

Incidencia del ciclo de aprendizaje basado en el modelo de las 5e como estrategia en el desarrollo del pensamiento numérico variacional asociado a la noción de derivada, en estudiantes de grado 11° del colegio La Salle Monteria

Presentado por:

Roger Lenin maya Martínez

Director:

Dr. Abraham Jose Arenas Tawil

Maestría en educación

Universidad de Córdoba

Facultad de Educación y Ciencias Humanas

Colombia

2023

Dedicatoria

A Dios fuente de sabiduría, a mi esposa Yineth, por su apoyo incondicional.

A mis hijas Isabella y Marianella, por motivarme a ser mejor cada día.

A mi madre Nancy, por dar de su tiempo para que yo tuviera tiempo.

A mi padre Héctor por ser ejemplo de superación en mi vida.

A mis hermanos Javier, Andrés y a mi Tía Consuelo,

por cada uno de sus valiosos consejos, gracias.

A la Sra. “Leo”, por su voto de confianza.

*A aquellos que nunca se rinden,
que persisten en busca de sus sueños.*

Agradecimientos

Agradecimiento especial a mi director Dr. Abraham Arenas, por su paciencia y colaboración en la culminación de este trabajo. Al colegio La Salle por permitirme crecer profesionalmente, a cada uno de los estudiantes que hicieron parte de este proyecto, me llevo cada una de las experiencias vividas. A mis amigos y compañeros, en especial a aquellos que en momentos difíciles me alentaron a seguir adelante. A la Universidad de Córdoba, a mis profesores de la Maestría en Educación SUE Caribe, A la Dra. Isabel Sierra y el Dr. Alberto Jesús Iriarte Pupo, por cada uno de sus aportes y así tener la oportunidad de seguir en el camino de la investigación.

Resumen

La investigación se llevó a cabo en el Colegio La Salle en la ciudad de Montería-Colombia, con estudiantes de grado 11. El estudio abordó la influencia del Aprendizaje basado en la indagación (ABI) ciclo de enseñanza 5E en los procesos de desarrollo de uno de los pensamientos en matemáticas: numérico variacional, específicamente en el concepto de la derivada. Se examinaron las diferencias entre los grupos de los estudiantes que se encuentran en entornos de enseñanza basados en el ABI y aquellos que reciben sus lecciones en un entorno de enseñanza convencional. Se analizaron los efectos de la intervención didáctica diseñada con enfoque constructivista, en los procesos de desarrollo del pensamiento numérico variacional asociado a la noción de la derivada.

En este estudio, se realizó una revisión bibliográfica del aprendizaje basado en la indagación, su historia, los diferentes tipos de aprendizajes basados en la indagación. Además, se exploran beneficios de las metodologías de enseñanza basadas en ABI y el impacto que genera la competencia de indagación en los procesos de enseñanza-aprendizaje. De igual forma se documentaron toda una serie de lineamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en las áreas de Matemáticas y Ciencias Naturales con el fin de buscar las posibles relaciones con el concepto de la derivada.

El enfoque de esta investigación es cuantitativo con un diseño cuasiexperimental, donde se trabajó con 98 estudiantes de último grado del Colegio La Salle en Montería-Colombia en el año 2022. Para ello se utilizó un diseño de cuatro grupos, dos grupos experimentales y dos grupos control, con medidas repetidas. A partir de los datos proporcionados por los cuestionarios, los cuales fueron realizados teniendo en cuenta la Guía de orientación Saber 11 y posteriormente validados, se aplican pretest, posttest y test de retención; este último consistió en

el mismo posttest, pero aplicado 30 días después, con el fin de analizar sus resultados a largo plazo. Se analizaron los datos de manera descriptiva y a través de un análisis de varianza de medidas repetidas para examinar las diferencias entre los grupos y el impacto de la estrategia ABI en el desarrollo del pensamiento numérico variacional asociado a la noción de la derivada

Los resultados mostraron que existen diferencias significativas en las puntuaciones de los cuestionarios entre los grupos experimentales. Esto respalda la eficacia de la estrategia del Aprendizaje Basado en la Indagación 5E Lesson Cycle en el desarrollo del pensamiento numérico variacional asociado a la noción de la derivada. Además, se observó que la implementación de esta estrategia promovió un aprendizaje activo por parte de los estudiantes, lo que sugiere su utilidad en el contexto educativo.

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción	14
Descripción del Problema	16
Antecedentes del Problema.....	19
Formulación del Problema.....	21
Justificación de la Investigación	22
Objetivos.....	25
Objetivo General.....	25
Objetivos Específicos.....	25
Marco de Referencia.....	26
Antecedentes Investigativos.....	26
Marco Teórico-Conceptual	42
<i>Aprendizaje Basado en la Indagación (ABI)</i>	42
Historia del Aprendizaje Basado en la Indagación (ABI)	43
Tipos de Aprendizaje Basado en la Indagación (ABI)	45
Beneficios del aprendizaje basado en la indagación (ABI)	48

<i>Aprendizaje Basado en la Indagación en las Matemáticas</i>	49
Competencia de Indagación	51
Ciclo de aprendizaje 5E	54
<i>Estructura y Componentes en el Área de Matemáticas</i>	59
Lineamientos Curriculares Matemáticas.....	59
Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas	62
Competencias y Componentes en Matemáticas.....	64
Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas	69
<i>Definición de la Derivada</i>	74
Historia de la Derivada	74
Concepto de la Derivada en educación media	76
METODOLOGÍA	79
Enfoque y tipo de investigación.....	79
Población y Muestra	79
Diseño Metodológico.....	80
<i>Hipótesis</i>	82
<i>Operacionalización de Variables</i>	83
<i>Fases o Etapas de la Investigación</i>	84
<i>Instrumentos</i>	85
Diseño de Instrumentos.....	85
Validación.....	86

Técnicas de Aplicación.....	87
<i>Técnicas de Análisis Utilizadas</i>	88
Resultados.....	90
Análisis e Interpretación de Datos	90
Verificación de Hipótesis.....	105
Discusión de los Resultados.....	112
Conclusiones y Recomendaciones.....	115
Referencias.....	119
Apéndice A Pretest	127
Apéndice B Postest	130
Apéndice C Resultados pretest, postest y test de retención	133
Apéndice D Resultados en cada cuestionario por niveles	137
Apéndice E Resultados de cada estudiante por competencias.....	138
Apéndice E Puntuaciones de cada estudiante y cuestionarios	146
Apéndice F Secuencia de aprendizaje basada en indagación	149

Apéndice G Plan de Asignatura y Malla Curricular Análisis y Cálculo 11° 153

Apéndice H Datos confiabilidad pretest y postest 157

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1 <i>Ejecución del plan para hallar el punto de equilibrio</i>	51
Tabla 2 <i>Ciclo de aprendizaje 5E</i>	58
Tabla 3 <i>Estándares básicos de competencia en matemática para cada pensamiento 10°-11°</i>	63
Tabla 4 <i>Competencias en Matemáticas</i>	64
Tabla 5 <i>Componentes evaluados en Matemáticas</i>	65
Tabla 6 <i>Clasificación de contenidos genéricos y no genéricos en el pensamiento numérico variacional</i>	68
Tabla 7 <i>Descripción de los niveles de desempeño en Matemáticas</i>	69
Tabla 8 <i>Descripción de los DBA en Matemáticas asociados a la noción de la derivada 10°</i>	70
Tabla 9 <i>Descripción de los DBA en Matemáticas asociados a la noción de la derivada 11°</i>	71
Tabla 10 <i>DBA en Matemáticas versión 2 asociados a la noción de la derivada 10° y 11°</i>	72
Tabla 11 <i>Formación de grupos experimental y no experimental</i>	80
Tabla 12 <i>Esquematización del diseño metodológico de cuatro grupos de Solomon con series cronológicas</i>	81
Tabla 13 <i>Operacionalización de las variables</i>	83
Tabla 14 <i>Fases de la investigación</i>	84
Tabla 15 <i>Estadístico de fiabilidad pretest y postest</i>	87
Tabla 16 <i>Resumen de estadísticos descriptivos para cada una de las pruebas aplicadas</i>	92
Tabla 17 <i>Resumen de estadísticos descriptivos para cada una de las pruebas aplicadas y grupos</i>	106
Tabla 18 <i>Prueba de esfericidad de Mauchly</i>	107

Tabla 19 <i>Prueba de Efectos intrasujetos</i>	108
Tabla 20 <i>Comparación por pares</i>	109
Tabla 21 <i>Comparaciones múltiples</i>	110
Tabla 22 <i>Datos de cada cuestionario pretest, postest y test de retención</i>	133
Tabla 23 <i>Resumen de número de estudiantes por niveles de desempeño en cada grupo y cuestionario</i>	137
Tabla 24 <i>Resultados por competencias del área de matemáticas</i>	138
Tabla 25 <i>Resultados por puntuación en cada uno de los grupos y cuestionarios</i>	146
Tabla 26 <i>Secuencia de aprendizaje basada en la indagación, ciclo de enseñanza 5E</i>	149
Tabla 27 <i>Datos para determinar la confiabilidad del pretest</i>	157
Tabla 28 <i>Datos para determinar la confiabilidad postest</i>	157

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1 <i>Resultados históricos área de Matemáticas</i>	17
Figura 2 <i>Tipos de aprendizaje basados en la indagación</i>	46
Figura 3 <i>Ciclo De Aprendizaje De Pólya</i>	49
Figura 4 <i>La enseñanza basada en la indagación y el Ciclo de aprendizaje 5E</i>	55
Figura 5 <i>Modelo del proceso de estructuración curricular en matemáticas</i>	61
Figura 6 <i>Interpretación geométrica del concepto de la derivada</i>	76
Figura 7 <i>Interpretación geométrica del concepto de la derivada</i>	77
Figura 8 <i>Diagrama diseño de cuatro grupos de Solomon con pretest, postest y test de retención</i>	82
Figura 9 <i>Diseño de series cronológicas múltiples basada en cuatro grupos</i>	89
Figura 10 <i>Distribución por género en cada grupo de estudio</i>	91
Figura 11 <i>Media pretest, postest y test de retención para cada uno de los grupos</i>	91
Figura 12 <i>Comparación de puntuaciones pretest, postest y test de retención para grupos experimentales</i>	94
Figura 13 <i>Comparación de puntuaciones pretest, postest y test de retención para grupos control</i>	95
Figura 14 <i>Porcentaje de estudiantes por puntuación en la competencia de Comunicación, representación y modelación</i>	97
Figura 15 <i>Porcentaje de estudiantes por puntuación en la competencia de Razonamiento y argumentación</i>	99
Figura 16 <i>Porcentaje de estudiantes por puntuación en la Resolución de problemas</i>	101

Figura 17 <i>Comparación de porcentaje de estudiantes según niveles de desempeño en cada cuestionario</i>	102
Figura 18 <i>Medias marginales estimadas de Puntuación</i>	112

Introducción

Dentro de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se hace un llamado, no sólo a la reflexión, discusión y consenso, sino también, al estudio de las consideraciones allí planteadas, con el fin de que posibiliten, promuevan y orienten los procesos curriculares en las instituciones educativas. El paso acelerado hacia la modernización y los nuevos desafíos del siglo XXI, hacen que el estudiante adquiera una serie de habilidades matemáticas que le permitan desenvolverse en contexto. A pesar de los intentos por parte de las políticas públicas educativas al mejoramiento de las matemáticas, el abordaje adecuado del currículo de matemáticas sigue siendo un talón de Aquiles en las instituciones

El presente trabajo tiene como propósito, desde una intervención pedagógica, potenciar el pensamiento numérico variacional asociado al concepto de derivada en grado 11° en estudiantes del Colegio La Salle en la ciudad de Montería, abordando los ejes transversales propuestos desde el Ministerio de Educación Nacional: Interpretación y representación; Formulación y ejecución, Argumentación.

Debido a que el concepto de la derivada lo encontramos en múltiples campos se hace necesario establecer acciones concretas que ayuden a mejorar los niveles de pensamiento numérico variacional. El actual trabajo de abordaje pedagógico se compone de cinco capítulos, así:

En el primer capítulo, aspectos preliminares, se aborda la situación de estudio mediante la especificación de la descripción del problema, antecedentes, formulación, justificación y objetivos.

En el segundo capítulo, se encuentra el marco de referencia, detallando antecedentes investigativos y marco teórico conceptual.

El tercer capítulo, muestra el diseño metodológico utilizado, enfatizando enfoque y tipo de la investigación, población y muestra, hipótesis y operacionalización de las variables, los instrumentos de recolección de información.

El cuarto capítulo, se estructura el análisis de los resultados obtenidos en las pruebas diagnósticas, la propuesta de intervención, los resultados obtenidos en cada actividad y la prueba final. En el quinto capítulo, se encuentran las conclusiones y recomendaciones.

Descripción del Problema

En el colegio La Salle de Montería, los estudiantes presentan con mucha frecuencia un bajo desempeño en los periodos académicos normales, tanto en las evaluaciones estandarizadas externas realizadas por el grupo educativo Helmer Pardo, como en las pruebas Saber 11. La problemática ha generado predisposición por parte de estudiantes, hecho que genera la pérdida en las asignaturas que se consideran dentro del área de Matemáticas como: Estadística, Análisis y Cálculo (En grado 11°), sin dejar a un lado también que, en comparación con otras áreas como: Física, Química, etc., Matemáticas presenta altos porcentajes de estudiantes con niveles mínimos.

Si bien es cierto que es una problemática conocida por todos, la poca capacitación del personal docente en estrategias que permitan un desarrollo óptimo de los distintos niveles de pensamiento en el área de matemáticas hace que haya un desconocimiento de cómo abordar la problemática del bajo desempeño. Hoy por hoy predominan estrategias estandarizadas centradas en el desarrollo de muchos ejercicios y se piensa que, a mayor temática abordada, el estudiante desarrollará buenas competencias, hecho que hay que replantear.

Ligado al bajo desempeño en el área de Matemáticas, hay una deficiencia en el componente numéricos-variacional, el cual está definido por Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal (ICFES, 2014) :

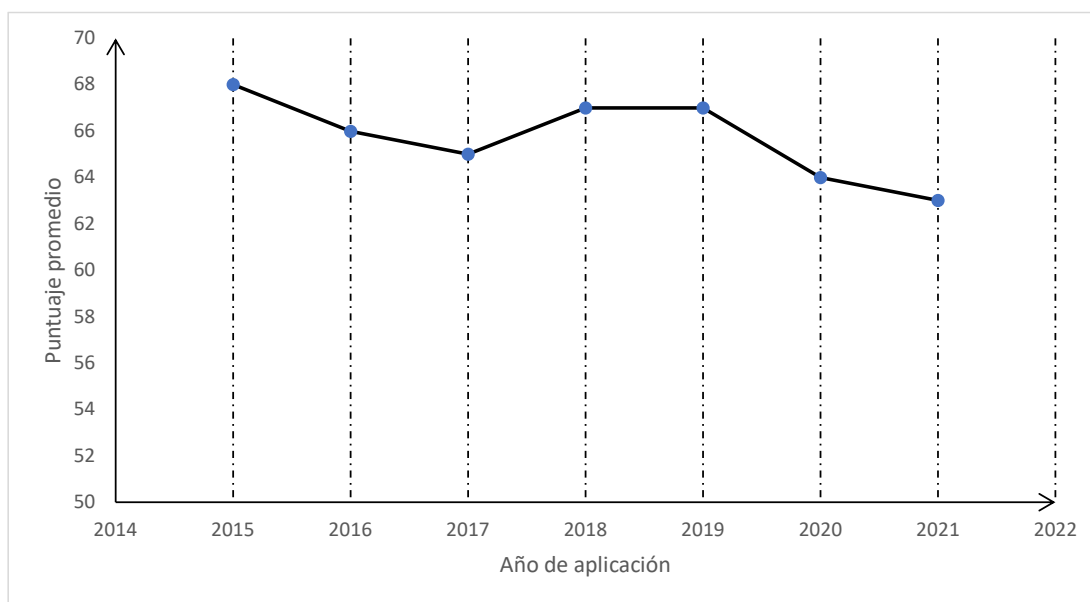
Aspectos asociados a los números y la numeración, su significado y la estructura del sistema de numeración; las operaciones, sus propiedades, su efecto y las relaciones entre ellas; el reconocimiento de regularidades y patrones, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la proporcionalidad, a la variación lineal en contextos

aritméticos y geométricos el lenguaje simbólico (algebraico), a la variación inversa y el concepto de función. (p.67)

Por otro lado, en los últimos años, en el colegio La Salle Montería, se ha notado una disminución en cuanto al puntaje promedio en los resultados correspondientes al área de Matemáticas en las pruebas Saber 11. El puntaje promedio se reporta para cada prueba y subprueba en una escala de 0 a 100, sin decimales, con media 50 y desviación estándar 10, fijadas únicamente en la primera aplicación del examen (2014-2).

Figura 1

Resultados históricos área de Matemáticas



Nota. La figura muestra los resultados históricos en la prueba saber 11 en área de Matemáticas.

En 2015, el promedio fue de 68, con una desviación de 14. A partir de ese año, se observó una disminución gradual en los promedios, alcanzando su punto más bajo en 2021 con un promedio de 63. Sin embargo, las desviaciones permanecen relativamente constantes, oscilando entre 9 y 14. Estos resultados sugieren que, aunque los promedios han disminuido a lo

largo de los años, la variabilidad en los resultados se ha mantenido relativamente estable. Esto puede indicar que hay una necesidad de desarrollar estrategias y enfoques educativos que ayuden a mejorar los promedios y reducir la variabilidad en los resultados de matemáticas en los próximos años. Es importante implementar métodos de enseñanza efectivos, brindar apoyo adicional a los estudiantes que lo necesiten y fomentar un ambiente de aprendizaje estimulante y motivador para promover un mejor rendimiento en el área de matemáticas.

Por lo anterior, y como se ha enfatizado, necesitamos implementar estrategias didácticas que permitan fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes de grado 11. Una temática que encierra diversos procesos y apunta al fortalecimiento de diferentes competencias es la derivada, la adquisición en las nociones de la derivada y razones de cambio forman la base para la comprensión que tiene una persona sobre los números y las operaciones que subyacen de éstos, así como la caracterización de la variación en diferentes contextos.

Antecedentes del Problema

La comprensión de las matemáticas se ha vuelto un reto para los estudiantes, y los docentes deben estar a la vanguardia de accionar pedagógico adecuado para facilitar los aprendizajes. Ante esta necesidad, Pineda (2013) atribuye al tiempo que se le dedica al concepto de derivada dentro del currículo, como factor determinante en el incorrecto aprendizaje de dicho concepto, además de una inadecuada asimilación de conceptos que son prerequisites tales como los conceptos de variable, función, razón de cambio y límite de una función. De igual forma, atribuye que los estudiantes que se quedan en la parte operativa de calcular derivadas se deben a falencias en los conceptos mencionados anteriormente. Por eso, Pineda basa su propuesta didáctica en la asimilación adecuada de conceptos como: variables dependientes e independientes, funciones y sus graficas (Dominio y rango de una función), función lineal y afín, razón de cambio, velocidad media de un cuerpo, pendiente de una recta.

Por otro lado, Barrientos (2014) hace hincapié en realizar transformaciones sobre las estructuras, los objetivos y los métodos que se utilizan en las aulas de clase, es por ello que propone un Libro-Taller como herramienta directa del proceso de enseñanza de los estudiantes de grado 11° en el concepto de derivada. Con lo anterior Barrientos busca dinamizar e incrementar el desarrollo de las habilidades en los estudiantes respaldando la exploración, interacción y construcción de conocimientos.

Según el ICFES (2020) en el último informe publicado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) el panorama en Colombia muestra estudiantes con deficiencias en las tres áreas evaluadas en la prueba PISA-2018; Lectura (412), Matemáticas (391) y Ciencias (413), con relación al rendimiento de la media de los países pertenecientes a la OCDE los cuales tienen 500 puntos. Países como Estonia y Canadá han logrado mantenerse en

los primeros puestos debido a que, dentro de su sistema educativo han logrado incluir metodologías de aprendizaje contextualizadas. La implementación de enfoques orientados a la indagación en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas, junto con una formación docente verdaderamente transformadora, resultan fundamentales para alcanzar altos niveles de rendimiento académico.

García et al. (2019) examina la relación entre el uso de un modelo basado en indagación en la enseñanza de Matemáticas y Ciencias con el rendimiento académico de los alumnos. Contrario a lo que se encuentra en la literatura sobre el modelo tradicional en la enseñanza de estas áreas del conocimiento conducen a un mayor rendimiento, los autores determinan que hay poca relación e influencia entre el modelo tradicional y las variables asociadas al rendimiento académico de los alumnos. Sin embargo, cuando, ambos modelos se usan de manera intensiva, el rendimiento académico puede variar dependiendo del contexto.

Es importante destacar que pese a que se estén creando metodologías de enseñanzas emergentes que desafíen las concepciones tradicionales sobre la enseñanza de las Ciencias y Matemáticas, las prácticas docentes aún no reflejan un uso generalizado de dichas metodologías. A pesar de los avances logrados, es necesario seguir trabajando en la integración y aplicación efectiva de enfoques basados en la investigación en el aula.

Formulación del Problema

¿Cuáles son los efectos de la aplicación de la estrategia de enseñanza basada en la indagación (ciclo de enseñanza de las 5 E) en el desarrollo de habilidades del pensamiento numérico variacional asociado a la noción de derivada en estudiantes de grado 11° en el colegio La Salle de Montería?

Justificación de la Investigación

Actualmente se siguen usando enfoques tradicionalistas de transmisión de conocimiento que hacen que las clases no permitan el desarrollo de habilidades para un aprendizaje significativo, entre los cuales se caracteriza siempre al docente como un instructor del aprendizaje y no un facilitador. Aquí predominan la transmisión de procedimientos como única manera de aprender matemáticas.

