se obtiene que

$$f_m = \frac{1}{(k+1)\lambda^k} e_{k+1}.$$

Afirmación: La sucesión finita $0, f_1, f_2, \ldots, f_m, e_k$ es una δ-cadena para $T_{\lambda,0}$ desde 0 hasta e_k.

A partir de la construcción de las funciones, es fácil ver que forman una δ-cadena para $T_{\lambda,0}$ desde 0 hasta e_k. Como $\|f_1\|_l = 1/t < \delta/2$, se sigue de (3.4) que $d(f_1, 0) < \delta$. Por otra parte, dado que d es una métrica invariante bajo traslaciones y

$$\left\| \frac{T^j_{\lambda,0} g}{t\|T^j_{\lambda,0} g\|_l} \right\|_l < \delta/2,$$

obtenemos que

$$d(T_{\lambda,0} f_j, f_{j+1}) = d\left(0, \frac{T^j_{\lambda,0} g}{t\|T^j_{\lambda,0} g\|_l}\right) < \delta,$$

para $1 \leq j < m$. Finalmente,

$$d(T_{\lambda,0} f_m, e_k) = d(e_k, e_k) = 0 < \delta.$$

Así, $e_k \in O_0(T_{\lambda:0})$ demostrando lo deseado. ■

Finalmente, presentamos una demostración alterna y más sencilla, a la dada en [33, Example 3.1] de la superciclicidad de los operadores $T_{\lambda,b}$ cuando $|\lambda| < 1$.

Teorema 3.6 *Los operadores $T_{\lambda,b}$ con $|\lambda| < 1$ y $b \in \mathbb{C}$ son supercíclicos en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Demostración. Sea Y_0 es el conjunto de todos los polinomios complejos. Luego, es evidente que Y_0 está contenido en el nucleo genralizado de $T_{\lambda,0}$, es decir,

$$Y_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker T^n_{\lambda,0}$$

pues, dado cualquier polinomio q, digamos de grado m, entonces, $q \in \ker T^{m+1}_{\lambda,0}$.

Similarmente, Y_0 está contenido en el rango de $T_{\lambda,0}$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En efecto, sea $q \in Y_0$, digamos que $q(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$, y considere $p : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ dado por

$$p(z) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{a_k}{(k+1)\lambda^k} z^{k+1}, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Nótese que $T_{\lambda,0} p(z) = q(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Como Y_0 es denso en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, por el Teorema 1.4, sigue que los operadores $T_{\lambda,0}$ son supercíclicos. Por último, dado que la propiedad de superciclicidad se conserva bajo cuasiconjugación, se deduce que $T_{\lambda,b}$ es supercíclico. ■

Conclusiones

Con el desarrollo de este trabajo se obtuvo varios resultados originales referente a la dinámica de los operadores $T_{\lambda,b}$, con $\lambda, b \in \mathbb{C}$, definidos sobre el espacio de Fréchet $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ de todas las funciones enteras. Del mismo modo, este estudio nos permitió levantar algunas preguntas interesantes que serán objeto de investegación en un futuro inmediato. A continuación, se presentan los resultados e interrogantes derivados de esta investigación:

1. Una tasa de crecimiento de funciones enteras hipercílcicas, para los operadores $T_{\lambda,b}$, en el caso $b = 0$. Esta tasa que resulta diferente cuando $|\lambda| = 1$ y cuando $|\lambda| > 1$. Asimismo, encontramos condiciones sobre la tasa de crecimiento que aseguran la no existencia de una función hipercíclica, condicones que nuevamente, resultan diferentes cuando $|\lambda| = 1$ y cuando $|\lambda| > 1$, (veáse Teorema 2.3).

2. Una tasa de crecimiento de funciones enteras frecuentemente hipercílcicas, para los operadores $T_{\lambda,b}$, en el caso $b = 0$. Para este resultado, encontramos condiones sobre la razón de crecimiento que aseguran la no existencia de funciones frecuentemente hipercíclicas cuando $|\lambda| = 1$, (veáse Teorema 2.5 y Teorema 2.6).

3. Una demostración alternativa y directa, de la superciclicidad de los operadores $T_{\lambda,b}$ cuando $|\lambda| < 1$. Dicha demostración usa resultados clásicos de superciclicidad, (veáse Teorema 3.6).