Es pertinente implementar estrategias pedagógicas que promulguen una pedagogía que no simplifique el aprendizaje. De acuerdo con el constructivismo, el aprendizaje debe ser construido activamente por los estudiantes a través de la interacción con su entorno y la reflexión sobre sus experiencias. Las estrategias pedagógicas simplificadoras afectan negativamente el proceso de aprendizaje ya que el exceso de memorización y repetición mecánica sin significado para el sujeto y que se internalizan al pie de la letra, limita la comprensión profunda y el desarrollo de habilidades cognitivas superiores Ausubel et al. (1983). El accionar docente está llamado a proporcionar entornos didácticos que fomenten la motivación intrínseca el pensamiento creativo, el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas y la autonomía de los estudiantes en su proceso de aprendizaje. El llamado a todo docente que quiera enseñar una asignatura debe ser capaz de suscitar el deseo de aprenderla y ser capaz de ponerse en el lugar de los que están apasionados por cualquier cosa menos por la asignatura que va a impartir Savater (1997).

Por otro lado, las pruebas de estado Saber 11, cada año se están realizando en fechas cercanas al inicio del último año escolar. Es por ello que, implementar estrategias de enseñanza que potencien el aprendizaje de los estudiantes de grado 11 contribuirá de forma positiva a abarcar los planes de asignatura en matemáticas, y con esto, los estudiantes tengan las herramientas cognitivas para realizar una excelente prueba.

Hoy en día la educación está enmarcada en formar estudiantes competentes. Para lograr esto en matemáticas se deben desarrollar destrezas tanto en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, que anteriormente se subdividía en cinco y ahora es integrado en tres componentes, Numérico-Variacional, Geométrico-Métrico y Aleatorio.

La importancia del cálculo diferencial en educación superior nos obliga a implementar estrategias de enseñanza en la educación media que enfrenten no sólo la complejidad del símbolo (álgebra) sino también a la complejidad del cambio y de la causalidad determinística (cálculo), con el fin de crear:

Acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas. (MEN, 2006, p.66)

En primer lugar, el aprendizaje de las matemáticas, incluido el cálculo diferencial, desarrolla el pensamiento lógico y analítico de los estudiantes. Al enfrentarse a problemas complejos y abstractos, los estudiantes deben aprender a razonar, argumentar y encontrar soluciones lógicas basadas en reglas y principios matemáticos. Esta capacidad de análisis y pensamiento crítico es esencial en muchas áreas de la vida, desde la toma de decisiones cotidianas hasta la resolución de problemas complejos en diferentes campos profesionales.

Además, el estudio del cálculo diferencial fomenta la habilidad para modelar y comprender fenómenos de cambio y variación. Esta comprensión del cambio es fundamental en muchas disciplinas científicas, como la física, la biología, la economía y la ingeniería. La

capacidad de entender cómo las variables se relacionan y cómo evolucionan a lo largo del tiempo permite a los estudiantes tener una visión más profunda y completa del mundo que les rodea.

Por lo anterior debemos implementar estrategias de aprendizaje que ayuden a mejorar las dinámicas tradicionalistas de una clase totalmente desarticulada de la realidad de hoy día, es por ello que la propuesta de implementar el ciclo de aprendizaje 5E se hace permitente ya que esta se basa en un enfoque constructivista del aprendizaje, que promueve la participación activa de los estudiantes y fomenta el descubrimiento y la comprensión profunda de los conceptos desde una perspectiva del desarrollo integral.

Los cinco pasos de la estrategia 5E -Engage (captar la atención), Explore (explorar), Explain (explicar), Elaborate (elaborar) y Evaluate (evaluar)- proporcionan una estructura clara para el diseño de lecciones y actividades que se alinean con las necesidades e intereses de los estudiantes y que por ende susciten motivación e interés en los estudiantes y permite crear mejores ambientes de aprendizaje.

Objetivos

Objetivo General

Establecer la incidencia de la implementación de la estrategia basada en la indagación (ciclo de enseñanza de las 5E) en la expresión de pensamiento numérico variacional asociada a la noción de derivada en los estudiantes de grado 11° del colegio La Salle Montería.

Objetivos Específicos

Diseñar un ambiente de aprendizaje basado en la estrategia de aprendizaje basada en la indagación (ciclo de enseñanza de las 5E) como intervención en las expresiones de pensamiento numérico variacional asociada a la noción de derivada en estudiantes de grado 11° en la asignatura de Análisis y Cálculo.

Aplicar la metodología de aprendizaje basado en la estrategia de aprendizaje basada en la indagación (ciclo de enseñanza de las 5E) como intervención en las expresiones de pensamiento numérico variacional asociada a la noción de derivada en estudiantes de grado 11° en la asignatura de Análisis y Cálculo.

Comparar si existen diferencias significativas en el aprendizaje de pensamiento numérico variacional en los estudiantes de grado 11° en la asignatura de Análisis y cálculo que utilizan una estrategia de aprendizaje convencional y aquellos que trabajan con la estrategia de aprendizaje basada en la indagación (ciclo de enseñanza de las 5E)

Evaluar la retención y la estabilidad de los conocimientos adquiridos mediante la realización de pruebas repetidas en diferentes momentos a lo largo de un período determinado para los estudiantes que siguen la metodología de aprendizaje basado en la estrategia de aprendizaje basada en la indagación (ciclo de enseñanza de las 5E) y para aquellos que siguen una estrategia de aprendizaje convencional.

Marco de Referencia

A continuación, se incluye el referente teórico, enfoques o tendencias propuestas por diversos autores, los cuales le dan el sustento al estudio de la variable Aprendizaje Basado en la indagación 5E Lesson Cycle como estrategia en el desarrollo del pensamiento numérico variacional asociado a la noción de la derivada, con el fin de darle cimiento a los objetivos planteados, al igual que darle coherencia a las dimensiones e indicadores. De igual forma, contiene los antecedentes investigativos, marco teórico y conceptual.

Antecedentes Investigativos

Inicialmente, Muñoz et al. (2015) en su artículo “Estudio sobre los factores que influyen en la pérdida de interés hacia las Matemáticas” presentan los resultados de una investigación sobre la pérdida gradual del interés hacia las matemáticas de 163 estudiantes del Colegio Filipense “Nuestra Señora de la Esperanza” de la ciudad de San Juan de Pasto, Nariño, Colombia. La investigación fue de tipo descriptivo, e hizo uso de una metodología mixta: cuantitativa y cualitativa. La población objeto de estudio fueron estudiantes de la sección primaria y bachillerato cuyas edades oscilan entre los 5 y 18 años; cabe resaltar que son estudiantes que no presentaron trastornos mentales ni pedagógicos. Los grados se repartieron en 4 niveles de aprendizaje: Nivel 1 (1°, 2° y 3°); Nivel 2 (4°, 5° y 6°); Nivel 3 (7°, 8° y 9°); Nivel 4 (10° y 11°), esto con base a los niveles presentados por los Estándares Básicos de Calidad Educativa. Se escogieron 15 estudiantes por cada grado, 5 de rendimiento alto, 5 de rendimiento medio y 5 de bajo rendimiento académico para reunir la información necesaria.

La información se obtuvo mediante un cuestionario con escala Likert diseñado por los autores y denominado FIPIM, el cual brindó la posibilidad de medir actitudes o predisposiciones individuales en contextos sociales particulares, el cuestionario se organizó en cinco categorías de

estudio: Importancia e interés, capacidad Matemática, profesor, compañeros y familia. Con base al análisis estadístico de la escala, se aplicaron también entrevistas, las cual permitieron que el entrevistado hablara libremente, facilitando expresarse en su lenguaje habitual.

Entre los hallazgos más generales estuvo el aumento de la actitud negativa del nivel 1 al 4. Puesto que los estudiantes sienten que en el aula de clase el trabajo en matemáticas es mecánico y los ejercicios realizados no son significativos para la resolución de sus problemas cotidianos, esto hace que se empiece a restar importancia a las matemáticas.

De igual forma concluyen que en nivel 1, al existir mayor motivación por parte del profesor, los niños generan mayor confianza hacia sus habilidades en matemáticas, mientras que esto no ocurre en el nivel 4, sumado a los malos hábitos de estudio de los más grandes.

La tercera conclusión señala la importancia del papel que juega el profesor en las clases de matemáticas en la parte afectiva y reconocen el esfuerzo por hacer los temas comprensibles, y por aplicar estrategias metodológicas que permitan la apropiación de los conceptos matemáticos. Sin embargo, la investigación mostró el cambio significativo que existe en relación al uso de materiales didácticos, laboratorios de matemáticas, actividades lúdicas que en nivel 1 son mucho más frecuentes y en el nivel 4 tienden a desaparecer.

Por último, Muñoz et al. (2015) refieren que tanto las relaciones entre compañeros como la familia son fundamentales para que el estudiante se anime e interese por el estudio de las Matemáticas. Además, recomiendan que si se forman lazos de amistad se observa que los estudiantes con mejores resultados explican y ayudan a sus amigos, pero que se debe prestar atención a las relaciones entre compañeros ya que estos pueden promover también el fracaso, porque su influencia puede distraer la atención en clase.

La importancia de esta investigación viene dada por lo que Muñoz et al. (2015) denominan cambios significativos en relación con el uso de materiales didácticos y actividades lúdicas, las cuales son menos frecuentes en grados superiores. Y es que nuestra concepción de enseñanza de las matemáticas está fuertemente influenciada por el tradicionalismo imperante, provistos también en los textos escolares en donde prima más la cantidad que la calidad de los contenidos, dejando a un lado experiencias significativas de aprendizaje en los estudiantes.

En palabras de Guillén (2016):

Este cambio exige pasar de una concepción del conocimiento atomista a una holística; de un enfoque competitivo e individualista del aprendizaje a la generación de ambientes de aprendizaje cooperativos, colaborativos y de apoyo; del papel de los profesores como conferencista a un papel de guías en el proceso de aprendizaje.

Como educadores estamos llamados a garantizar la calidad del aprendizaje implementando estrategias que cambien paradigmas de enseñanza. Es un desafío, sin lugar a duda, aunque existe la posibilidad de tener el deseo de implementar estrategias, pero sin darnos cuenta estamos aplicando métodos tradicionales.

Por lo anterior, Suavita y Gómez (2016) en su artículo titulado “Metodologías ensoñadas Vs. Metodologías implementadas. Un estudio sobre los imaginarios de los docentes hacia la enseñanza de las matemáticas,” tuvo como finalidad contrastar la manera en que los profesores consideran que deben ser enseñadas las matemáticas (lo cual hace parte del imaginario), con sus acciones en el aula (la realidad).

La metodología utilizada fue un estudio Biográfico-Narrativo combinado con la observación de aula. Concretamente participaron dos docentes de sendos colegios públicos de educación secundaria de la comunidad de Madrid y se observó, en cada uno de ellos, el

desarrollo de una unidad didáctica de matemáticas. En las entrevistas se recogieron aspectos a considerar que permitieron obtener información sobre la historia de vida de los profesores y sus percepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Esta investigación dio como resultado que los docentes reconocen en su propia formación elementos importantes que influyeron en su motivación hacia las matemáticas, tales como la actitud de sus propios docentes- tanto positiva como negativa-, la autoestima respecto a su quehacer matemático, el trabajo en equipo, o la solución de problemas desafiantes. Los imaginarios de los profesores sobre su manera de aprender aparecen expuestos en el deseo de buenas prácticas, pero a pesar de este deseo, se vislumbra un aula de matemáticas que, por diferentes motivos, incluyendo una contradicción en el actuar personal, en ocasiones se aleja de ser motivante para los estudiantes.

Este antecedente es importante para esta investigación debido al reflexionar pedagógico sobre la necesidad de generar cambios reales y efectivos capaces de centrar la atención en las estrategias de enseñanza con que los docentes estamos abordando nuestro actuar, de igual forma es un llamado a la formación específica del profesorado, a cuestionarnos y a crear estrategias de enseñanza activas que garanticen aprendizajes efectivos.

No obstante, González y Díaz (2018) realizaron una investigación que tuvo como propósito presentar un rastreo bibliográfico de las tendencias actuales en Colombia acerca de la formación docente y desarrollo profesional situado para la enseñanza del Lenguaje y Matemáticas en los niveles de educación básica primaria y básica media. Se focalizaron tres categorías de análisis: comunidades de aprendizaje, desarrollo profesional situado y práctica pedagógica, demostrando de manera concreta cómo se ha impactado en la calidad de educación

del país, desde el sector oficial, mediante el análisis de los resultados obtenidos en las investigaciones realizadas en este campo educativo.

Los estudios abordados demostraron un efecto positivo sobre la enseñanza e instrucción orientada por los docentes, especialmente en sus metodologías, estrategias didácticas, desarrollo profesional situado y las prácticas evaluativas, así como en el aprendizaje de los estudiantes.

El aporte de esta investigación se centra en ofrecer un referente teórico sobre cómo a nivel nacional se está planteando un cambio de paradigma que coadyuve ciertamente a mejorar los procesos de formación de maestros en Matemáticas en Colombia.

González y Díaz (2018) afirman que a pesar de que en política educativa se busque modificar los procesos de enseñanza y aprendizaje, ella se encuentra con un obstáculo relacionado con las creencias y las concepciones de los docentes, como lo plantea González (2015) “los docentes no desarrollan su trabajo mecánicamente, sino que bajo de sus acciones subyacen creencias que influyen sobre la enseñanza” (p.5).

Al respecto, se plantean estrategias o propuestas didácticas que apuntan a la resolución de problemas, como pilar principal, donde se pretende generar procesos de reflexión del docente sobre su praxis, en palabras de Ramos et al. (2015) “los cambios en la actuación de los docentes pueden verse reflejados en relación con las tareas para el aula diseñadas por ellos para afrontar su práctica” (p.390).

Se tiene que destacar que esta estrategia de resolución de problemas se articula con la definición dada por el MEN (2006), en el marco del documento de competencias y apunta a la construcción del conocimiento matemático. Aquí se destacan dos aspectos: el primero que apunta a los conocimientos conceptuales, “el cual es teórico, producido por la actividad

cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué” (p.50).

En este sentido, se busca que se rompa el modelo tradicional, el cual no genera reflexión, porque la educación según Tobón et al. (2010) parte de “un docente que selecciona los contenidos de un programa, los organiza según su punto de vista y los explica” (p.5), para que luego, no se pretenda seguir con el modelo de transmisión de conocimiento, sino que se avance en un modelo donde docente y estudiante puedan “enfrentarse a una tarea relevante (situada) que generará aprendizaje por la puesta en marcha de todo el ser” (Pimienta y Enríquez, 2009, p.27).

Por lo anterior, cuando se vuelca la metodología tradicional a una metodología cuyo eje central es un proceso de reflexión, de autorregulación de aprendizajes, en donde el estudiante sea un actor en su proceso, un aprendizaje por indagación será perfecto para este tipo de enfoque constructivista, ya que lo que se pretende es que éste último tenga la capacidad de seguir métodos y prácticas similares a las de los científicos; formular hipótesis y probarlas realizando experimentos u observaciones.

Durante el proceso de aprendizaje basado por indagación los estudiantes a menudo llevan a cabo procesos de aprendizaje auto dirigido, en parte inductivo y en parte deductivo, realizando experimentos para investigar las relaciones de al menos un conjunto de variables dependientes e independientes, Wilhelm y Beishuizen (2003). Esto promueve que el estudiante tenga la capacidad de irse ejercitando en el ejercicio de formularse preguntas acerca de un problema en cuestión y tratar de responderlas.

Debido que las competencias en matemáticas están relacionadas con resolver problemas en contexto, la competencia de indagación estará ligada a las competencias en matemáticas. A pesar de que los lineamientos curriculares en Matemáticas no hablan propiamente de la

indagación como competencia, si es una competencia que todo estudiante debe ir desarrollando en su proceso de formación escolar desde todas las áreas.

Por otro lado, en cuanto a la utilización del Aprendizaje Basado en la Indagación (ABI en adelante) no es algo nuevo y los docentes lo incorporan en su accionar pedagógico. Existe evidencia de que el ABI es una buena propuesta didáctica eficaz para desarrollar competencias investigativas y por ende mejorar todo lo relacionado con los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, Aramendi et al. (2018) presentan la investigación “El aprendizaje basado en la indagación en la enseñanza secundaria”. Un diseño cuantitativo de tipo ex-post facto y basado en la recogida de datos objetivos. El estudio se realizó en los institutos de secundaria de la zona de San Sebastián (España) y la ciudad de Nantes (Francia). Se enviaron 5 cuestionarios a 5 centros de secundaria con modelos educativos trilingües (bretón, francés e inglés) existentes en la zona de Nantes (Escuelas Diwan) y a 5 institutos de los alrededores de San Sebastián (euskera, castellano e inglés). Cabe mencionar que además de implementar una estrategia ABI estos centros de educación tenían similitudes en lo referente a las finalidades de su proyecto educativo (preservar y fomentar el idioma y la cultura autóctona). De igual forma el estatus socioeconómico de los estudiantes pertenecientes a los centros educativos eran muy similares.

En el estudio participaron estudiantes entre 12 y 15 años, 568 de la zona de Nantes (Bretaña) y 452 de la zona de San Sebastián. Participaron el 73.27% de los estudiantes de los centros educativos seleccionados.

La investigación tuvo como objetivo fundamental describir las opiniones de los estudiantes de secundaria de ambas ciudades sobre aspectos genéricos del ABI, para ello se analizaron las características del alumnado, se describieron las opiniones de los estudiantes de las

dos regiones sobre las estrategias de enseñanza ABI y se analizaron y compararon las puntuaciones obtenidas por los estudiantes con y sin problemas académicos en relación con las actividades de aprendizaje desarrolladas en el aula.

Para recoger la información se elaboró un cuestionario el cual contenía 8 ítems de datos generales; edad, sexo, nivel de satisfacción del estudiante, utilización del ordenador para escribir textos, consumo de videojuegos, Internet y televisión y situación académica. En principio había 40 ítems relacionados a las actividades de aprendizaje. Se llevó a cabo una prueba piloto con 13 estudiantes de las dos regiones (6 de Bretaña y 7 del País Vasco) participantes en este estudio. Se seleccionaron a éstos en función de su edad (entre 12 y 15 años) y sexo (6 chicos y 7 chicas). Se modificó la redacción de 12 ítems y se clarificaron las instrucciones de la prueba, fundamentalmente por cuestiones idiomáticas. El cuestionario quedó con 48 ítems. En ellos se analizan las características del alumnado (ítems dicotómicos) y el grado de acuerdo en una escala Likert (1: Poco/Nada de acuerdo; 4: Mucho/Totalmente de acuerdo) en relación con las diferentes actividades de aprendizaje utilizadas en clase. El análisis de la fiabilidad y validez supuso la eliminación de 12 elementos, quedando finalmente una escala de 28 ítems validada mediante análisis factorial exploratorio en 6 dimensiones ($KMO= 0.795$; Varianza= 48.69%) y con un Alfa de Cronbach total de 0.803.

En la investigación una vez aplicada la estrategia ABI se concluye que los estudiantes consultados entre doce y quince años, afirman ir a gusto a clase, juegan con los videojuegos menos de dos horas diarias, utilizan frecuentemente internet, ven poco la televisión y, la mayoría, en su momento, tenía aprobadas todas las asignaturas. De igual forma se constató la importancia concedida por el alumnado al ámbito emocional y a las actividades relacionadas con la indagación y el descubrimiento, el conocimiento de problemas, el trabajo en equipo,

comunicarse y la búsqueda de información (internet). Todo esto indica que trabajar con esta metodología garantiza un aprendizaje significativo en los estudiantes

La importancia de esta investigación es que demuestran que cuando se desarrollan procesos de indagación ligados con la vida cotidiana del estudiante su aprendizaje mejora, además siempre será mejor en ellos fomentar la búsqueda y la gestión de la información para garantizar una apropiación en los conceptos.

En Venezuela, Camacho et al. (2008), elaboraron un estudio titulado “La indagación: una estrategia innovadora para el aprendizaje de procesos de investigación”, en el cual su objetivo principal fue analizar la indagación como una estrategia innovadora para aprender los procesos de investigación. El enfoque epistemológico fue la investigación acción. Para la recogida de los datos usaron técnicas de observación directa y análisis de verbalizaciones de los participantes. Los resultados develaron que la indagación es una vía para generar cambios conceptuales y argumentativos. Al igual que permite el debate en el aula sustentado en intereses de sus actores y sus realidades.

En España, Ortiz y Greca (2017) presentan la investigación “Diseño, aplicación y evaluación de una propuesta de enseñanza de electricidad y magnetismo mediante indagación para la escuela primaria” en la cual se presenta una experiencia de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Ciencias Naturales basada en la metodología didáctica de la indagación. Tuvo como objetivo principal medir el resultado de los alumnos cuando son sometidos el uso de la metodología de la indagación. El enfoque de la investigación fue investigación –acción, y los instrumentos utilizados para dar respuesta a la pregunta fueron: diario de observación del docente y materiales escritos de los alumnos (cuaderno de campo, presentaciones y prueba escrita). Estos últimos fueron analizados mediante una rúbrica. Como resultado de tal

investigación se resalta los efectos positivos de los escolares tanto en adquisición de conocimientos, habilidades y actitudes como en el plano motivacional. De igual forma la manera de resolver y explicar las situaciones problemáticas tratadas en las secuencias didácticas por parte del alumnado denotó un acercamiento a la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. De la misma manera, comprobaron cada día que la motivación de los niños y su gusto hacia la ciencia crece con el uso de este abordaje didáctico.

En Indonesia Irma y Kumano (2011) realizan un estudio sobre la implementación de estrategias de aprendizaje basado en indagación utilizando diferentes métodos. El primer estudio fue llevado a cabo en el 2006 en una escuela privada de secundaria en Bandung (Oeste de Indonesia) y muestra un aprendizaje basado en el contexto usando un modelo de aprendizaje de indagación guiada para mejorar el dominio acerca del concepto de electricidad por los estudiantes. El segundo estudio fue implementado en el 2010 en el Junior High School en Bandung (Occidente de Indonesia), se muestra un auto monitoreo y un modelo de aprendizaje por indagación guiada para mejorar el dominio acerca del concepto de la luz por parte de los estudiantes.

Para el primer estudio se utilizó un método cuasiexperimental Pretest-Posttest con grupo control y grupo experimental. El grupo experimental contó con 32 estudiantes mientras que el grupo control con 30. Los instrumentos que utilizaron en esta parte fueron: una prueba de dominio conceptual, cuestionario y entrevistas. Los estudiantes del grupo experimental debían diseñar el plano del circuito de una casa.

En la segunda investigación se utilizó también un método cuasiexperimental con Pretest-Posttest, pero solamente con un grupo de 28 estudiantes. Se implementó un modelo de aprendizaje por indagación guiada. Cada fase del aprendizaje fue evaluada por los estudiantes

utilizando un instrumento de auto monitoreo. El aprendizaje se dividió en cuatro sesiones de 120 minutos. Los temas de cada lección fueron de óptica. Los estudiantes preguntaban acerca de cómo se debía llevar a cabo el experimento y discutieron sobre los datos tomados. Esta investigación arrojó como resultado que ambos estudios describieron incrementos en el logro del dominio conceptual de los estudiantes.

En Costa Rica Camacho (2012), en su artículo “Estrategias para promover la indagación y el razonamiento lógico en la educación primaria desde la didáctica de la Matemática”, se pretende generar una reflexión sobre la necesidad de crear situaciones innovadoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de Matemáticas, con el fin de promover la habilidad de indagación en el estudiantado y el desarrollo de razonamiento lógico aplicable a situaciones cotidianas. Debido al panorama oscuro en cuanto a rendimiento académico e interés se refiere, Camacho plantea una propuesta de trabajo desde el área de formación en la Didáctica de la Matemática que permitió generar la criticidad, la curiosidad y el razonamiento lógico en el estudiantado, denominada curiosidades matemáticas, tales como: Interpretación de jeroglíficos o dibujos, acertijos entre figuras o complete de serie de figuras, entre otros. De igual forma sugiere que en la resolución de problemas se emplee el método de los cuatro pasos de Pólya. Este trabajo recalca el rol del docente como generador de ambientes intelectuales y mediadores del aprendizaje.

Todas las anteriores investigaciones que se dieron a nivel internacional muestran una clara determinación en la incorporación de competencias investigativas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ahora bien, la educación en Colombia dentro de su marco legal educativo traza los objetivos específicos de la educación media académica en donde reglamenta la incorporación de la investigación al proceso cognoscitivo, tanto de laboratorio como de la

realidad nacional, en sus aspectos natural, económico, político y social. (Ley N° 115, 1994, art. 30), es decir, dentro del Proyecto Educativo Institucional (PEI) de cada establecimiento, se deben implementar ambientes y entornos pedagógicos donde se forme en investigación, en procesos de indagación, con el fin de una formación en torno a resolver problemas en la cual se integren el saber ser, saber hacer y saber conocer. De esta manera se han desarrollado varios trabajos a nivel nacional sobre ABI que vale la pena citar. La bibliografía de implementación de esta estrategia en las Matemáticas es escasa y la mayoría de los trabajos están enmarcados en el área de Ciencias Naturales. Aunque sí hay trabajos en las Matemáticas sobre propuestas didácticas relacionadas con la noción de la derivada y el fortalecimiento del pensamiento numérico-variacional que se citarán a continuación.

Dentro del contexto nacional se encuentra la investigación realizada en la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín a cargo de Tobón (2014) titulada “Propuesta Metodológica de enseñanza y aprendizaje para desarrollar la competencia de indagación en óptica geométrica con aplicación pedagógica de TIC en la Institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño” En ella el autor responde al cuestionamiento ¿Cómo crear una estrategia de enseñanza y aprendizaje en el área de Física que integre las TIC para desarrollar la competencia de indagación en la solución de problemas relacionados con óptica geométrica en la Institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño?

El Trabajo se desarrolló con un grupo de 30 estudiantes del grado 11, la investigación pone de manifiesto que la implementación de estrategias pedagógicas medidas por TIC favorecerán la competencia de indagación ya que fomenta la participación del estudiante en la investigación y recalca que las TIC no sólo recrearán ambientes simulados a lo que sucede en la

realidad sino que también brindarán la posibilidad al estudiante de construir argumentos coherentes y encontrar información más allá de la propuesta por el docente.

Otro de los antecedentes encontrados es el artículo de la investigación de Torres et al. (2013) titulado “Desarrollo de competencias científicas en las instituciones oficiales de la región andina del departamento de Nariño 2010-2011”, el cual se llevó a cabo por el grupo GI-DEP de la Facultad de Educación de la Universidad de Nariño. El propósito fue establecer en cada una de las competencias científicas desarrolladas; Explorar hechos y fenómenos, analizar problemas, formulación de hipótesis, observar, recoger, organizar la información; compartir los resultados; utilizar diferentes métodos de análisis y evaluación de métodos, el nivel de desempeño alcanzado por los estudiantes de quinto y sexto grado. Los resultados arrojaron una participación activa de los estudiantes en la construcción de conocimientos, que toman como punto de partida la pregunta y en el cierre los estudiantes expresaron sus hallazgos. Concluyen también que todas las competencias se manifiestan en diferentes niveles.

La importancia de esta investigación está en su aporte a seguir validando la indagación y el estudio de clase como estrategias didácticas alternativas para favorecer el desarrollo de las competencias científicas en los estudiantes. También muestra una forma de intervenir y evidenciar los procesos que hacen los estudiantes para desarrollar la competencia de indagación.

En la Institución Educativa Departamental Rural Pablo Herrera del municipio de Cajicá, Quitián (2018) realiza el estudio “Fortalecimiento del componente numérico-variacional a través de la resolución de problemas en grado tercero” con el fin de dar respuesta al bajo desempeño en el área de Matemáticas en el componente numérico-variacional y a las dificultades en el proceso de resolución de problemas en los estudiantes de dicho grado. Quitián planteó y diseñó una secuencia didáctica que contribuyera a favorecer el componente numérico-variacional a través de

la resolución y formulación de problemas Pólya (1965), utilizando el proceso de enseñanza de la multiplicación como excusa para ello y vinculando una situación generadora como la compra y venta dentro del supermercado.

Con la Planeación y ejecución de esta propuesta se concluyó que: El diseño de planeaciones muy bien pensadas y estructuradas a través de estrategias, como una secuencia didáctica, marca la diferencia al obtener el logro de determinadas metas con relación a una planeación con poco ejercicio investigativo, aunque este tipo de planeaciones toman tiempo y dedicación. De igual forma, el uso de material manipulativo contribuye de forma positiva al aprendizaje de los estudiantes. También, con el diseño e implementación de secuencias didácticas, es posible integrar dos o más pensamientos matemáticos e incluso pensar en la transversalidad de otras asignaturas con el área de matemáticas.

El aporte de esta investigación está en la invitación de no fragmentar el conocimiento, especialmente en ciencias y matemáticas, ya que a menudo se enseñan por separado, haciendo imposible que los estudiantes integren naturalmente estas dos áreas del saber. Las investigaciones muestran que los cursos en los que se integran múltiples disciplinas, cuando se comparan con cursos de una sola disciplina, se presenta un beneficio en igual o mayor grado Ruso (2011).

Badillo (2003) realizó una investigación titulada “La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas de Colombia. La derivada un concepto a caballo entre la Matemática y la Física”, identificó y describió la relación e integración entre el conocimiento del contenido Matemático y el conocimiento didáctico del contenido con relación al concepto de derivada de profesores de matemáticas en ejercicio en la ciudad de Barranquilla.

En este estudio adoptaron una metodología cualitativa de naturaleza descriptiva y exploratoria, ya que lo que se quiso estudiar fueron las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza aprendizaje. El tipo de investigación que se diseñó fue un estudio de cinco casos de docentes, en donde se definieron dos niveles de análisis: análisis macro y análisis micro:

El análisis macro de las restricciones institucionales permitió describir e interpretar como vive el objeto “derivada” en tres de las instituciones que influyen y condicionan, directa o indirectamente, la práctica del profesor: el conocimiento matemático, aspectos de la formación inicial y el diseño curricular. Las fuentes que permitieron obtener información de estas restricciones fueron: Conocimiento Matemático, Formación del profesorado y Diseño curricular.

En lo relacionado al análisis micro que versa sobre la descripción e interpretación de las formas de conocer que tienen los profesores sobre el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, los instrumentos que diseñaron e implementaron para recoger la información fueron: Un cuestionario indirecto de 5 problemas y cinco entrevistas semiestructuradas.

La investigación arroja conclusiones didácticas útiles que permitieron estudiar los esquemas con relación al concepto de la derivada. Hay una descoordinación entre los macro objetos $f'(a)$ y $f'(x)$. En algunos casos los docentes los integran en otros no, e incluso se presentan inconsistencias en la comprensión de estos. La triangulación del análisis de los niveles de comprensión con la información que dio el análisis de la unidad didáctica y de las evaluaciones les permitió observar que este problema se reproduce en la enseñanza secundaria y se transmite a los alumnos.

Se descubrió también un fenómeno que se produce en la enseñanza del concepto de derivada en Colombia y se puede definir como la confusión o la no diferenciación entre los macro objetos $f'(a)$ y $f'(x)$, esto lo constataron con mayor o menor grado, en todos los libros de textos de matemáticas de 11° que usaron los profesores que participaron en el estudio.

Uno de los mayores aportes de esta investigación está en la radiografía realizada del objeto de la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje, además se puede inferir una fuerte crítica, con evidencias convincentes al sistema de formación de los docentes en matemáticas y física.

De igual forma, se pone en primer plano un problema, que es generalizable a la mayoría de las instituciones colombianas. En el diseño curricular de la Enseñanza Secundaria Colombiana, cuando se contempla la enseñanza en el grado 10° de la física mecánica y, posteriormente, en el grado 11° la enseñanza del cálculo diferencial trae como consecuencia el estudio de la velocidad instantánea y de las razones de cambio previo a la introducción de los conceptos del Cálculo diferencial (derivada antes de límite).

Badillo (2003) afirma que si el profesor de física de 10° ya introduce el concepto de velocidad usando la notación incremental, aunque lo posponga en la matemática de 11°, sigue creando problemas e incoherencias en los estudiantes para comprender el mismo concepto en contextos diferentes.

Lo anterior crea problemas e incoherencias en los estudiantes para comprender el mismo concepto en contextos diferentes, término estudiado por Vinner (1991) denominado fenómeno de compartimentación. Hecho que actúa como obstáculo en la comprensión fenomenológica de los conceptos matemáticos.

Marco Teórico-Conceptual

A continuación, se describen los conceptos y teorías que ayudan a la comprensión y contextualización del problema identificado, así como brindar una base que oriente el enfoque y los métodos utilizados en este estudio.

Aprendizaje Basado en la Indagación (ABI)

El aprendizaje basado en la indagación es un enfoque instruccional que sirve para ayudar a los estudiantes a construir conocimientos a través de procesos de descubrimiento los cuales garantizan un aprendizaje significativo. Su fundamento está arraigado en metodologías constructivistas que implican el actuar del maestro como guía, además que envuelven a los estudiantes en actividades individuales y grupales, tales como; experimentos, discusiones y argumentaciones. Rutherford (1964) afirma que la indagación “se alcanza” cuando el contenido y los conceptos son comprendidos en el contexto de cómo fueron descubiertos y que permitan puedan ocurrir futuras indagaciones” De esta forma, les otorga un papel fundamental a procesos de enseñanza y aprendizaje situados y vinculados con la realidad, hecho que implica que los aprendizajes se faciliten investigando.

En esta investigación, el diseño de aprendizaje basado en la indagación se basa en la declaración hecha por Schwartz et al. (2004): “la indagación científica se refiere a los métodos y a las actividades que llevan al desarrollo científico” (p.612).

Esto significa que el aprendizaje basado en la indagación es una puesta en práctica de cómo conectar la investigación con la enseñanza.

De igual forma el psicólogo educativo Jerome Bruner afirma que, “El aprendizaje basado en la indagación es un proceso mediante el cual se llega a conocer a través de la manipulación activa de las cosas, la reflexión sobre las experiencias y el intercambio de ideas” (Bruner,1996).

Por lo anterior es importante recalcar que el ABI se enfoca en el proceso de aprendizaje, en lugar de solo el producto final, buscar respuestas y soluciones a preguntas, problemas o desafíos mediante la recolección y el análisis de información.

Las siguientes secciones presentarán la historia del ABI, tipos de enseñanza basados en este enfoque, algunos beneficios, así como su implementación en las Matemáticas. Por último, se profundiza en la importancia de la competencia de indagación, se concluye con la estrategia de enseñanza 5E, documentos rectores en el área de Matemáticas para el proceso de enseñanza-aprendizaje y el concepto de la derivada.

Historia del Aprendizaje Basado en la Indagación (ABI)

El ABI se ha desarrollado y ha evolucionado a lo largo de varios siglos. En la antigüedad, los filósofos como Platón y Aristóteles promovían el aprendizaje a través de la pregunta y la discusión. En el siglo XVII, el filósofo francés René Descartes promovió el método científico de indagar y cuestionar todo lo que se consideraba verdadero.

Durante el siglo XIX, el educador John Dewey (1859-1952) defendió la importancia del aprendizaje a través de la experiencia y la indagación activa, Alomá et al. (2022). Dewey promovió un enfoque educativo basado en la experiencia y la colaboración, argumentando que el aprendizaje es un proceso activo en el que los estudiantes deben estar involucrados directamente en el proceso de aprendizaje.

En la década de 1960 y 1970, el movimiento de la educación progresista promovió un enfoque de aprendizaje basado en la indagación y la exploración. El psicólogo suizo Jean Piaget (1896-1980), desarrolló una teoría del desarrollo cognitivo que se centra en cómo los niños aprenden a través de la exploración y la resolución de problemas. Piaget argumentó que los niños

son activos en su aprendizaje y aprenden mejor cuando se les permite descubrir por sí mismos.

Rodríguez (1999)

En la actualidad, el aprendizaje basado en la indagación sigue siendo un enfoque popular en la educación y se utiliza en una variedad de contextos educativos.

A pesar de que no hay información precisa sobre cuándo se implementó exactamente el aprendizaje basado en la indagación en Colombia, se sabe que el ABI ha sido un enfoque trascendental en la educación de América Latina en las últimas décadas. Es utilizado en diferentes niveles educativos y se ha adoptado en una variedad de contextos, incluyendo la educación formal e informal.

Cuando Colombia se empieza a centrar en una educación por competencias desde finales de los 90, en 1999 el Ministerio de Educación Nacional (MEN) implementa a nivel nacional la educación por competencias en el sistema educativo nacional, con el objetivo de mejorar la calidad de la educación y la formación de habilidades necesarias para el mundo laboral.

A partir de entonces, se han desarrollado programas y políticas educativas basadas en competencias, y se ha trabajado en la formación de docentes y en la implementación de estrategias de aprendizaje, en las escuelas, universidades y demás centros de educación formal e informal, que ayuden a fortalecimiento de las competencias de los estudiantes.

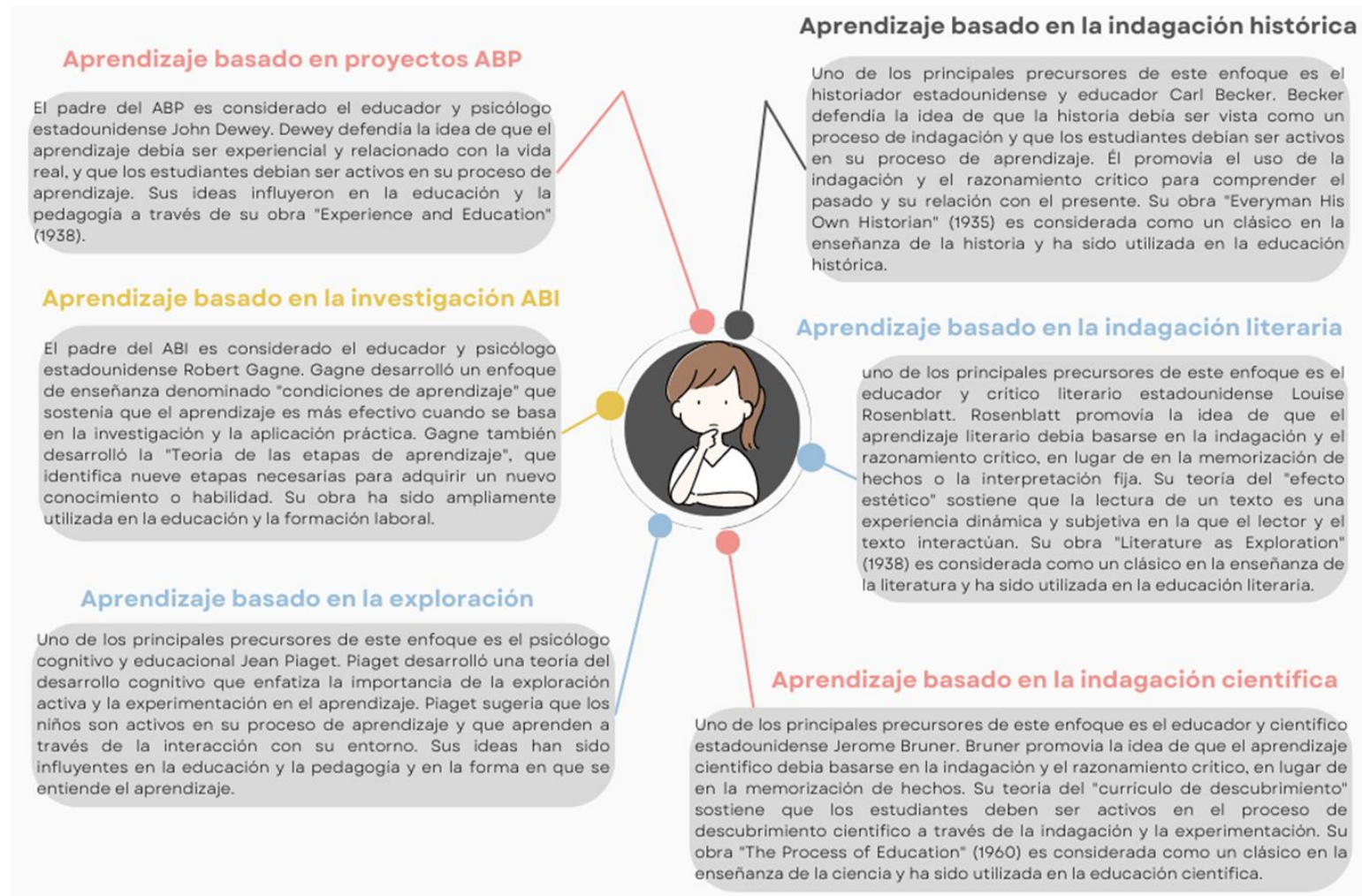
El proceso de enseñanza y aprendizaje a dado un viraje hacia estrategias como el ABI, las cuales muestran resultados de potenciar las competencias en los estudiantes. Sin embargo, aún hay desafíos para lograr una implementación completa y sistemática de estos enfoques en todo el territorio nacional.

Tipos de Aprendizaje Basado en la Indagación (ABI)

El aprendizaje basado en la indagación se caracteriza por la activación de la curiosidad y la creatividad del estudiante, su motivación para aprender y descubrir cosas nuevas. La siguiente imagen contiene cada uno de los máximos representantes de estos enfoques, así como su naturaleza.

Figura 2

Tipos de aprendizaje basados en la indagación



Nota. La figura resume los tipos de ABI y sus máximos exponentes.

Beneficios del aprendizaje basado en la indagación (ABI)

El aprendizaje basado en la indagación es un enfoque educativo en el cual los estudiantes son animados a investigar y explorar temas de su interés mediante la formulación de preguntas, la recolección y análisis de información, y la reflexión sobre sus hallazgos.

Este enfoque de aprendizaje tiene varios beneficios como son: el fomento del pensamiento crítico Duran y Dökme (2016) y la mejora de la comprensión Şenyiğit et al. (2021). Es importante recalcar que el pensamiento crítico, así como la comprensión, son habilidades de supervivencia a fin de estar preparados para la vida, el trabajo y la ciudadanía del siglo XXI Wagnet (2010).

Por otro lado, se ha demostrado que el ABI puede mejorar también la motivación de los estudiantes al permitirles tomar el control de su propio aprendizaje y al ofrecerles un contexto significativo para aplicar lo que están aprendiendo. Dentro de las investigaciones que demuestran esto está "El impacto del plan de estudios de ciencias basado en la indagación en la motivación de los estudiantes en una clase de ciencias biológicas de séptimo grado ", Geddis y Yeany (2002). Este estudio encontró que el uso de un currículo basado en la indagación aumentó significativamente la motivación de los estudiantes hacia la ciencia.

El aprendizaje basado en la indagación es un enfoque pedagógico que promueve el trabajo en equipo, la resolución de problemas y la toma de decisiones, lo que ayuda a preparar a los estudiantes para enfrentar desafíos en el mundo real.

Investigaciones como " Aprendizaje basado en la indagación y aprendizaje basado en problemas en la enseñanza de la ingeniería" Lee (2012), encontraron que el aprendizaje basado en la indagación y el aprendizaje basado en problemas ayudan a los estudiantes a desarrollar habilidades de colaboración y a prepararse para enfrentar desafíos en el mundo real.

Además, este enfoque permite a los estudiantes desarrollar habilidades valiosas como: la creatividad, la resolución de problemas y la capacidad de aprender de forma autónoma.