4. Una caracterización de la recurrencia en cadena para los operadores $T_{\lambda,b}$, la cual establece que $T_{\lambda,b}$ es recurrente en cadena si, y solo si, $|\lambda| \geq 1$, (veáse Teorema 3.3 y Teorema 3.5).

5. Dos demostraciones diferentes sobre la propiedad de mezcla para los operadores $T_{\lambda,b}$. Además, en una de estas pruebas se establece que ellos son caóticos, (veáse Teorema 3.2 y Teorema 3.4).

Para trabajos futuros queda pendiente validar la optimalidad de las tasas de crecimiento encontradas (o condiciones sobre las mismas para que sean óptimas) de funciones hipercíclicas y frecuentemente hipercíclicas. También, tenemos la posibilidad de generalizar los resultados en 1 y 2 al caso $b \neq 0$. Finalmente, esta investigación motiva para estudiar otras nociones importantes de la Dinámica Lineal en esta familia de operadores; por ejemplo, sombreamiento y convergencia en media.

Bibliografía

[1] Fabricio Alves, Nilson Jr y Ali Messaoudi. «Chain recurrence and average shadowing in dynamics». En: *Monatshefte für Mathematik* 196 (dic. de 2021). DOI: `10.1007/s00605-021-01617-6`.

[2] Mayara Antunes, Gabriel Mantovani y Regis Varao. «Chain Recurrence and Positive Shadowing in Linear Dynamics». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 506 (ago. de 2021), pág. 125622. DOI: `10.1016/j.jmaa.2021.125622`.

[3] Richard Aron y Dinesh Markose. «On Universal Functions». En: *Journal of the Korean Mathematical Society* 41 (ene. de 2004), págs. 65-76. DOI: `10.4134/JKMS.2004.41.1.065`.

[4] Frédéric Bayart y Étienne Matheron. *Dynamics Of Linear Operators*. 2009. ISBN: 978-0-511-58002-4.

[5] Teresa Bermúdez, Antonio Bonilla y Alfredo Peris. «On hypercyclicality and supercyclicality criteria». En: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 70 (ago. de 2004), págs. 45-54. DOI: `10.1017/S0004972700035802`.

[6] Luis Bernal-González y Antonio Bonilla. «Rate of Growth of Hypercyclic and Frequently Hypercyclic Functions for the Dunkl Operator». En: *Mediterranean Journal of Mathematics* 13 (oct. de 2016). DOI: `10.1007/s00009-016-0690-z`.

[7] George Birkhof. «Dèmonstration dún théoreme elementaire sur les fonctions entieres». En: *Gauthier-Villars* 189 (1929), págs. 473-475.

[8] Oscar Blasco, Antonio Bonilla y Karl-G Grosse-Erdmann. «Rate of growth of frequently hypercyclic functions». En: *Proceedings of the Edinburgth Mathematical Society* 53 (mayo de 2010), págs. 39-59. DOI: `10.1017/S0013091508000564`.

[9] V.I. Bogachev y O.G. Smolyanov. *Topological Vector Spaces and Their Applications*. Ene. de 2017. ISBN: 978-3-319-57116-4. DOI: `10.1007/978-3-319-57117-1`.

[10] Antonio Bonilla y Karl Grosse-Erdmann. «Frequently hypercyclic operators and vectors». En: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 27 (abr. de 2007), págs. 383 -404. DOI: `10.1017/S014338570600085X`.

[11] Antonio Bonilla y Karl Grosse-Erdmann. «On a Theorem of Godefroy and Shapiro». En: *Integral Equations and Operator Theory* 56 (oct. de 2006), págs. 151-162. DOI: `10.1007/s00020-006-1423-7`.

[12] Blas Caraballo y Vinícius Fávaro. «Strongly Mixing Convolution Operators on Fréchet Spaces of Entire Functions of a Given Type and Order». En: *Integral Equations and Operator Theory* 92 (jul. de 2020). DOI: `10.1007/s00020-020-02589-2`.

[13] Kitai Carol. *Invariant Closed Sets for Linear Operators*. 1982.

[14] David Drasin y Eero Saksman. «Optimal growth of entire functions frequently hypercyclic for the differentiation operator». En: *Journal of Functional Analysis* 263 (dic. de 2012), 3674–3688. DOI: `10.1016/j.jfa.2012.09.007`.