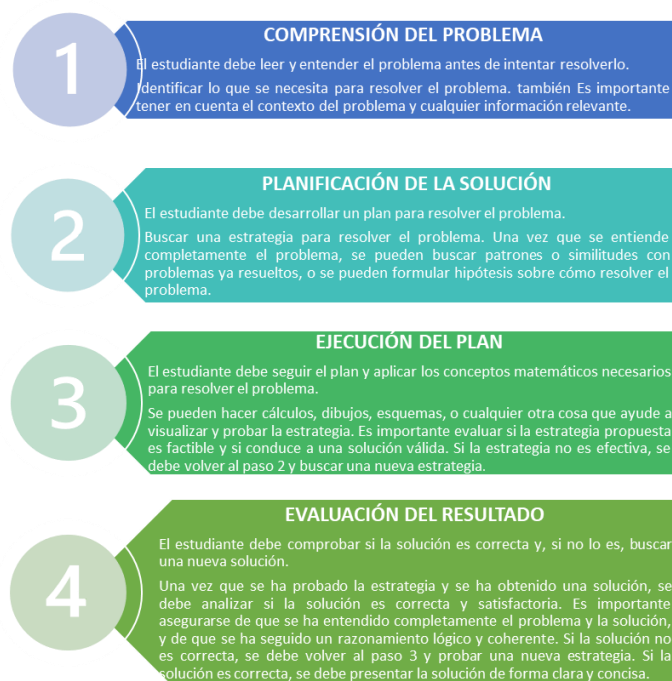
Aprendizaje Basado en la Indagación en las Matemáticas

El aprendizaje basado en la resolución de problemas es uno de los tipos de ABI frecuentemente utilizado en las Matemáticas. Es un enfoque de enseñanza desarrollado por el matemático y educador húngaro George Pólya. Se centra en la resolución de problemas y en la comprensión de los procesos matemáticos. El objetivo es ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades para resolver problemas matemáticos de manera efectiva y autónoma. Pólya (1945).

El enfoque de Pólya se basa en cuatro etapas:

Figura 3

Ciclo De Aprendizaje De Pólya



Nota: La figura representa un esquema de las 4 etapas del proceso de aprendizaje del ciclo de Pólya.

A continuación, se muestra un ejemplo en donde se utiliza el método de Pólya para resolver problemas.

El costo C para producir x cantidad de almanaques de escritorio es $C = 50 + 5x$. Los almanaques de escritorio se venden al por mayor a \$15 cada uno, por lo que el ingreso R viene dado por $R = 15x$. Calcula cuántos almanaques de escritorio necesita producir y vender el fabricante para alcanzar el punto de equilibrio.

Paso 1. Comprensión del problema:

Al leer la pregunta cuidadosamente varias veces el problema tenemos que: estamos buscando la cantidad de almanaques que se necesitan vender para alcanzar el punto de equilibrio, entonces la variable x representa un número en el conjunto de los números enteros debido al contexto del problema.

$x =$ el número de almanaques

Paso 2. Planificación de la solución:

Plan: Si un fabricante quiere saber cuántos artículos debe vender para alcanzar el punto de equilibrio, puede encontrarlo igualando el costo con los ingresos.

$$C = R$$

$$50 + 5x = 15x$$

Paso 3. Ejecución del plan:

Resolver la ecuación para despejar la variable x usando propiedades.

Tabla 1

Ejecución del plan para hallar el punto de equilibrio

Procedimiento	Propiedad
$50 + 5x = 15x$	Colocar los términos de x en el mismo lado
$50 + 5x - 5x = 15x - 5x$	Inverso Aditivo
$50 = 10x$	Operaciones términos semejantes
$\frac{50}{10} = \frac{10x}{10}$	Inverso Multiplicativo
$5 = 1x$	Operación
$5=x$	Modulativa de la multiplicación

Nota: Esta tabla muestra las propiedades usadas para resolver el problema.

Paso 4. Evaluación del resultado:

Cuando $x = 5$, el costo equivale a: $C(5)=50+5(5)=\$75$, y los ingresos $R(5)=15(5)=\$75$. El costo y los ingresos son iguales por tanto se alcanza el punto de equilibrio en $x = 5$ almanaques.

Por lo tanto, la idea principal detrás del enfoque de Pólya es que el aprendizaje matemático se produce a través de la resolución de problemas y de la comprensión de los procesos matemáticos involucrados en la resolución de estos.

Competencia de Indagación

La competencia de indagación se basa en la habilidad de buscar, seleccionar y utilizar información de forma crítica y efectiva para resolver problemas y tomar decisiones. Esto incluye la capacidad de buscar información en diferentes fuentes, evaluar la calidad y relevancia de la información, y aplicar la información de forma adecuada al contexto.

Según el Marco Europeo de Competencias para el Aprendizaje Permanente (2006), la competencia de indagación se compone de cuatro competencias que miden la capacidad para:

1. Identificar y formular preguntas y problemas
2. Buscar, seleccionar, utilizar y comunicar información

3. Analizar, sintetizar y evaluar información
4. Resolver problemas y tomar decisiones

También, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura UNESCO (2019) en el documento " El estudio ERCE 2019 y los niveles de aprendizaje en ciencias" afirma que para mejorar los aprendizajes en ciencias para que se propenda por una educación científica es indispensable fortalecer tres habilidades fundamentales:

1. Encontrar información relevante y fiable.
2. Evaluar y utilizar la información de forma crítica y ética.
3. Comunicar y presentar la información de forma efectiva.

En Colombia la competencia de indagación es una de las tres competencias evaluadas en el área de Ciencias Naturales. Los lineamientos curriculares en esta área establecen la competencia de indagación como una habilidad fundamental que los estudiantes deben desarrollar a lo largo de su educación. Refiriéndola a la capacidad de los estudiantes para planificar, realizar y evaluar investigaciones científicas de manera autónoma y crítica. Los estudiantes deben aprender a formular preguntas científicas, recolectar y analizar datos, y presentar sus hallazgos de manera clara y concisa, en toda la enseñanza integrada de las ciencias, desde el lenguaje “blando” del mundo de la vida hasta el lenguaje “duro” de la ciencia y la tecnología MEN (1998).

Los estándares básicos de competencias en ciencias naturales enfatizan en potenciar esta competencia acorde a cada uno de los niveles básicos de calidad para así poder hacer seguimiento a cada uno de los logros curriculares establecidos en los lineamientos, propuestos desde el proceso de formación científica básica, proceso de formación para el trabajo y el

proceso de formación ética. Siendo los dos primeros, en los que predomina el ejercicio de la competencia de indagación MEN (2006).

Así mismo, los derechos básicos de aprendizaje MEN (2016) junto con las mallas de aprendizaje MEN (2017) establecen tanto los saberes primordiales en cada grado como la implementación de dichos saberes, teniendo en cuenta evidencias que garanticen los resultados esperados en cada una de las competencias. Estos documentos son insumos importantes para el despliegue curricular del docente capaces de generar procesos de análisis, reflexión, haciendo posible un cambio de paradigmas en la educación convencional en pro hacia nuevos estudiantes.

En la Guía de orientación para las pruebas saber 11 definen la indagación como:

La capacidad para comprender que, a partir de la investigación científica, se construyen explicaciones sobre el mundo natural. Además, involucra los procedimientos o metodologías que se aplican para generar más preguntas o intentar dar respuestas a estas. El proceso de indagación en ciencias incluye, entre otras cosas, observar detenidamente la situación planteada, formular preguntas, recurrir a libros u otras fuentes de información, hacer predicciones, plantear experimentos, identificar variables, realizar mediciones y organizar y analizar resultados. En el aula de clases no se trata de que el alumno repita un protocolo ya establecido o elaborado por el docente, sino que el estudiante formule sus propias preguntas y diseñe su propio procedimiento. (p.64)

Es claro que, en los procesos para alcanzar esta competencia, están inmersas otras capacidades que el estudiante va adquiriendo como son: la habilidad para comprender y transformar la información presentada en varios formatos, plantear y diseñar estrategias para solucionar problemas en varios contextos y validar o refutar afirmaciones o conclusiones (MEN, 2019).

Es aquí donde el presente trabajo pretende implementar un enfoque de ABI, ya que indirectamente se estará apuntando a las competencias específicas en el área de Matemáticas propuestas en los lineamientos curriculares del área.

Ciclo de aprendizaje 5E

El ciclo de aprendizaje 5E es un modelo ampliamente reconocido de la enseñanza basada en la indagación. Sus orígenes se remontan a la década de 1960 con el trabajo del Dr. Robert Karplus. El Dr. Karplus era un físico de la Universidad de California, Berkeley, que disfrutaba compartir su trabajo y visitar las clases de primaria para presentar sus ideas. Una de las metas para Karplus era su deseo de saber más acerca de cómo enseñar bien. Por lo tanto, continuó su trabajo con estudiantes de primaria, mientras estudiaba la obra de Jean Piaget.

Durante este tiempo, el Dr. Karplus y un colega, J. Myron Atkin, desarrollaron un estilo de aprendizaje llamado "consulta guiada" (Atkin y Karplus, 1962). Este estilo de aprendizaje centró la atención en las ideas y observaciones de los estudiantes como la base para el aprendizaje. Se incluyen las etapas de exploración, descubrimiento y la invención. Atkin y Karplus esperaban ayudar a los estudiantes a basarse en sus propias experiencias y hallazgos como una forma de desarrollar inferencias y dar sentido a los fenómenos.

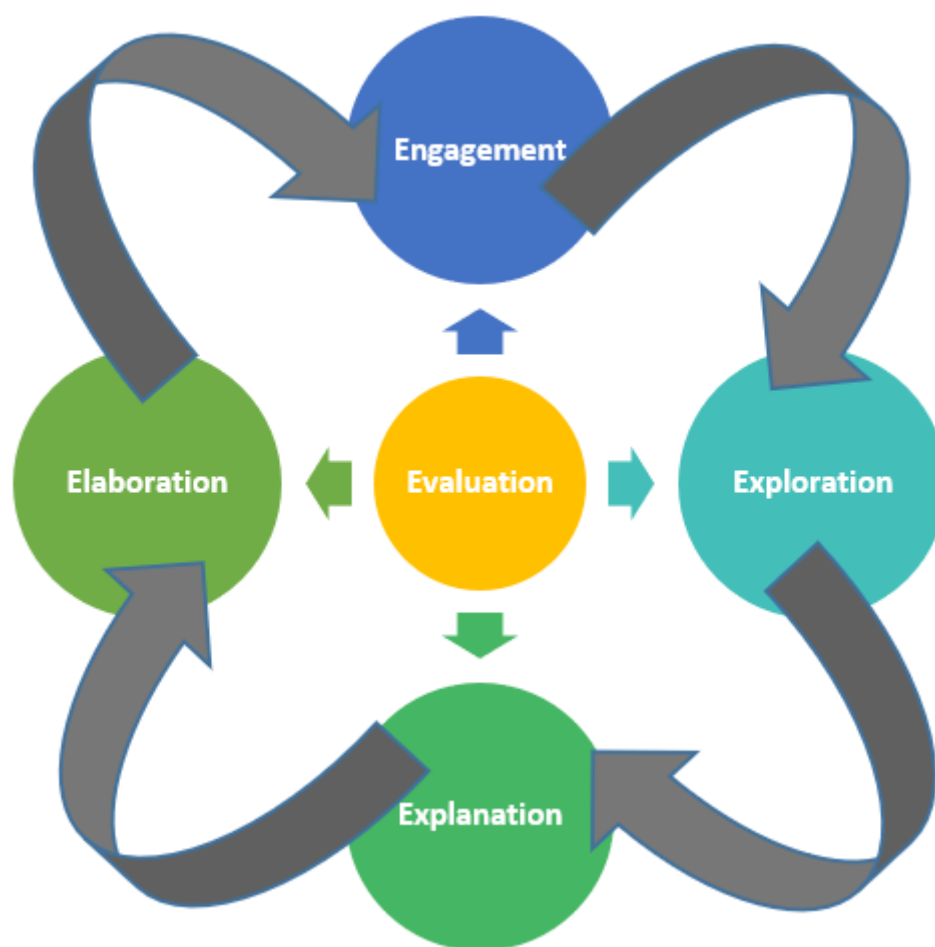
Es esta noción de investigación guiada que está en el corazón de la mayoría de los modelos del ciclo de aprendizaje, incluyendo el modelo 5E. El modelo fue desarrollado por BSCS Science Learning, formalmente conocido como Biological Sciences Curriculum Study e incluye cinco etapas del ciclo de aprendizaje, cada una comenzando con la letra E en inglés. Estas etapas son: Engagement, Exploration, Explanation, Elaboration y Evaluation.

En línea con la tradición de investigación guiada, las ideas de los estudiantes toman un papel central en cada etapa. El modelo BSCS evolucionó a partir de la obra de otros modelos de

instrucción e incorpora los resultados de la investigación sobre la enseñanza y la cognición. Se basa en la obra de Jean Piaget, Lev Vygotsky, entre otros, así como las conclusiones de un informe de síntesis sobre cómo aprenden las personas, presentadas por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas y de la Academia Nacional de Ciencias en 1999.

Figura 4

La enseñanza basada en la indagación y el Ciclo de aprendizaje 5E



Nota. El gráfico representa las 5 etapas del ciclo de aprendizaje 5E basado en la indagación, propuesto por BSCS Science Learning.

De acuerdo con BSCS, Engagement es cuando el maestro o una tarea curricular da acceso conocimiento previo de los alumnos y les ayuda a ser comprometido en un nuevo concepto a través del uso de actividades cortas que promuevan la curiosidad y provoquen el conocimiento previo. La actividad debe hacer conexiones entre las experiencias de aprendizaje pasadas y presentes, exponer las concepciones anteriores, y organizar el pensamiento de los estudiantes hacia los resultados de aprendizaje de las actividades en curso (Bybee et al., 2006).

Exploration es la segunda fase del ciclo de lección 5E. Durante esta etapa de la lección, los estudiantes tienen la oportunidad de preguntar y responder sus propias preguntas. Este es un tiempo sin apretar guiada de descubrimiento donde los estudiantes pueden explorar, cometer errores, y obtener información en un entorno de bajo riesgo. Las actividades de exploración permiten a los estudiantes tiempo para poner a prueba las ideas y sacar conclusiones basadas en lo que se enteran.

Por otro lado, Explanation da a los estudiantes la oportunidad de explicar su comprensión de los conceptos. La Explicación ayuda a los estudiantes a buscar el sentido de las actividades de exploración y de compromiso. El profesor y otros materiales de estudio pueden ayudar a los estudiantes a profundizar su comprensión (Bybee et al., 2006).

Así mismo, la cuarta etapa, Elaboration, es un momento en que los maestros pueden proporcionar retos para los estudiantes que se extienden sus conocimientos. Estos retos proporcionan a los estudiantes con nuevas experiencias que profundizan la comprensión del estudiante. Estas experiencias también dan a los estudiantes la oportunidad de utilizar su conocimiento y aplicarlo en un contexto más amplio (Bybee y otros, 2006) (Bybee et al., 2006).

Finalmente, La etapa de evaluación da a los estudiantes la oportunidad para la autoevaluación de sus conocimientos. Esta etapa también tiene por objeto proporcionar a los

maestros información que pueden utilizar para evaluar el progreso de los estudiantes hacia los objetivos de la lección (Bybee et al., 2006). Si bien la idea de los profesores que evalúan los estudiantes no es nada nuevo, la idea de que los estudiantes evalúen su propio trabajo o el trabajo de otros es mucho menos común. Proporcionar a los estudiantes la oportunidad de reflexionar y evaluar sus propias ideas y las ideas de sus compañeros de clase puede ser un poderoso complemento de la instrucción.

A continuación, se presentan cada una de las etapas del ciclo de aprendizaje y lo que se espera que el docente y el estudiante realicen, ver Tabla 2.

Tabla 2*Ciclo de aprendizaje 5E*

Etapas de la lección	Durante esta etapa el profesor podría	Durante esta etapa los alumnos podrían
Engagement	<input type="checkbox"/> Generar curiosidad sobre el tema <input type="checkbox"/> Hacer preguntas abiertas <input type="checkbox"/> Escuchar a los estudiantes para descubrir lo que ya saben <input type="checkbox"/> Animar a los estudiantes a explicar su pensamiento <input type="checkbox"/> Conexión con la vida / intereses de los estudiantes	<input type="checkbox"/> Hacer preguntas <input type="checkbox"/> Mostrar interés en el tema <input type="checkbox"/> Compartir sus pensamientos/ideas <input type="checkbox"/> Hablar entre sí
Exploration	<input type="checkbox"/> Dar a los estudiantes tiempo para trabajar juntos para explorar un tema / problema <input type="checkbox"/> Caminar y hacer preguntas sobre lo que están haciendo <input type="checkbox"/> Escuchar las ideas de los estudiantes mientras hablan entre sí <input type="checkbox"/> Apoyar a los estudiantes según sea necesario (sin dar respuestas)	<input type="checkbox"/> Trabajar juntos y compartir ideas <input type="checkbox"/> Probar sus ideas y pensar en alternativas <input type="checkbox"/> Registrar sus pensamientos y observaciones <input type="checkbox"/> Hacer preguntas
Explanation	<input type="checkbox"/> Animar a los estudiantes a explicar conceptos con sus propias palabras <input type="checkbox"/> Destacar ideas importantes que los estudiantes proporcionan <input type="checkbox"/> Hacer preguntas que ayuden a los estudiantes a ser específicos en sus explicaciones <input type="checkbox"/> Introducir vocabulario, etiquetas formales o definiciones según sea necesario	<input type="checkbox"/> Explicar ideas, conceptos o posibles soluciones a otros <input type="checkbox"/> Usar información registrada de su exploración para ayudarlos a explicar <input type="checkbox"/> Escuchar las ideas de los demás y construir sobre ellas o hacer preguntas
Elaboration	<input type="checkbox"/> Pedir a los estudiantes que apliquen contenido en una nueva situación o prueben ideas adicionales <input type="checkbox"/> Animar a los estudiantes a ampliar los conceptos de la lección <input type="checkbox"/> Pedir a los estudiantes que usen el nuevo vocabulario apropiadamente <input type="checkbox"/> Incorporar conexiones con mundo real	<input type="checkbox"/> Usar nueva información para explorar ideas adicionales <input type="checkbox"/> Usar nuevos términos/conceptos para revisar las explicaciones <input type="checkbox"/> Colaborar para refinar ideas <input type="checkbox"/> Sacar conclusiones a partir de la evidencia
Evaluation	<input type="checkbox"/> Hacer preguntas que proporcionen información sobre el progreso de los estudiantes <input type="checkbox"/> Distribuir preguntas para que todos los estudiantes sean responsables y tengan la oportunidad de compartir <input type="checkbox"/> Observar a los estudiantes mientras crean productos y buscar evidencia de comprensión	<input type="checkbox"/> Responder preguntas que expliquen o muestren su pensamiento <input type="checkbox"/> Demostrar su comprensión del tema a medida que completan las actividades <input type="checkbox"/> Demostrar habilidades aplicables

Nota. Acciones Docente/Estudiante Ciclo de aprendizaje 5E, adaptado de Lawson, A.E. (2002). El ciclo de aprendizaje. En R.G.

Fuller (Ed). Un amor por el descubrimiento: Educación científica, la segunda carrera de Robert Karplus. Nueva York: Kluwer

Academic (p.51-62).

Estructura y Componentes en el Área de Matemáticas

La estructura y los componentes son elementos fundamentales para la comprensión de los conceptos en matemáticas, aquí se referirán a la estructura y organización de los componentes esenciales en el área de matemáticas.

Lineamientos Curriculares Matemáticas

Los lineamientos curriculares son las directrices elaboradas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) con la colaboración de la comunidad académica, que buscan fundamentar y planificar las áreas obligatorias y fundamentales establecidas en la Ley General de Educación, entre ellas las Matemáticas. Estos lineamientos son utilizados como referencia en la elaboración de los Proyectos Educativos Institucionales y los planes de estudio por ciclos, niveles y áreas, y se basan en los aportes adquiridos por las instituciones y los docentes a través de su experiencia, formación e investigación. (MEN, 1998)

En estos lineamientos se pone de manifiesto la importancia de tener en cuenta la naturaleza de las matemáticas, su relación con la cultura y su aplicación en el proceso educativo. De igual forma, se propone una educación en matemáticas que promueva aprendizajes más profundos y duraderos, enfocándose no solo en los conceptos y procedimientos, sino también en los procesos de pensamiento.

En concordancia, se destaca como objetivo principal de la enseñanza de las matemáticas; ayudar a las personas a comprender el mundo que les rodea y a desarrollar su capacidad de pensamiento y reflexión, a partir de la relación entre contenidos de aprendizaje y vida cotidiana de los estudiantes, enseñanzas en contexto de situaciones problemáticas e intercambio de opiniones.

Para ello se deben considerar tres aspectos para organizar el currículo de manera armoniosa: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto. MEN (1998) establece que los procesos generales no solo tienen que ver con el aprendizaje de temas, sino que tienen que ver con “el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos” (p. 15), por lo tanto, es indispensable potenciar estos cinco procesos generales ya que nos permiten adquirir, comprender y aplicar conocimientos para un aprendizaje efectivo.

Para el MEN (1998) también son necesarios los conocimientos básicos “que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas. Estos procesos específicos se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros” (p. 16).

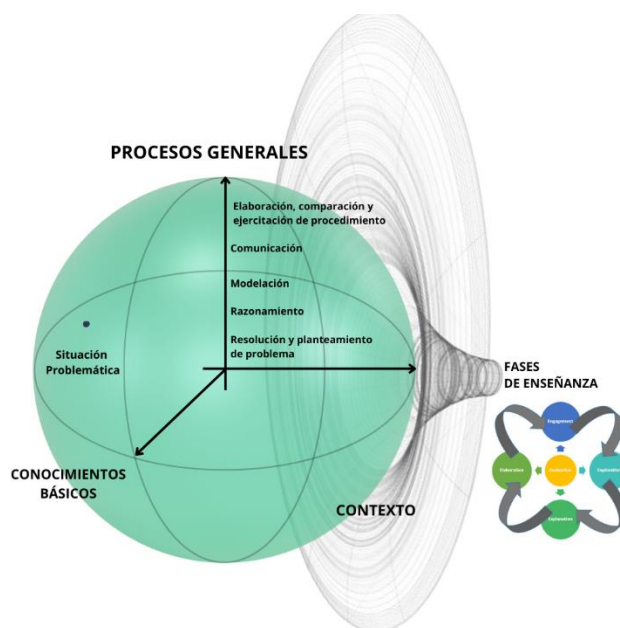
Tanto los procesos generales como los conocimientos básicos dan cuenta de lo fundamental de los sistemas propios de las matemáticas para la comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos. Los conocimientos generales junto con estos procesos son una parte esencial de la formación del estudiante en matemáticas. Sin embargo, nos quedaría faltando el contexto en el que está inmerso el alumno, el cual “tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas” (MEN, 1998, p. 16).

Con base en lo anterior, destacamos los factores sociales, culturales, económicos, las interacciones, los intereses y las creencias, parte esencial en el diseño y ejecución de

experiencias didácticas con el fin de maximizar el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas.

Figura 5

Modelo del proceso de estructuración curricular en matemáticas



Nota. La imagen representa modelo de estructuración curricular en Matemáticas Adaptado de Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998, p.19).

Es necesario recalcar que el presente trabajo no busca reestructurar el modelo basado en el sistema tridimensional que considera como componentes los procesos generales, los conocimientos básicos y las fases del proceso de enseñanza propuesto en los lineamientos curriculares, por el contrario, en la fase del proceso de enseñanza se pretende incluir el ciclo de enseñanza de las 5E con el propósito de suscitar interés y despertar la creatividad de los alumnos y que se sepan por qué aprenden matemáticas.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Los estándares básicos de competencias definen lo que todo niño, niña y joven deben saber y ser capaces de hacer para alcanzar los niveles de calidad deseados. En ellos se establecen los referentes comunes con el fin de que estos orienten en los planes de estudio, todos los conocimientos, habilidades y valores requeridos para el desempeño de ciudadano y productivo en igualdad de condiciones; se garantice el acceso de todos los estudiantes a estos aprendizajes; mantener unidad nacional; comparar los aprendizajes de los estudiantes en relación con los aprendizajes de otros países y facilitar la transferencia de estudiantes entre un colegio y otro (MEN, 2006, p.10).

Aunque en los estándares básicos de aprendizaje reconocen tres tipos o niveles de contextos, es importante recalcar que en el ámbito evaluativo se emplean; contextos familiares o personales, laborales u ocupacionales, comunitarios o sociales y matemáticos o científicos. Lo anterior con el objetivo de facilitar la comprensión de las situaciones planteadas en la evaluación y reducir la complejidad de estas.

Los siguientes son los estándares básicos de competencia en matemáticas en el conjunto de grado: décimo a undécimo. Ciclo en el cual se pretende llevar a cabo la intervención.

Tabla 3*Estándares básicos de competencia en matemática para cada pensamiento 10°-11°*

Al terminar undécimo grado...		
PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS	
<ul style="list-style-type: none"> Análisis representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales. Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos. Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos. Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucren números naturales. Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada. 	<ul style="list-style-type: none"> Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono. Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas. Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras. Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas. Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos. 	
PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
<ul style="list-style-type: none"> Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media. Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición. 	<ul style="list-style-type: none"> Interpreto y comparo resultados de estudios con información estadística provenientes de medios de comunicación. Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar. Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta. Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos). Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad). Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos. Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo). Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas. 	<ul style="list-style-type: none"> Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. Análisis las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Nota. La tabla representa los estándares básicos de competencia en Matemáticas para cada uno de los pensamientos propuestos en los Lineamientos curriculares (MEN, 2006, p.88).

Competencias y Componentes en Matemáticas

Las competencias y componentes en matemáticas son de suma importancia para el desarrollo integral de los estudiantes. Las competencias son habilidades prácticas que se requieren para resolver problemas y desempeñarse en situaciones cotidianas, mientras que los componentes son los conocimientos teóricos que se requieren para comprender los conceptos y procedimientos matemáticos. Juntas, estas dos dimensiones permiten a los estudiantes desarrollar su pensamiento lógico, crítico y creativo, así como también les brindan las herramientas necesarias para aplicar la matemática en diversos contextos y situaciones.

La formación en competencias y componentes en matemáticas es fundamental para asegurar un futuro exitoso en la vida profesional y personal de los estudiantes. Luego de una revisión se muestran en la Tabla 4, desde cada competencia, lo que se pretende alcanzar:

Tabla 4

Competencias en Matemáticas

Competencias		
Resolución de problemas	Razonamiento y argumentación	Comunicación, representación y modelación
La formulación y solución de problemas proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los estudiantes. También, se aborda la aplicación de diferentes estrategias y la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas.	Las preguntas relacionadas esta competencia exigen al estudiante percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones para dar solución a un problema.	La comunicación hace referencia a las habilidades de leer, escribir e interpretar significados en matemáticas, lo cual implica reconocer el lenguaje propio de estas y usar sus nociones y procesos en la comunicación de ideas matemáticas o de otras áreas modeladas mediante las matemáticas. También supone comprender, interpretar y transformar información en distintas representaciones como tablas, diagramas de barras, gráficas, entre otras, con el objetivo de extraer información relevante para presentar argumentos y conclusiones.

Nota: Tomado y adaptado de Estándares básicos de competencias en matemáticas. Ministerio de Educación Nacional MEN (2006).

En ese sentido, los lineamientos proponen 5 tipos de pensamientos en matemáticas, pero debido a la relación entre ellos, ya que tienen elementos conceptuales comunes, se han organizado en tres grupos: numérico-variacional, espacial-métrico y aleatorio. Esta integración de los pensamientos permite que los procesos de aprendizaje en las matemáticas se proporcionen a partir de la construcción de formas generales y articuladas de esos mismos tipos de pensamiento (MEN, 2006, p.69). La Tabla 5 contiene cada uno de los componentes, teniendo en cuenta lo que comúnmente conocemos como a las tres categorías de conocimientos en matemáticas, para la prueba saber 11: estadística, geometría, y álgebra y cálculo.

Tabla 5

Componentes evaluados en Matemáticas

Componentes		
Numérico y variacional	Espacial y métrico	Aleatorio
Las preguntas asociadas a este componente abordan la comprensión de los números, sus propiedades y operaciones, el reconocimiento de regularidades y patrones, la comprensión de funciones y sus representaciones, la identificación de variables, y la descripción de fenómenos de cambio y dependencia.	Las preguntas asociadas a este componente abordan la comprensión de las características de los objetos geométricos que se abordan en la educación básica y media, las relaciones entre estos, sus transformaciones; además de los procesos de medición de distintas magnitudes y sus respectivas unidades y sistema de medida.	Las preguntas asociadas a este componente abordan la comprensión e interpretación de datos en distintas representaciones, la formulación de inferencias y argumentos utilizando medidas de tendencia central y de dispersión; además del estudio de fenómenos aleatorios.

Nota: Tomado y adaptado de Estándares básicos de competencias en matemáticas. Ministerio de Educación Nacional MEN (2006).

Cada una de estas competencias, así como sus componentes, dan cuenta sobre los aspectos conceptuales y estructurales de lo que se pretende que un estudiante domine. Por otro lado, entender que no son definiciones estáticas, por el contrario, evolucionan de acuerdo con la incorporación de nuevos enfoques y tendencias educativas.

Según el marco de referencia de la prueba saber 11 en Matemáticas, se han retomado las siguientes competencias, denominándolas competencias específicas: Interpretación y representación, formulación y ejecución y argumentación. No por ello significa un cambio en las competencias con relación a las propuestas en los lineamientos, sino que en dicha denominación “está dada por el hecho de que la competencia se involucra con la integración de un proceso, un conocimiento matemático de alguna de las categorías y un contexto de actuación” (MEN, 2019, p. 28).

De acuerdo con el marco de referencia, la estructura del objeto de evaluación: variables o atributos evaluados por el instrumento el MEN (2019) afirma que:

Esta prueba se concentra en un dominio general (ser matemáticamente competente) que se expresa a través de las tres competencias: la interpretación y la representación, la formulación y la ejecución y la argumentación. La expresión solo de una de ellas no es suficiente para indicar la existencia del dominio de evaluación, condición a la que se agrega, como lo indican los Estándares, que no se puede valorar apropiadamente una competencia si se piensa en ella en un sentido dicotómico (se tiene o no se tiene), sino que tal valoración debe entenderse como la posibilidad de determinar el nivel de desarrollo de cada competencia” (p. 31).

Las tres competencias indicadas se configuran a partir de los aspectos determinados desde los Estándares, a saber: Los contenidos matemáticos requeridos para resolver distintos problemas, las situaciones o contextos del problema y los procesos a través de los cuales se identifica el problema que se debe atender de manera pertinente. En lo anterior se resalta la importancia de una evaluación integral en el área de matemáticas, donde se consideran tres competencias esenciales mencionadas anteriormente. Además,

se destaca la necesidad de no pensar en las competencias de forma dicotómica, sino evaluar el nivel de desarrollo de cada una.

Seguidamente, el marco de referencia utilizado para la evaluación de las competencias matemáticas no es muy completo, ya que, a pesar de que se enfoca en los contenidos matemáticos, en las situaciones y contextos en los que se aplican, en los procesos que se utilizan para resolver problemas, asegurando que se evalúe de manera efectiva el dominio general de ser matemáticamente competente, sería útil incluir ejemplos concretos de cómo se aplican estas competencias en la resolución de problemas para ilustrar mejor los conceptos.

Si bien el marco de referencia para la evaluación de competencias matemáticas es muy útil porque da una garantía de una evaluación integral y efectiva de los estudiantes, al evaluar no solo los contenidos matemáticos, sino también las situaciones y contextos en los que se aplican y los procesos utilizados para resolver problemas, este proporciona la teoría de que se evalúe de manera adecuada el dominio general de ser matemáticamente competente.

Sería beneficioso para este marco si se incluyeran algunos ejemplos concretos para ilustrar cómo se aplican estas competencias y también incluir la competencia de indagación en los procesos generales en matemáticas.

De esta manera, los contenidos presentan la forma en que se estructuran las herramientas conceptuales que se han agrupado en dos categorías en esta evaluación: los contenidos genéricos y los no genéricos. Los contenidos genéricos son fundamentales y se enseñan a lo largo de todo el proceso educativo, no solo en la escuela, y son necesarios para que cualquier persona pueda participar críticamente en la sociedad. Por otro lado, los contenidos no genéricos son específicos del campo de las matemáticas y se aprenden durante la etapa escolar. (MEN, 2019, p. 32).

A continuación, se muestra la tabla de clasificación de contenidos relacionada con el pensamiento numérico variacional, categoría objeto de estudio en este trabajo.

Tabla 6

Clasificación de contenidos genéricos y no genéricos en el pensamiento numérico variacional



Nota: Tomado Marco de referencia prueba de matemáticas prueba saber 11. Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2019, p.33)

Las relaciones lineales y afines y razones de cambio son conocimientos genéricos importantes en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, sin ellos, la adquisición de los conocimientos no genéricos como límites y sucesiones no sería posible comprenderlos. La presente investigación pretende afianzar los procesos generales alrededor de la noción de la derivada, entendida como la razón de cambio en el contexto matemático.

El marco de referencia nos presenta los niveles de desempeño de un estudiante en la adquisición de las competencias. Estos niveles corresponden a una descripción cualitativa de las habilidades y conocimientos que podría tener un estudiante al obtener determinado puntaje en la prueba, por lo que complementan la información dada por dicho puntaje numérico. A

continuación, se presentan los descriptores generales de los niveles establecidos para la prueba con relación al puntaje de un estudiante.

Tabla 7

Descripción de los niveles de desempeño en Matemáticas

Nivel de desempeño	Descripción
<p>1 Puntaje en la prueba de 0 a 35</p>	<p>El estudiante que se ubica en este nivel probablemente puede leer información puntual (un dato, por ejemplo) relacionada con situaciones cotidianas y presentada en tablas o gráficas con escala explícita, cuadrícula o, por lo menos, líneas horizontales; pero puede tener dificultades al comparar distintos conjuntos de datos, involucrar diferentes variables o analizar situaciones alejadas de su vida diaria.</p>
<p>2 Puntaje en la prueba de 36 a 50</p>	<p>Además de lo descrito en el nivel anterior, el estudiante que se ubica en este nivel es capaz de comparar y establecer relaciones entre los datos presentados, e identificar y extraer información local y global de manera directa. Lo anterior en contextos familiares o personales que involucran gráficas con escala explícita, cuadrícula o, por lo menos, líneas horizontales u otros formatos con poca información.</p>
<p>3 Puntaje en la prueba de 51 a 70</p>	<p>Además de lo descrito en los niveles anteriores, el estudiante que se ubica en este nivel selecciona información señala errores y hace distintos tipos de transformaciones y manipulaciones aritméticas y algebraicas sencillas; esto para enfrentarse a problemas que involucran el uso de conceptos de proporcionalidad, factores de conversión, áreas y desarrollos planos, en contextos laborales u ocupacionales, matemáticos o científicos y comunitarios o sociales.</p>
<p>4 Puntaje en la prueba de 71 a 100</p>	<p>Además de lo descrito en los niveles anteriores, el estudiante que se ubica en este nivel resuelve problemas y justifica la veracidad o falsedad de afirmaciones que requieren el uso de conceptos de probabilidad, propiedades algebraicas, relaciones trigonométricas y características de funciones reales. Lo anterior, en contextos matemáticos o científicos abstractos.</p>

Nota: Tomado Marco de referencia prueba de matemáticas prueba saber 11. Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2019, p.40).

Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas

Según el MEN (2016), los Derechos Básicos de aprendizaje (DBA) son conjuntos de conocimientos, habilidades y actitudes que constituyen las unidades básicas y fundamentales para construir el desarrollo futuro del individuo en una determinada área y grado. Estos se

organizan en coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC) y plantean elementos para construir rutas de enseñanza que permitan a los estudiantes alcanzar los EBC propuestos por cada grupo de grados.

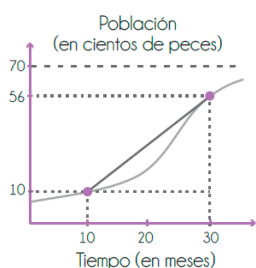
Los DBA por sí solos no constituyen una propuesta curricular, sino que deben ser articulados con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos definidos en cada establecimiento educativo y en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales (PEI).

La Tabla 8y la Tabla 9 evidencian la primera versión de los DBA en matemáticas, se muestran específicamente los DBA 4 y 5 en grado 10° y 11° los cuales están relacionados con la temática objeto de estudio de la presente investigación:

Tabla 8

Descripción de los DBA en Matemáticas asociados a la noción de la derivada 10°

4. Comprende el significado de la razón de cambio promedio de una función en un intervalo (a partir de gráficas, tablas o expresiones) y la calcula. Por ejemplo, la gráfica muestra la cantidad de peces en un lago luego de haber introducido 800 especímenes.



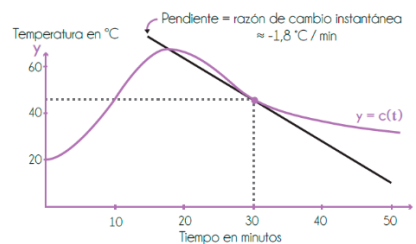
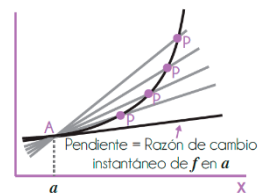
La razón de cambio promedio entre los meses 10 y 30 está dada por:

$$\begin{aligned} \text{razón de cambio promedio} &= \frac{\text{cambio en población}}{\text{cambio en tiempo}} \\ &= \frac{5600 \text{ peces} - 1000 \text{ peces}}{20 \text{ meses}} \\ &= 510 \text{ peces/mes} \end{aligned}$$

La razón de cambio promedio es una aproximación al cambio real, pero en muchas ocasiones no lo refleja con precisión. Por ejemplo, entre el mes 10 y el mes 11 la población creció menos que 510 peces y entre el mes 25 y 26 la población creció más que 510 peces. Sin embargo, al cabo de los 20 meses (entre el mes 10 y el 30) el cambio en la población fue igual al que se hubiera producido si la población hubiese crecido exactamente 510 peces cada mes.

5. Reconoce la noción razón de cambio instantáneo de una función en un punto $x=a$:

- Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto A.
- Como el valor al que tienden las razones de cambio promedio de la función entre $x=a$ y puntos cada vez más cercanos a este



Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra la temperatura $C(t)$ de una sopa que se colocó sobre un fogón durante 20 minutos y después se retiró para que se enfriara. La pendiente de la tangente en $(30, C(30))$ es aproximadamente $-1,8^\circ\text{C}/\text{min}$, lo cual significa que la razón de cambio instantáneo de la temperatura con respecto al tiempo en $t=30$ es de $-1,8^\circ\text{C}/\text{min}$. Es decir, alrededor de $t=30$ minutos, la temperatura disminuyó aproximadamente $1,8^\circ\text{C}$ cada minuto.

Nota: Tomado Derechos Básicos de aprendizaje en Matemáticas grado 10° versión 1. MEN

(2015)

Tabla 9

Descripción de los DBA en Matemáticas asociados a la noción de la derivada 11°

3 Interpreta la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto $A = (a, f(a))$ como el límite de las pendientes de las rectas secantes entre el punto A y puntos sobre la gráfica que se acercan a A. Es decir, como:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Utiliza esto para estimar la razón de cambio instantánea $f'(a)$ para un valor particular de a .

razón de cambio instantánea de f en $a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$ pendiente de la tangente en A

pendiente = razón de cambio promedio = $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

4 Reconoce la derivada de una función como la función de razón de cambio instantáneo. Dada la gráfica de una función, dibuja de manera aproximada la gráfica de la derivada, identificando claramente los ceros de la derivada y los intervalos donde esta es negativa y positiva. Por ejemplo:

$m > 0$ $m = 0$ $m < 0$ $m =$ pendiente $m > 0$ $m = 0$

$y = f(x)$

f decrece en este intervalo

pendiente negativa

f negativa

f' es positivo pues las pendientes de las tangentes de la gráfica de f son positivas.

f' es cero pues la pendiente de la tangente a la gráfica de f es horizontal.

$y = f'(x)$

Nota: Tomado Derechos Básicos de aprendizaje en Matemáticas grado 11° versión 1. MEN (2015)

En matemáticas, desde el 2015, año donde se presentó la primera versión de los DBA, se han venido presentado una serie de discusiones y revisiones por parte de la comunidad educativa entorno a esta versión, por lo que producto de una discusión pública; mesas regionales, sectoriales, virtuales, evaluación de pares nacionales e internacionales y análisis de referentes nacionales e internacionales, el MEN presenta la versión 2 de los DBA en matemáticas. En la Tabla 10 se evidencia la estructura de los DBA la cual contiene 3 elementos principales, enunciado, evidencia y aprendizaje.

Tabla 10*DBA en Matemáticas versión 2 asociados a la noción de la derivada 10° y 11°*

3. Utiliza instrumentos, unidades de medida, sus relaciones y la noción de derivada como razón de cambio, para resolver problemas, estimar cantidades y juzgar la pertinencia de las soluciones de acuerdo al contexto.

Evidencias de aprendizaje

- Reconoce magnitudes definidas como razones entre otras magnitudes.
- Interpreta y expresa magnitudes como velocidad y aceleración, con las unidades respectivas y las relaciones entre ellas.
- Utiliza e interpreta la derivada para resolver problemas relacionados con la variación y la razón de cambio de funciones que involucran magnitudes como velocidad, aceleración, longitud, tiempo.
- Explica las respuestas y resultados en un problema usando las expresiones algebraicas y la pertinencia de las unidades utilizadas en los cálculos

5. Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.

Evidencias de aprendizaje

- Relaciona la noción derivada con características numéricas, geométricas y métricas.
- Utiliza la derivada para estudiar la covariación entre dos magnitudes y relaciona características de la derivada con características de la función.
- Halla la derivada de algunas funciones empleando métodos gráficos y numéricos.

Ejemplo

Cuando un atleta recorre cierta distancia se puede suponer que su velocidad no es constante, que a partir del momento en que sale empieza a aumentar su velocidad hasta un pico máximo y que disminuye progresivamente hasta el final. Si se admite que la ecuación

$$F(t) = 0.00192t(250 - t)$$

Ejemplo

Desde la terraza de un edificio con una altura (h_0) de 40 metros, se lanza un balón verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial (V_0) de 19m/s. La altura H que alcanza el balón en un tiempo t (en segundos) se puede calcular con la expresión.

$$H = -4.9 t^2 + V_0 t + h_0$$

Discute el significado y las unidades del número -4,9. Explica la relación entre las unidades de las magnitudes involucradas en la expresión para calcular la altura, de manera que ésta quede expresada en metros. Explica por qué la velocidad se expresa en m/s y la aceleración en m/s². Explica el sentido de la afirmación “la expresión para H representa la gráfica de una parábola en el sistema de coordenadas H contra t , pero el movimiento de caída libre puede ser vertical cuando se suelta un objeto desde cierta altura

Representa la distancia recorrida por el atleta en metros cuando lleva t segundos. Averigua la distancia que ha recorrido cuando alcanza la mayor velocidad. Usa la derivada para construir un argumento



6. Comprende y usa el concepto de razón de cambio para estudiar el cambio promedio y el cambio alrededor de un punto y lo reconoce en representaciones gráficas, numéricas y algebraicas.

Evidencias de aprendizaje

- Utiliza representaciones gráficas o numéricas para tomar decisiones, frente a la solución de problemas prácticos.
- Determina la tendencia numérica en relación con problemas prácticos como predicción del comportamiento futuro.
- Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.