[15] Peter Duren. *Teory of Spaces H^p*. Jul. de 1970. ISBN: 9780080873510.

[16] Gustavo Fernández y André Hallack. «Remark on result about hypercyclic non-convolution operators». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 309 (feb. de 2005), págs. 52-55. DOI: `10.1016/j.jmaa.2004.12.006`.

[17] R.M. Gethner y J.H. Shapiro. «Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions». En: 100 (jun. de 1987), págs. 281-288. DOI: `10.1090/S0002-9939-1987-0884467-4`.

[18] Clifford Gilmore, Eero Saksman y Hans-Olav Tylli. «Optimal growth of harmonic functions frequently hypercyclic for the partial differentiation operator». En: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics* 149 (ago. de 2017). DOI: `10.1017/prm.2018.82`.

[19] Gilles Godefroy y Joel Shapiro. «Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds». En: *Journal of Functional Analysis* 98 (jun. de 1991), págs. 229-269. DOI: 10.1016/0022-1236(91)90078-J.

[20] Karl Grosse-Erdmann. «On the universal functions of G. R. MacLane». En: *Complex Variables and Elliptic Equations* 15 (sep. de 1990), págs. 193-196. DOI: 10.1080/17476939008814450.

[21] Karl-G Grosse-Erdmann y Alfred Peris. *Linear Chaos*. Ene. de 2011. ISBN: 978-1-4471-2169-5. DOI: 10.1007/978-1-4471-2170-1.

[22] Nilson Jr y Ali Messaoudi. «Shadowing and structural stability for operators». En: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 41 (ene. de 2020), págs. 1-20. DOI: 10.1017/etds.2019.107.

[23] Nilson Jr y Alfred Peris. *On Shadowing and Chain Recurrence in Linear Dynamics*. Mayo de 2023.

[24] Nilson Jr et al. «Expansivity and Shadowing in Linear Dynamics». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 461 (dic. de 2016). DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.11.059.

[25] Yitzhak Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Ene. de 2004. ISBN: 9780521838290. DOI: 10.1017/CBO9781139165372.

[26] Gottfriend Kothe. *Topological Vector Spaces I*. Ene. de 1983. ISBN: 978-3-642-64990-5. DOI: 10.1007/978-3-642-64988-2.

[27] Fernando León-Saavedra y María Del Pilar Romero de la Rosa. «Fixed points and orbits of non-convolution operators». En: *Fixed Point Theory and Applications* 2014 (oct. de 2014), pág. 221. DOI: 10.1186/1687-1812-2014-221.

[28] G. R. MacLane. «Sequences of derivatives and normal families». En: *Journal d'Analyse Mathématique* (dic. de 1952). DOI: 10.1007/BF02786968.

[29] Augustin Mouze y V. Munnier. «Growth of frequently or log-frequently hypercyclic functions». En: *Journal of Functional Analysis* 281 (jun. de 2021), pág. 109171. DOI: 10.1016/j.jfa.2021.109171.

[30] Augustin Mouze y Vincent Munnier. *Optimal growth of upper frequently hypercyclic functions for some weighted Taylor shifts*. Dic. de 2022.

[31] Santiago Muro, Damián Pinasco y Martin Savransky. «Hypercyclic behavior of some non-convolution operators on $H(\mathbb{C}^N)$». En: *Journal of Operator Theory* 77 (mayo de 2015). DOI: `10.7900/jot.2015oct08.2127`.

[32] Alexander Myers, Muhammadyusuf Odinaev y David Walmsley. «Two families of hypercyclic nonconvolution operators». En: *Involve, a Journal of Mathematics* 14 (abr. de 2021), págs. 349-360. DOI: `10.2140/involve.2021.14.349`.

[33] Henrik Petersson. «Supercyclic and hypercyclic non-convolution operators». En: *Journal of Operator Theory* 1 (dic. de 2006).

[34] S.M. Ruiz. «On the existence of universal functions». En: *Soviet Mathematics. Doklady* 27 (1983), págs. 9-13.

[35] Stanislav Shkarin. «On the growth of D-universal functions». En: *Moscow University Mathematics Bulletin* 48 (nov. de 1993).

[36] Leonard Smith. «BOOK REVIEW: Chaos: A Very Short Introduction». En: *Journal of Physics A-mathematical and General - J PHYS-A-MATH GEN* 40 (ene. de 2007), págs. 8604-8605.