Ejemplo

Difusión del sarampión. La difusión del sarampión en cierta escuela está dada por la expresión,

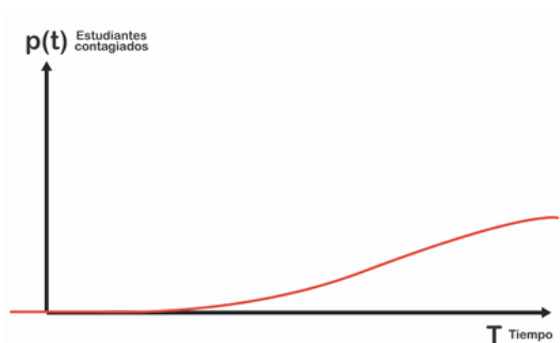
$$P(t) = \frac{200}{1 + e^{(5-t)}}$$

donde t representa el número de días desde la aparición del sarampión, y $P(t)$ representa el número total de estudiantes que se han contagiado hasta la fecha.

Estima tanto el número inicial de estudiantes infectados como el número de estudiantes que se contagiarán.

Determina cuándo se presenta la máxima tasa de difusión del sarampión e indica cuál es esa tasa.

Nota: Se pide la “máxima tasa” de variación que es diferente al valor máximo para $P(t)$. Una estimación geométrica es posible



Nota: Tomado Derechos Básicos de aprendizaje en Matemáticas grado 11° versión 2. MEN (2016).

Dentro de las sugerencias emanadas por el MEN para el mejoramiento de los aprendizajes en el componente numérico variacional, en la competencia resolución de problemas están : proponer actividades para listar, clasificar, y organizar datos a partir de la definición de algún criterio de orden, plantear situaciones que permitan analizar conjunto de datos para identificar y describir las características que la los representan, proponer situaciones en las que se requiera representar un conjunto de datos a partir de diagramas y a su vez interpretar, la información representada. Por ello es importante que el docente construya la ruta de enseñanza capaz, de promover estos aprendizajes y por ende alcance la competencia.

En ese mismo sentido, en las competencias de razonamiento, comunicación, representación y modelación es importante; validar y justificar procedimientos utilizados para

dar solución a situaciones problemas relacionados con el comportamiento de una función, atendiendo a las condiciones de las variables relacionadas. Realizar actividades que den cuenta de la comprensión del concepto del número real y sus propiedades. Dar cuenta de la selección de procedimientos utilizados para dar solución a situaciones problemas relacionadas con la comparación del comportamiento de una función a partir de valores que pueda tomar la variable asociada.

Hoy en día, el concepto de la derivada sigue siendo una herramienta fundamental en las matemáticas y las ciencias, y su estudio continúa siendo objeto de investigación y desarrollo por parte de matemáticos y científicos de todo el mundo.

Definición de la Derivada

En esta sección se establece el concepto fundamental de la derivada, comenzando por su historia, definición y la importancia de dicha temática en las diferentes áreas del conocimiento.

Historia de la Derivada

El concepto de la derivada surge en el siglo XVII de la mano de matemáticos como Newton y Leibniz, aunque es importante mencionar que algunas ideas y técnicas previas de cálculo infinitesimal ya habían sido desarrolladas por otros matemáticos como Fermat y Barrow. (Oxford University Press., 2007)

La derivada se definió inicialmente como la tasa de cambio instantáneo de una función en un punto dado, es decir, como la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese punto. Esta idea fue formalizada y desarrollada matemáticamente por Newton y Leibniz, quienes crearon las bases del cálculo diferencial.

A lo largo de los siglos XVIII y XIX, la teoría de la derivada y el cálculo infinitesimal se expandió y se aplicó en diversas ramas de las matemáticas y las ciencias, como la física y la

ingeniería. En esta época surgieron importantes matemáticos como Euler, Lagrange, Cauchy y Weierstrass, quienes desarrollaron teoremas y técnicas para el estudio de las funciones y las derivadas Sastry (s.f.).

En el siglo XX, la teoría de la derivada se ha expandido y ha sido profundizada en varias direcciones, como la teoría de funciones analíticas y la teoría de las ecuaciones diferenciales. También ha surgido una gran cantidad de aplicaciones de la derivada en áreas como la economía, la biología, la informática y la estadística.

El concepto de la derivada ha sido trascendental en el avance de la humanidad ya que es fundamental en muchos campos de la ciencia, la tecnología y la ingeniería. En matemáticas es un concepto importante del cálculo diferencial ya que a través de este concepto se determinan la tasa de cambio instantánea de una función en un punto dado, lo que es esencial en muchos fenómenos en la física, economía e ingeniería (Carbajal, 2016).

En física el concepto de la derivada se utiliza para el estudio de movimiento y la dinámica de los cuerpos. La velocidad y la aceleración son algunos ejemplos de magnitudes que se pueden expresar mediante derivada. En la ingeniería, es esencial en el diseño y la optimización de sistemas y procesos. Por ejemplo, en el diseño de circuitos eléctricos se utilizan las derivadas para determinar la tasa de cambio de la corriente y la tensión en los componentes. Y no menos importante, en la economía, se utiliza en la modelización y el análisis de la demanda y la oferta de productos y servicios, lo que es esencial para la toma de decisiones en el ámbito empresarial (Stewart, 2015).

Concepto de la Derivada en educación media

En educación media, la derivada se introduce como una medida de la tasa de cambio instantánea de una función en un punto dado. Matemáticamente, la derivada de una función $f(x)$ en un punto $x=a$ se denota como $f'(a)$ o $\left. \frac{df}{dx} \right|_{(x=a)}$, y se define de la siguiente manera:

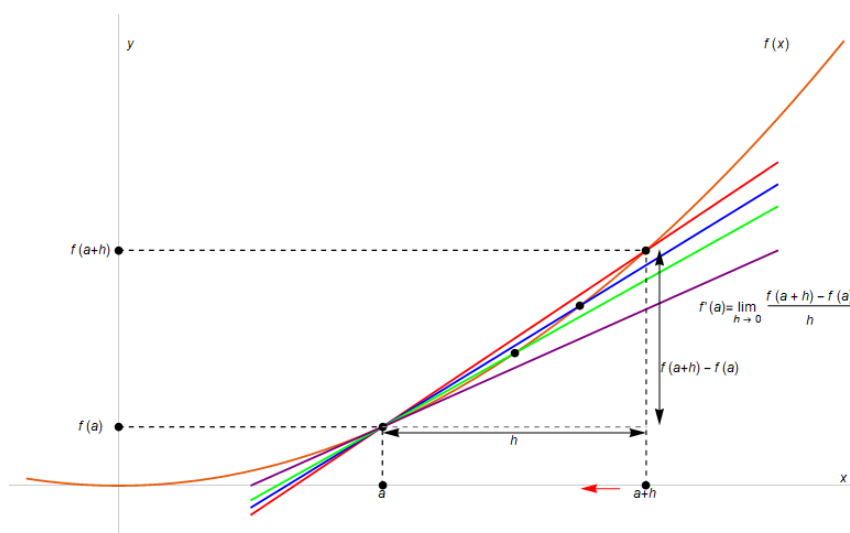
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

donde "lim" representa el límite, "h" es un valor infinitesimal que se aproxima a cero, y $f(a)$ y $f(a+h)$ son los valores de la función en los puntos a y $a+h$ respectivamente.

Desde el punto de vista gráfico, la derivada de una función en un punto se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese punto. Es decir, la derivada representa la inclinación de la recta que mejor se ajusta a la curva en un punto específico.

Figura 6

Interpretación geométrica del concepto de la derivada

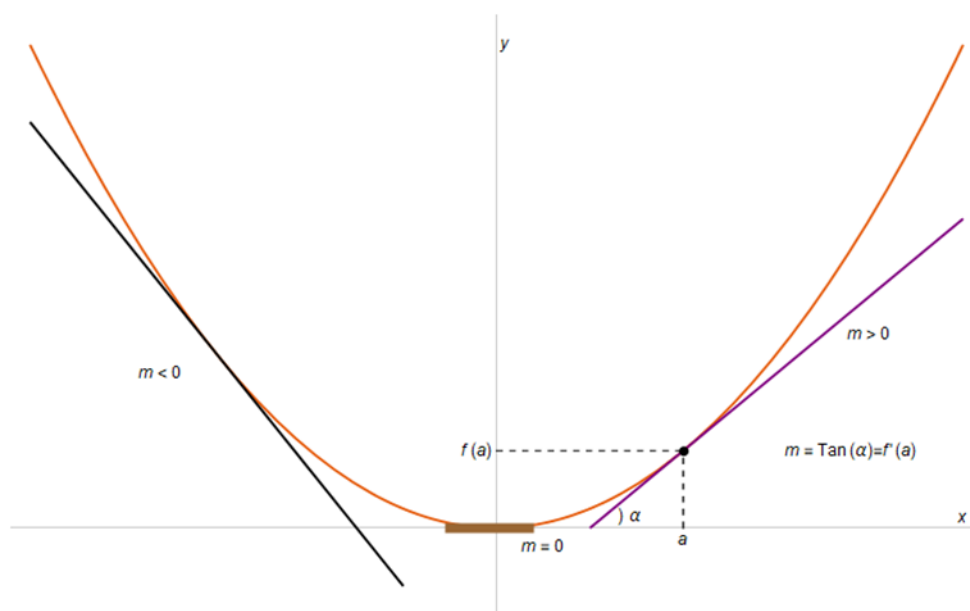


Nota. La imagen representa la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto $x=a$.

En una gráfica, la derivada de una función $f(x)$ en un punto $x=a$ se representa como la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese punto, ver figura 5. Si la recta es ascendente, la derivada será positiva; si es descendente, la derivada será negativa; y si es horizontal, la derivada será igual a cero; ver Figura 7.

Figura 7

Interpretación geométrica del concepto de la derivada



Nota. La imagen muestra el signo de la pendiente de la recta tangente a la función en diferentes puntos. positiva para rectas que son crecientes, negativa para rectas decrecientes y cero para rectas horizontales.

La interpretación gráfica de la derivada en educación media se puede utilizar para entender la relación entre la forma de la curva y el comportamiento de la derivada en diferentes puntos, lo que permite comprender la variación de la tasa de cambio instantánea en la función en diferentes puntos del dominio. Esto ayuda a los estudiantes a comprender cómo los cambios en la función se reflejan en su derivada y cómo la derivada puede ser utilizada para analizar el comportamiento de la función en un punto específico.

El concepto de la derivada tiene implícito varios conceptos que los estudiantes deben manejar tales como; el concepto de función, recta secante, funciones trigonométricas, operaciones básicas de números reales, entre otros. Por lo que el éxito en el aprendizaje de este concepto radica en la formación e ideas previas del alumnado, además es necesario comprender cómo se enseña este concepto para mejorar el proceso educativo.

A continuación, se presentan algunas fórmulas para la derivada de las funciones elementales:

1. Derivada de una constante: La derivada de una constante "C" es cero, es decir,
2. si $f(x) = C$, entonces $f'(x) = 0$.
3. Derivada de una variable: La derivada de una variable "x" es uno, es decir,
4. si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$.
5. Derivada de una función potencial: La derivada de una función potencial de la forma $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$, Por ejemplo, si $f(x) = x^4$, entonces $f'(x) = 4x^3$.
6. Derivada de una función exponencial: La derivada de una función exponencial de la forma $f(x) = a^x$ es $f'(x) = a^x \ln(a)$. Por ejemplo, si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.
7. Derivada de una función logarítmica: La derivada de una función logarítmica de la forma $f(x) = \log_a x$ es $f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$. Por ejemplo, si $f(x) = \ln(x)$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$.
8. Derivada de una función trigonométrica: La derivada de una función trigonométrica de la forma $f(x) = \sin(x)$ es $f'(x) = \cos(x)$, y la derivada de $f(x) = \cos(x)$ es $f'(x) = -\sin(x)$.

Las funciones elementales tienen fórmulas específicas para su derivada, lo que facilita su cálculo. Además, las aplicaciones de la derivada son numerosas, como en la optimización, la determinación de puntos críticos, la modelización de fenómenos físicos, entre otros.

METODOLOGÍA

Enfoque y tipo de investigación

El enfoque de esta investigación es cuantitativo y el tipo de estudio es cuasi experimental. El objetivo principal es determinar la incidencia del ciclo de aprendizaje basado en el modelo de las 5E como estrategia en el desarrollo del pensamiento numérico variacional asociado a la noción de derivada, en estudiantes de grado 11° del Colegio La Salle Montería. Para ello, se llevó a cabo un diseño de series cronológicas múltiples, basado en cuatro grupos; diseño de Solomon con pretest a grupo experimental 2, en el que se aplicó la estrategia de aprendizaje basada en la indagación a través del ciclo de las 5E en los grupos experimental, mientras que en los grupos de control se impartió la metodología de enseñanza convencional del colegio. Se utilizaron herramientas y técnicas para la recolección de datos como: pruebas estandarizadas y cuestionarios, se analizaron los datos mediante técnicas estadísticas para determinar si existen diferencias significativas en el desarrollo del pensamiento numérico variacional asociados a la noción de la derivada entre grupos dichos grupos.

Población y Muestra

La población estuvo conformada por 132 estudiantes de grado 11° del Colegio La Salle de Montería, los cuales son de ambos sexos y cuyas edades oscilan entre 15 y 18 años.

Usando STATS determinamos que el tamaño de la muestra necesaria para representar a la población es de 98 estudiantes, con un error del 5% y un nivel de confianza de 95%.

Debido a que el interés es comparar los resultados entre grupos se debe determinar una muestra probabilística estratificada (Hernández et al., 2014).

Para nuestra población de 132 estudiantes de undécimo grado y el tamaño de muestra de 98, la muestra que se necesita para cada grupo se muestra en la Tabla 11

$$ksh = \frac{n}{N} = \frac{98}{132} = 0.742$$

El total de la subpoblación se multiplica por este número para obtener el tamaño de la muestra para cada grupo.

Tabla 11

Formación de grupos experimental y no experimental

	Grado completo	GE1	GE2	GC1	GC2
Número de alumnos	$N = 132$	34	32	32	34
Muestra	$n = 98$	25	24	24	25

Nota: La tabla muestra la población y muestra de los grupos experimental y control.

Diseño Metodológico

En esta investigación se pretende realizar con observaciones antes y después de la aplicación de la variable (Aprendizaje Basado en la Indagación ciclo de enseñanza de las 5 E). Es importante mencionar que los grupos de control siguen la metodología de enseñanza que sigue el colegio, el cual consiste en un enfoque problémico. Este enfoque se centra en el desarrollo de las capacidades y habilidades creativas del individuo, poniendo énfasis en la autonomía del alumno en la construcción del conocimiento y la cultura. Su objetivo principal es que los estudiantes sientan la motivación de resolver problemas, analizar de manera crítica la realidad social con el fin de transformarla, identificar conceptos, aprender a pensar, actuar, ser, convivir y descubrir conocimientos de una manera interesante y entretenida. El esquema metodológico parte de una situación problema, activación de saberes para luego seguir la secuencia didáctica; inicio, desarrollo y cierre. Este actuar, que inconscientemente implementamos los docentes, está fuertemente arraigado a la forma en cómo nos enseñaron, si bien tenemos el ideal metodológico de estrategias de aprendizajes emergentes, en nuestra puesta en práctica aflora el tradicionalismo imperante del cual fuimos enseñados. Los documentos que se implementan para el despliegue metodológico de las clases se pueden apreciar en el Apéndice G.

El diseño se organiza de la siguiente manera:

Tabla 12

Esquematización del diseño metodológico de cuatro grupos de Solomon con series cronológicas

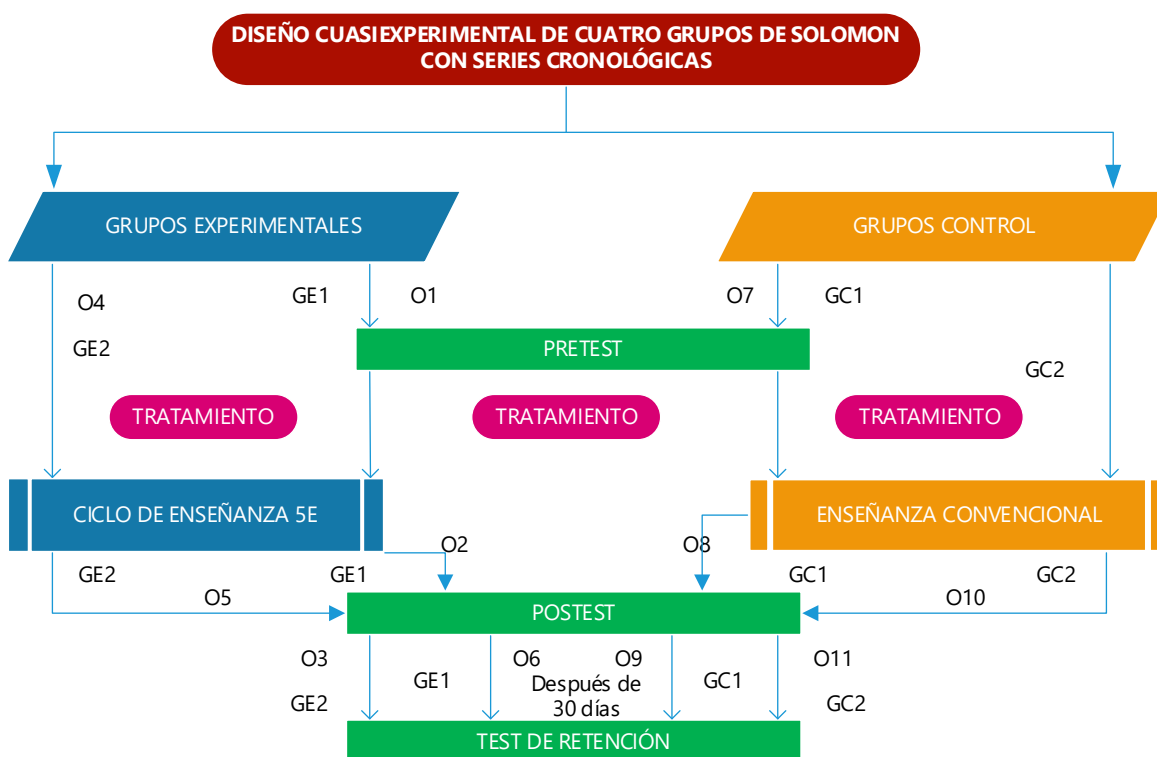
Grupos	Medición Antes	Variables	Medición Después	
GE1	O1	X1 _{5E}	O2	O3
GE2	O4	X2 _{5E}	O5	O6
GC1	O7	-----	O8	O9
GC2	-----	-----	O10	O11

Nota: La tabla muestra el diagrama del diseño donde GE1= Grupo experimental uno. GE2= Grupo experimental dos. GC1=Grupo control 1. GC2=Grupo control 2. O1= Medición antes, del grupo bajo la estrategia 5E. O2= Medición después del grupo, bajo la estrategia 5E. O3= segunda medición después del grupo bajo la estrategia 5E. O4= Medición antes del grupo bajo la estrategia 5E. O5= Medición después del grupo bajo la estrategia 5E. O6= segunda medición después del grupo bajo la estrategia 5E. O7= Medición antes del grupo control 1. O8= Medición después del grupo control 1. O9= segunda medición del grupo control 1. O10= Medición después grupo control 2. O11=segunda medición del grupo control 2. X25E = aplicación de la estrategia 5E. A los cuatro grupos se les aplica una prueba de retención cronológica O3, O6, O9 Y O11, 30 días después de la aplicación del primer post test.

En la Tabla 12 la esquematización del diseño y en la Figura 8 el diagrama de flujo del diseño.

Figura 8

Diagrama diseño de cuatro grupos de Solomon con pretest, postest y test de retención



Nota. En la figura, GE1-2 hace referencia a grupos experimentales. GC1-2, grupos control.

Hipótesis

H₀: No Existen diferencias significativas en los niveles del pensamiento numérico variacional en estudiantes de grado 11° en la asignatura de Análisis y Cálculo, que hicieron uso de la metodología de Aprendizaje Basado en la indagación (ciclo de enseñanza de las 5 E)

H₁: Existen diferencias significativas en los niveles del pensamiento numérico variacional en estudiantes de grado 11° en la asignatura de Análisis y Cálculo, que hicieron uso de la metodología de Aprendizaje Basado en la indagación (ciclo de enseñanza de las 5 E)

Operacionalización de Variables

Tabla 13

Operacionalización de las variables

VARIABLES	DEFINICIÓN OPERACIONAL	DIMENSIONES	INDICADORES	INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN
Estrategia de aprendizaje basada en la indagación	El aprendizaje basado en la indagación tiene como fundamento que en las clases se hagan observaciones, se realicen preguntas, examinen fuentes de información, analicen e interpreten datos, proponer, explicar y predecir soluciones a situaciones problemas en contexto.	Engagement	Actitud de escucha	Observación
Trata sobre la formulación de preguntas y el hallazgo de las soluciones adecuadas a los problemas. La indagación requiere un diseño y una fundamentación de la clase muy especializados para facilitar que los alumnos experimenten la emoción de resolver un problema por ellos mismos. ^a		Exploration	Trabajo colaborativo	Observación
		Explanation	Disposición para Participar	Revisión de los apuntes
		Elaboration	Actitud para realizar actividades	Revisión de Actividades Planificadores de clases
		Evaluation	Criterios de evaluación	Observación Prueba escrita Diario de campo
Pensamiento Numérico-Variacional	No Sólo la comprensión de números y sus operaciones son habilidades propias del pensamiento numérico También, la forma de usar lo que saben para hacer juicios y realizar estrategias. De igual forma la variación en la vida diaria implica dependencia entre variables hecho que promueve desde la observación, registro u utilización del lenguaje propio de las matemáticas	Comunicación, representación y modelación.	Comprende y transforma la información presentada en distintos formatos	Observación Pretest Preguntas (4,6,8,10) Postest Preguntas (4,7,9,10) Test de Retención
Corresponde a la comprensión de los números, sus propiedades y operaciones, el reconocimiento de regularidades y patrones, la comprensión de funciones y sus representaciones, la identificación de variables, y la descripción de fenómenos de cambio y dependencia. ^b			Extrae información relevante.	Test de Retención
		Razonamiento y argumentación	Valida o refuta conclusiones, estrategias, soluciones, interpretaciones y representaciones en situaciones problemáticas	Observación Pretest Preguntas (2,3,5,7) Postest Preguntas (2,3,5,6) Test de Retención
			Resolución de problemas	Plantea y diseña estrategias que permitan solucionar problemas provenientes de diversos contextos.

Nota: En la tabla se definen las variables, se establecen las dimensiones, indicadores, y se muestran los instrumentos de recolección de datos. a Erick y Reed (2002). b MEN (2006).

Fases o Etapas de la Investigación

Tabla 14

Fases de la investigación

FASE	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase 1: Caracterización	Realizar la revisión bibliográfica sobre estrategias de enseñanza de las Matemáticas.	1.1 Revisión bibliográfica, enseñanza de las Matemáticas en el tema de la derivada 1.2 Revisión bibliográfica de los documentos del MEN lineamientos curriculares y estándares básicos de aprendizaje, relacionados con el pensamiento numérico variacional en Matemáticas 1.3 Revisión bibliográfica de propuestas de enseñanza
Fase 2: Diseño	Construir pruebas y actividades que sirvan para la operacionalización y enseñanza de la derivada	2.1 Diseño y construcción de un pretest y postest para la evaluación de los conceptos. 2.2 Diseño y construcción de secuencia didáctica para la comprensión del concepto de derivada. 2.3 Diseño y ejecución de actividades evaluativas que arrojen resultados de las actividades realizadas y de la intervención de la propuesta.

<p>Fase 3: Intervención en El aula</p>	<p>Realizar intervención del ciclo de enseñanza de aprendizaje modelo 5E con el tema de la Derivada a grupos experimental</p>	<p>1.1 Intervención de la estrategia de enseñanza modelo de las 5E 1.2 Aplicación de la prueba posttest que dé luz de los conocimientos adquiridos durante la intervención. 1.3 Aplicación test de retención con el fin de medir en el tiempo la incidencia de la estrategia de enseñanza aplicada.</p>
<p>Fase 4: Evaluación</p>	<p>Evaluar incidencia de la estrategia de enseñanza aplicada en grupos experimental y comparar con grupos no intervenidos.</p>	<p>4.1 Análisis e interpretación de los resultados obtenidos en grado 11° del Colegio LA Salle Montería sobre el tema de derivada. 4.2 Conclusiones y recomendaciones acerca del desarrollo de la propuesta.</p>

Nota: La tabla muestra cada fase, la cual se encuentra detalladamente descrita, organizada con sus objetivos y actividades.

Instrumentos

En esta sección se establecen una descripción clara de los instrumentos utilizados, así como su confiabilidad, validez y detalles para su aplicación.

Diseño de Instrumentos

Luego de una revisión bibliográfica no se encontró un instrumento capaz de medir el pensamiento numérico variacional asociado a la noción de la derivada por lo que se diseñaron cuestionarios ad hoc para el pretest y posttest, la prueba test de retención consistió en el mismo posttest, pero aplicado 30 días después de la aplicación del posttest (ver Apéndice A, Apéndice B).

El pretest utilizado para obtener la información consiste en 12 preguntas de selección múltiple al igual que el postest. Ambos cuestionarios fueron realizados teniendo en cuenta la guía de orientación para la prueba saber 11 así como los derechos básicos de aprendizaje versión 1 y 2 en el área de Matemáticas para grado 10° y 11°. El cuestionario postest, contenía una pregunta abierta la cual consistía en evaluar la metodología de enseñanza aplicada, fortalezas, aspectos a mejorar y/o recomendaciones.

Por otro lado, en el Apéndice F contiene una propuesta metodológica basado en el ciclo de aprendizaje 5E asociado a la temática de la derivada. Como se ha mencionado anteriormente los grupos control serán sometidos al método de enseñanza convencional seguido por el colegio, ver Apéndice G.

Validación

Para comprobar la confiabilidad del pretest y postest, se realizó una prueba piloto. Las cuales fueron administradas a estudiantes con las mismas características de la presente investigación; grado 11 del año 2021 en el segundo semestre en el transcurso de la asignatura de análisis y cálculo. Se utilizó una muestra de 10 estudiantes que tenían nociones de la derivada.

Este pilotaje arrojó que algunos ítems no estaban bien formulados y no dejaban claridad sobre lo que se pedía al estudiante, por lo que el comité de docentes del colegio del área de Matemáticas optó por mejorarlas y así darle validez en cuanto al contenido de los instrumentos.

Otro aspecto fundamental en esta prueba piloto fue la información del tiempo empleado para responder los cuestionarios, dicho tiempo, establecido al inicio, no era suficiente, por lo que se debía ampliar, y se estableció en 60 minutos.

Por otro lado, la confiabilidad es un concepto esencial en la investigación científica, y se refiere a la consistencia y estabilidad de los resultados obtenidos a través de un método o

instrumento de medición (Hernández et al., 2014). Con el fin de que nuestras herramientas puedan producir resultados precisos y reproducibles en diferentes momentos y situaciones, se ha determinado el coeficiente Alfa Cronbach de pretest y postest arrojando los siguientes resultados:

Tabla 15

Estadístico de fiabilidad pretest y postest

Estadísticos de fiabilidad pretest		Estadísticos de fiabilidad postest	
Alfa de Cronbach	N de elementos	Alfa de Cronbach	N de elementos
,800	12	,813	12

Nota: La Tabla muestra el valor de alfa de Cronbach para pretest y postest.

La confiabilidad del instrumento pretest y postest, establecida por medio de una prueba alfa de Cronbach es de 0.80 y 0.81 respectivamente, estos valores indican una fiabilidad muy elevada, lo que muestra consistencia interna entre los ítems del cuestionario.

Los resultados de la prueba piloto para el pretest y postest se pueden encontrar en la Tabla 27 y Tabla 28, ver Apéndice H.

Técnicas de Aplicación

La técnica usada en esta investigación es aplicación de test en la cual se administró dos tipos de cuestionarios: pretest, postest, test de retención. El pretest, ver Apéndice A, se realizó antes de llevar a cabo la intervención a los grupos experimentales GE1, GE2. Al grupo control GC1. (O1, O4, O7), antes de la clase convencional. Después, se administró el cuestionario del Apéndice B como medición del postest (O2, O5) para los grupos experimentales; una vez aplicada la intervención, y para los grupos control (O8, O10) con la clase convencional. Finalmente, al cabo de 30 días se aplicó el test de retención, como se había mencionado anteriormente este consistió en el postest, a todos los grupos (O3, O6, O9, O11).

Técnicas de Análisis Utilizadas

Los resultados de los cuestionarios fueron recopilados en una base de datos estadísticos con ayuda del programa Microsoft Excel y para analizar las variables, el programa estadístico informático IBM SPSS Statistics V21. 0. (Illinois, Chicago).

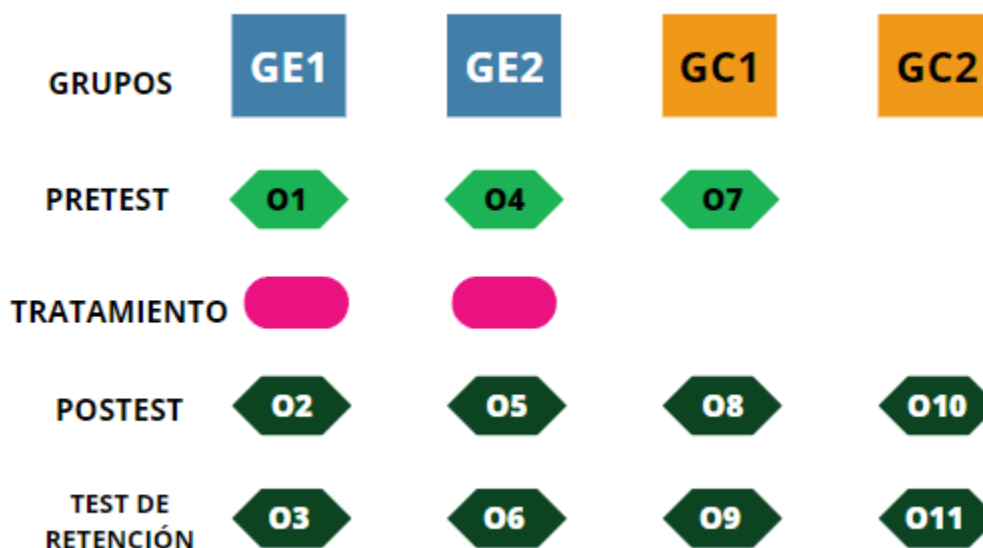
En primera instancia se verificaron los datos de cada prueba, que fueran correspondientes con los estudiantes escogidos. Luego, se realizó análisis descriptivo de la muestra escogida. En el caso de la variable cuantitativa, se determinaron las medidas de tendencia central, medidas de posición y dispersión.

Para analizar la efectividad del ciclo de aprendizaje basado en la indagación 5E, se tomó en cuenta el porcentaje de aciertos en cada cuestionario. Se utilizó un diseño de análisis de varianza de medidas repetidas (ANOVA de medidas repetidas) como método estadístico para analizar los efectos de la variable independiente (estrategia de enseñanza 5E) en múltiples mediciones tomadas en el tiempo. La comparación entre los resultados de los cuestionarios nos permitirá determinar la efectividad de la estrategia como método de enseñanza. En la Figura 9 se muestra las comparaciones para tener en cuenta en nuestra investigación la cual está basada en un diseño de series cronológicas múltiples basado en cuatro grupos, variante del diseño de Solomon con pretest a grupo experimental 2:

Las comparaciones son fundamentales para evaluar la efectividad de las intervenciones o tratamientos aplicados en cada grupo. Estas comparaciones nos permitirán analizar las diferencias y/o similitudes entre los grupos y determinar la influencia de las variables independientes en los resultados observados.

Figura 9

Diseño de series cronológicas múltiples basada en cuatro grupos



Nota. La Figura evidencia el diseño de series cronológicas múltiples basada en cuatro grupos, diseño de Solomon con pretest a grupo experimental 2.

De igual forma, al realizar mediciones cronológicas en cada grupo, es posible identificar y comparar los cambios ocurridos dentro de cada grupo a medida que avanza el tiempo. Esto permitirá evaluar la efectividad de la intervención y su impacto a mediano plazo en cada grupo por separado. Por lo anterior, se puede determinar si los efectos son transitorios o si se mantienen a lo largo del tiempo.

Resultados

Este capítulo presenta los resultados obtenidos en el marco de la investigación realizada, la cual se centró en analizar la incidencia del ciclo de aprendizaje basado en el modelo de las 5E como estrategia en el desarrollo del pensamiento numérico variacional asociado a la noción de derivada en estudiantes de grado 11° del Colegio La Salle Montería. Se analizaron cuatro grupos de estudio: Grupo Experimental 1 (GE1), Grupo Experimental 2 (GE2), Grupo Control 1 (GC1) y Grupo Control 2 (GC2). Además, se realizaron mediciones antes y después de la aplicación de la estrategia 5E, así como pruebas de retención cronológica 30 días después del primer post test.

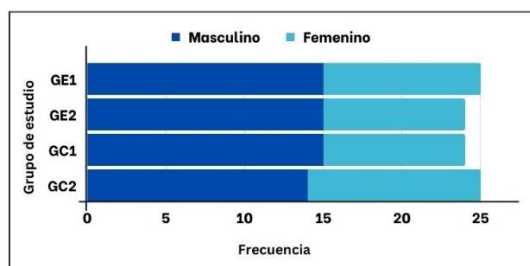
Se tuvo en cuenta la puntuación obtenida en las 12 preguntas para el análisis de los cuestionarios, los cuales evidencian el grado de conocimiento asociado a la noción de la derivada, en el pensamiento numérico variacional, además de, cada una de las competencias en el área de matemáticas estipuladas por el MEN, permitiendo hacer una clasificación en tres subgrupos; comunicación representación y modelación; razonamiento y argumentación; resolución de problemas (ver Tabla 4) para así poder determinar el impacto en el componente estudiado.

Análisis e Interpretación de Datos

Los resultados obtenidos para la muestra, en cada uno de los grupos, se encuentran en el Apéndice C. A continuación, se presenta un análisis de la muestra utilizada para caracterizar a los participantes: en la Figura 10, se evidencia que la proporción de hombres es mayor que la de mujeres, a nivel general y en cada uno de los grupos de estudio. Además, los hombres representan un 60% de los estudiantes.

Figura 10

Distribución por género en cada grupo de estudio

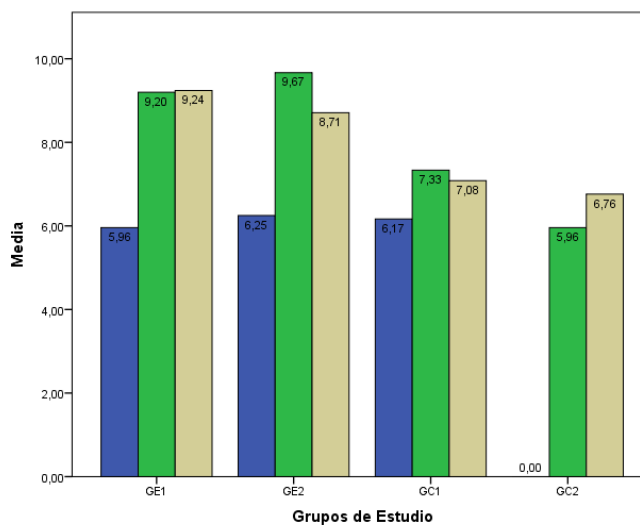


Nota. La figura muestra la distribución por edades de la muestra en cada grupo.

La edad promedio de los participantes fue de 16 años aproximadamente, con un rango de 15 a 18 años. Otro aspecto importante que se desprende de la Figura 10 es la homogeneidad por género en cada uno de los grupos. El grupo que presenta más mujeres es el GC2 con 11 mujeres, seguido del GE1 con 10 mujeres y finalmente los grupos GE2 y GC1 con 9 cada uno.

Figura 11

Media pretest, postest y test de retención para cada uno de los grupos



Nota. La figura muestra los valores de la media obtenidos para cada uno de los grupos de estudio en cada cuestionario (Pretest ■, Postest ■ y Test de retención ■).

La Figura 11 muestra los resultados en la media para cada grupo (Apéndice E). Se evidencian diferencias en los puntajes posttest entre los grupos, indicando que los grupos experimentales obtuvieron puntuaciones más altas en comparación con los grupos de control. En el seguimiento realizado con el test de retención, se observa que los grupos experimentales lograron mantener ligeramente sus puntajes (a excepción de GE2). El grupo de control 1 muestra puntajes similares en comparación con el posttest. Estos hallazgos sugieren, en primera aproximación, que la intervención tuvo un efecto positivo en el aprendizaje y la retención de conocimientos en los grupos experimentales, mientras que los grupos de control no experimentaron el mismo nivel de beneficio. Sin embargo, los puntajes en el test de retención y posttest son similares en el GC1 y en el GC2 hay diferencias de 0.8 en la media de los resultados.

Tabla 16

Resumen de estadísticos descriptivos para cada una de las pruebas aplicadas

		PRETEST	POSTEST	TESTRET	
Grupos de Estudio	GE1	Media	5,96	9,20	9,24
		Mínimo	3,00	7,00	6,00
		Máximo	11,00	12,00	12,00
		Error típico de la media	,45	,28	,35
		Varianza	5,04	1,92	3,02
		Desviación típica	2,24	1,38	1,74
	GE2	Media	6,25	9,67	8,71
		Mínimo	3,00	7,00	6,00
		Máximo	10,00	12,00	12,00
		Error típico de la media	,45	,29	,29
		Varianza	4,89	1,97	1,95
		Desviación típica	2,21	1,40	1,40
	GC1	Media	6,17	7,33	7,08
		Mínimo	2,00	2,00	5,00
		Máximo	12,00	10,00	10,00
		Error típico de la media	,43	,42	,31
		Varianza	4,41	4,32	2,34

	Desviación típica	2,10	2,08	1,53
	Media	,00	5,96	6,76
	Mínimo	,00	2,00	3,00
	Máximo	,00	10,00	10,00
GC2	Error típico de la media	,00	,41	,38
	Varianza	,00	4,21	3,52
	Desviación típica	,00	2,05	1,88

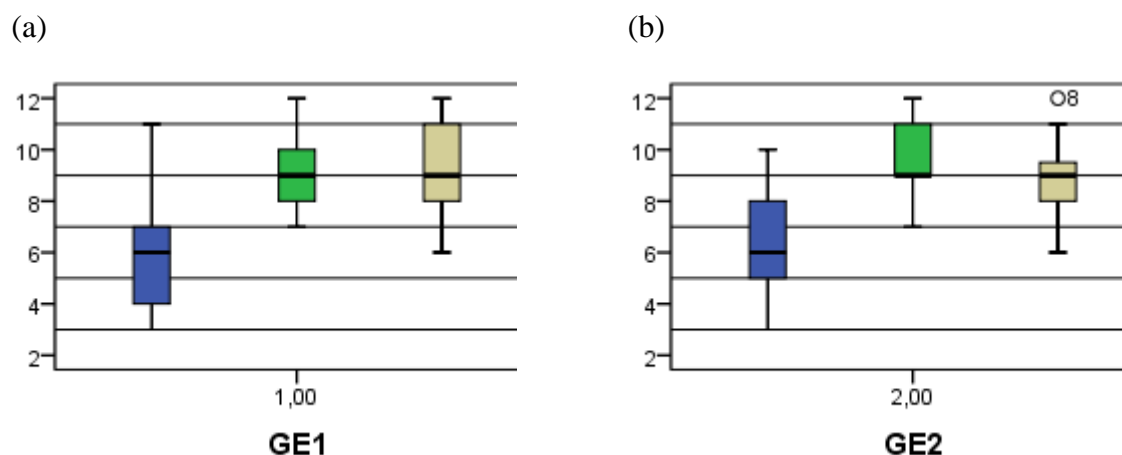
Nota. Esta tabla muestra los principales estadísticos en cada una de las pruebas aplicadas para cada grupo de estudio.

La Tabla 16 muestra un resumen de los estadísticos descriptivos más importantes en cada uno de los cuestionarios aplicados para cada grupo de estudio. Es importante enfatizar que, como se mencionó anteriormente; los grupos GE1 y GE2 muestran un aumento significativo en las puntuaciones medias desde el pretest hasta el postest, con incrementos de 3,24 y 3,42 puntos respectivamente. Sin embargo, en el test de retención (TESTRET), el grupo GE1 mantiene puntuación en comparación con el postest, mientras que el grupo GE2 presenta una disminución de 0.96 en comparación con el postest. Esto sugiere que el grupo GE1 pudo retener mejor los conocimientos adquiridos durante la intervención a lo largo del tiempo.

Por otro lado, los grupos de control (GC1) también experimentó un incremento en las puntuaciones promedio desde el pretest hasta el postest, con aumento de 1,16 puntos. Sin embargo, en la prueba de retención, el grupo GC1 muestran una disminución en comparación con el postest, lo que indica una menor retención de los conocimientos. A diferencia del GC2, donde hubo un aumento en el test de retención en comparación con el postest, pasó de 5.96 a 6.76. En términos de variabilidad, se observa que los grupos experimentales (GE1 y GE2) presentan una menor varianza y desviación típica en comparación con los grupos de control (GC1 y GC2), lo que sugiere una mayor consistencia en el desempeño de los grupos experimentales.

Figura 12

Comparación de puntuaciones pretest, posttest y test de retención para grupos experimentales



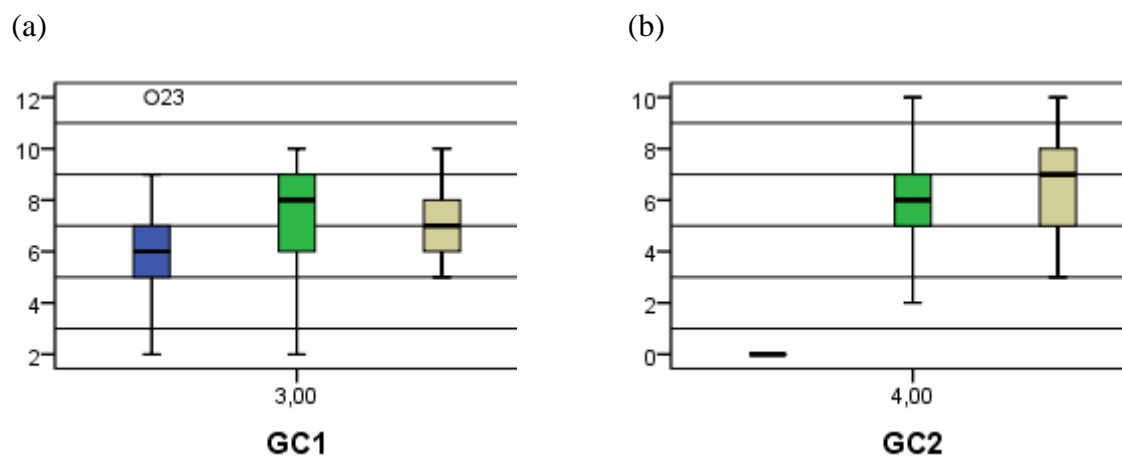
Nota. Pretest ■, Posttest ■ y Test de retención ■

En la Figura 12 se representa la comparación de las distribuciones de puntuaciones de conocimiento obtenidas por los estudiantes en cada grupo experimental. Para el GE1 (Figura 12.a) en el pretest, se observa una amplia dispersión de resultados (desviación=2.24), lo que indica que las calificaciones obtenidas por los estudiantes fueron muy variadas, oscilando entre 3 y 11 puntos. Después de implementar la estrategia de enseñanza 5E, se observa un aumento en las puntuaciones en el posttest, acompañado de una reducción en la dispersión (desviación=1.38). Para evaluar la efectividad de la estrategia, podemos comparar las medianas de cada prueba (rayas negras horizontales): la mediana del pretest fue de 6, mientras que en el posttest alcanzó los 9 puntos. Para el test de retención la dispersión aumentó en comparación al posttest (desviación=1.74), lo que indica que las calificaciones de los estudiantes estuvieron variadas, oscilando entre 6 y 12 puntos. Al comparar las medianas del posttest y test de retención se observa que son iguales, evidenciando sostenibilidad en los conocimientos a lo largo del tiempo.

En el caso del GE2 (Figura 12.b) en el pretest, se observa también amplia dispersión de resultados (desviación=2.21), lo que indica que las calificaciones obtenidas por los estudiantes fueron muy variadas, oscilando entre 3 y 10 puntos. Después de implementar la estrategia de enseñanza 5E, se observa, como en el caso de GE1, un aumento en las puntuaciones en el posttest, acompañado de una reducción en la dispersión (desviación=1.40). Para evaluar la efectividad de la estrategia en este grupo, podemos comparar las medianas de cada prueba (rayas negras horizontales): la mediana del pretest fue de 6, mientras que en el posttest alcanzó los 9 puntos. Para el test de retención la dispersión se mantuvo en comparación al posttest (desviación=1.40), lo que indica que las calificaciones de los estudiantes fueron similares, con un mínimo de 6 y un máximo de 11. Al comparar las medianas del posttest y test de retención se observa que son iguales, evidenciando sostenibilidad en los conocimientos a lo largo del tiempo.

Figura 13

Comparación de puntuaciones pretest, posttest y test de retención para grupos control



Nota. Pretest ■, Posttest ■ y Test de retención ■

En la Figura 13 se representa la comparación de las distribuciones de puntuaciones de conocimiento obtenidas por los estudiantes en cada grupo de control. Para el GC1 (Figura 13.a)

en el pretest, se observa una amplia dispersión de resultados (desviación=2.10), lo que indica que las calificaciones obtenidas por los estudiantes fueron muy variadas, oscilando entre 2 y 9 puntos. Después de la clase convencional, se observa un pequeño aumento en las puntuaciones en el postest, pero manteniendo amplia dispersión (desviación=2.08). si se quiere observar el efecto de la estrategia tradicional podemos comparar las medianas de cada prueba (rayas negras horizontales): la mediana del pretest fue de 6, mientras que en el postest fue de 8 puntos. Para el test de retención la dispersión disminuyó en comparación al postest (desviación=1.53), lo que indica que las calificaciones de los estudiantes estuvieron homogéneas, oscilando entre 5 y 10 puntos. Al comparar las medianas del postest y test de retención se observa que son diferentes, 8 y 7 puntos respectivamente. Estos resultados indican que el GC1 si bien hubo mejoría en los resultados del postest comparados al pretest, a lo largo del tiempo tienen menor retención en el conocimiento ya que hay una disminución en sus puntuaciones.

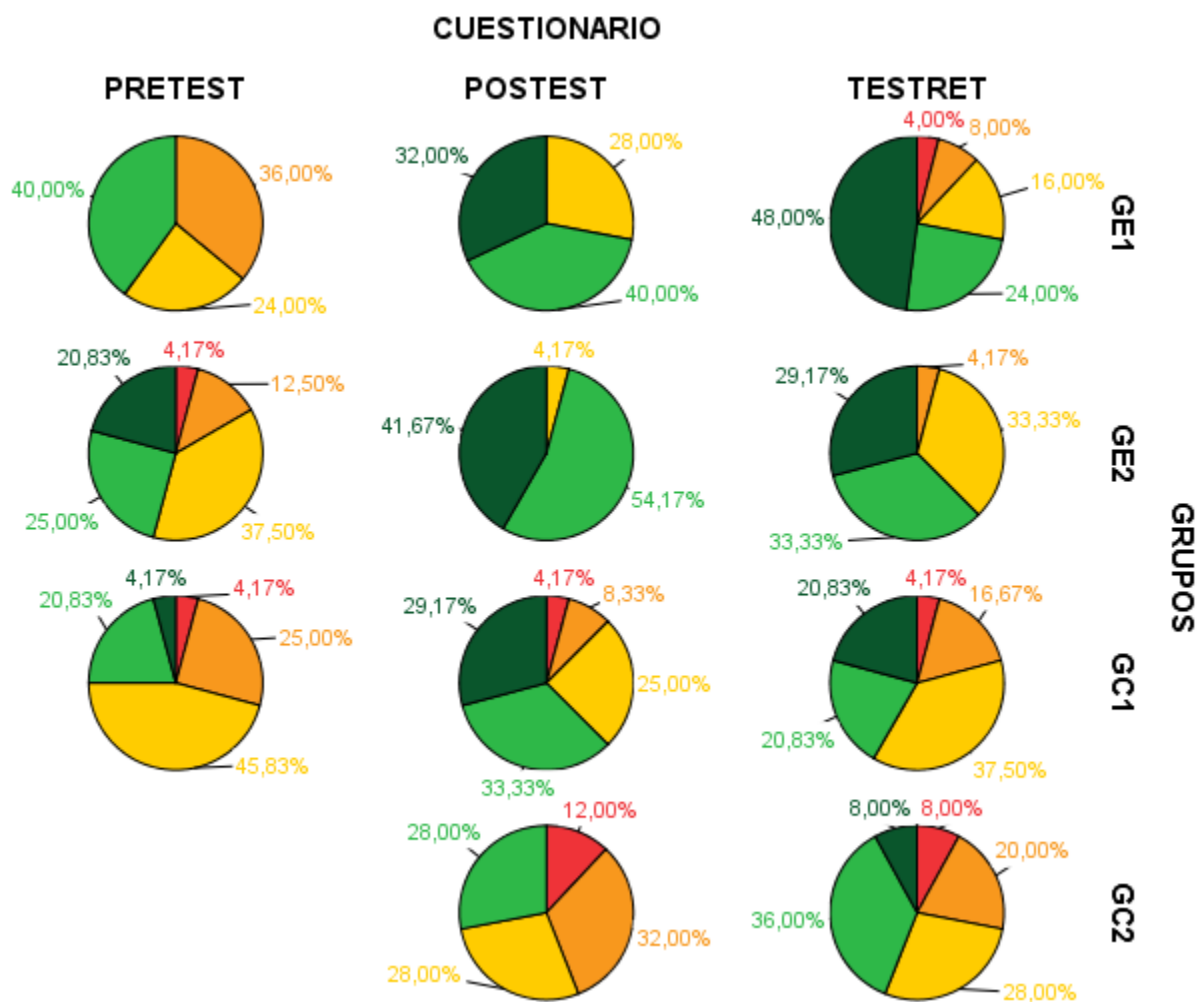
En el caso del GC2 (Figura 13.b) no se aplicó pretest. Después de implementar la estrategia tradicional, se observa alta dispersión en las puntuaciones del postest (desviación=2.05), con puntajes mínimo de 2 puntos y máximos de 10 puntos. Para el test de retención la dispersión disminuyó en comparación al postest (desviación=1.88), lo que indica que las calificaciones de los estudiantes fueron similares, con un mínimo de 6 y un máximo de 11. Al comparar las medianas del postest y test de retención se observa que son 6 y 7 puntos respectivamente, evidenciando un ligero, pero aumento en los conocimientos, a lo largo del tiempo.

A continuación, se analizará los resultados obtenidos por competencias (ver Apéndice E), teniendo en cuenta las puntuaciones en los diferentes cuestionarios en cada uno de los grupos.

Este análisis por competencias nos facilitará la evaluación objetiva y precisa de las competencias matemáticas adquiridas, permitiendo identificar fortalezas y áreas de mejora.

Figura 14

Porcentaje de estudiantes por puntuación en la competencia de Comunicación, representación y modelación



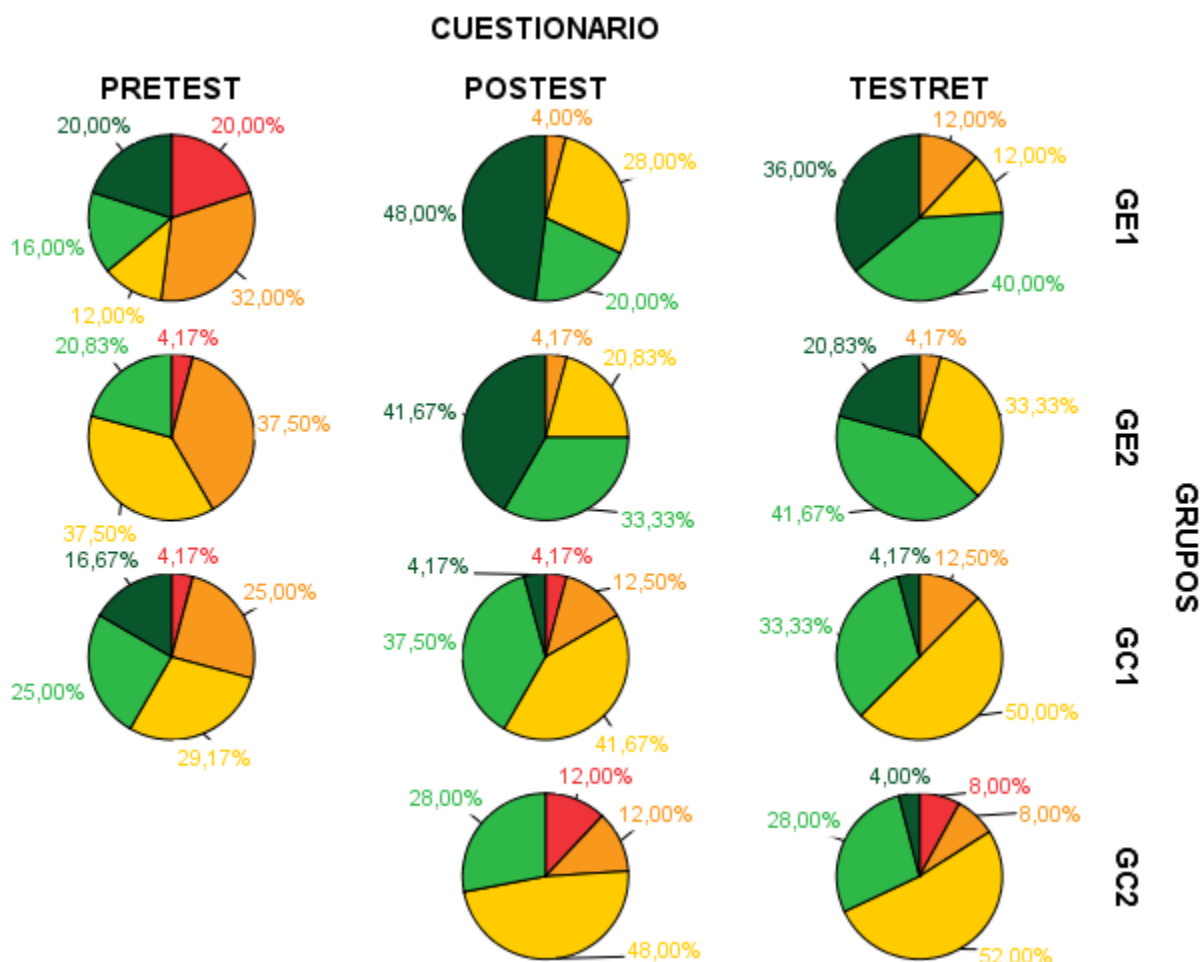
Nota. 0 puntos ■, 1 punto ■, 2 puntos ■, 3 puntos ■, 4 puntos ■

El análisis de los resultados en esta competencia (comunicación, representación y modelación, (ver Figura 14) en los diferentes grupos muestra el progreso en el porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente las preguntas a lo largo del tiempo. En el GE1, se

observa una mejora significativa desde el pretest hasta el testret, donde se aumentó la cantidad de preguntas contestadas correctamente. Para el caso del GE2, también muestra mejoras en el postest y el testret, ya que la cantidad de estudiantes que respondieron de manera correcta las cuatro preguntas en el postest y en el testret es mayor es comparación con el pretest, sin embargo, a lo largo del tiempo hay una disminución de esta competencia evidenciada en la disminución entre el postest y testret. En el grupo GC1, se mantiene un rendimiento estable en cuanto al porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente 3 y 4 preguntas. Por último, el grupo GC2 muestra avances en esta competencia en el postest y el testret, con una mayor cantidad de estudiantes que respondieron 3 y 4 preguntas. En general, todos los grupos muestran una tendencia positiva en esta competencia, en cuanto aumento al porcentaje de estudiantes que respondieron las preguntas correctamente a medida que avanzan en el tiempo.

Figura 15

Porcentaje de estudiantes por puntuación en la competencia de Razonamiento y argumentación



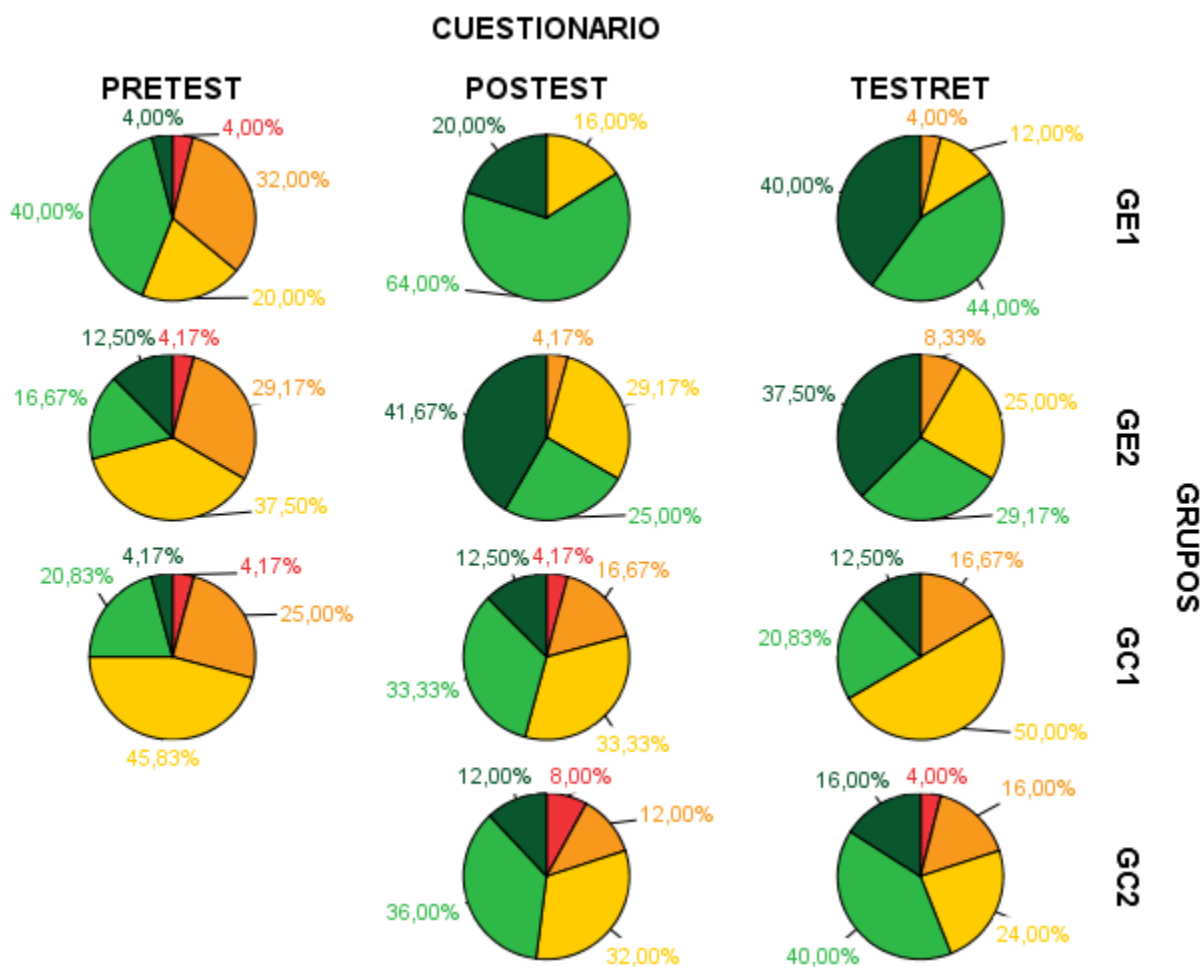
Nota. 0 puntos ■, 1 punto ■, 2 puntos ■, 3 puntos ■, 4 puntos ■

El análisis de los resultados en la competencia de razonamiento y argumentación (Figura 15) en los diferentes grupos muestra el progreso en el porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente las preguntas a lo largo del tiempo. En el GE1, se observa un aumento progresivo en el número de preguntas contestadas correctamente, con el mayor porcentaje de estudiantes logrando responder correctamente 4 preguntas en comparación con el pretest 20%, posttest 48% y testret 36%, sin embargo, esto muestra que hay dificultad en la retención de esta competencia en el tiempo. En el GE2, se destaca un progreso significativo del porcentaje de estudiantes que

respondieron correctamente 2 y 3 preguntas 33.33% y 41.67% en el test de retención, donde se alcanza el mayor porcentaje en comparación con el postest. Pero el porcentaje de estudiantes que respondieron la totalidad de preguntas en esta competencia no se mantiene a lo largo del tiempo ya que hay una disminución entre el postest y testret que pasan del 41.67 al 20.83%. En el GC1, se evidencia un rendimiento estable en cuanto al porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente 2, y 3 preguntas en esta competencia, además el porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente 4 preguntas disminuye del pretest al postest y luego se mantiene. Por último, en el grupo GC2, se observa un aumento en el porcentaje que respondieron correctamente las preguntas 2 y 4 preguntas. En general, los grupos muestran una tendencia positiva en el incremento de preguntas contestadas correctamente a medida que avanzan en el tiempo de evaluación.

Figura 16

Porcentaje de estudiantes por puntuación en la Resolución de problemas



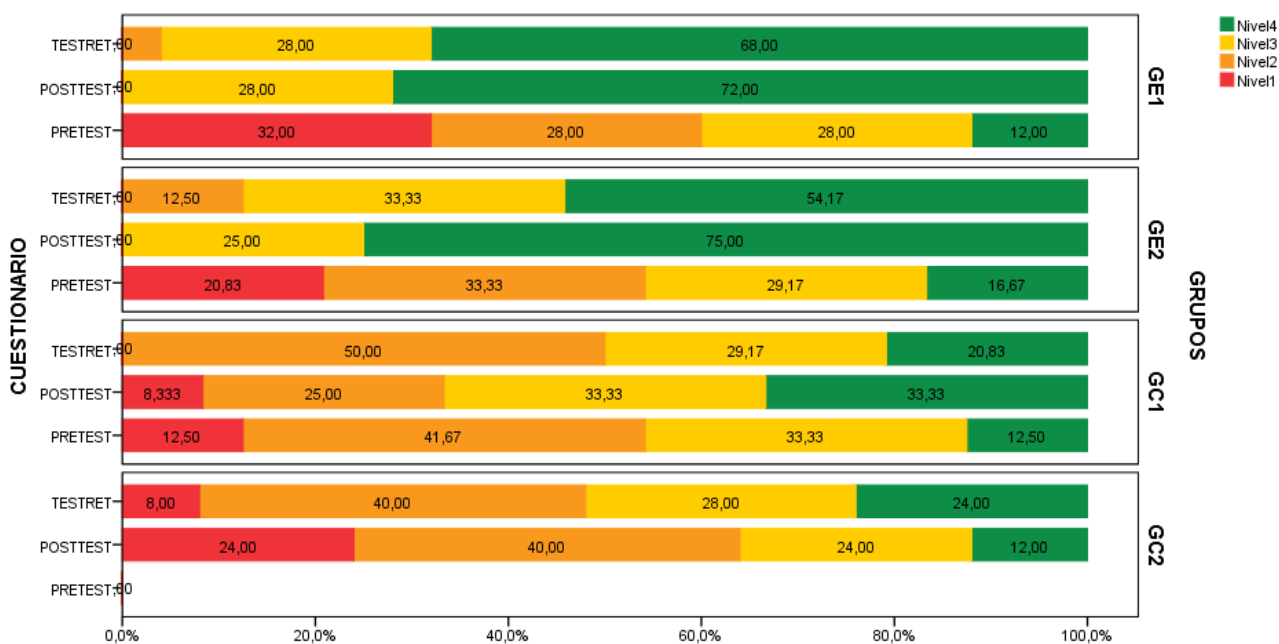
Nota. 0 puntos ■, 1 punto ■, 2 puntos ■, 3 puntos ■, 4 puntos ■.

El análisis de los resultados en la competencia de resolución de problemas (Figura 16) en los diferentes grupos muestra el porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente en número de preguntas a lo largo del tiempo. En el grupo GE1, se observa un aumento progresivo en el porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente, con el mayor rendimiento porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente 3y 4 de pregunta en el posttest, también se evidencia retención en la competencia a lo largo del tiempo ya que hay un aumento en el porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente 4 preguntas entre el posttest y el testret,

pasando de 20% al 40%. En el grupo GE2, se destaca un desempeño favorable en el porcentaje de estudiantes que respondieron 3 y 4 preguntas, pero los niveles de retención a lo largo del tiempo no son sostenidos ya que hay una disminución entre el poste test y el testret en cuanto al porcentaje de estudiantes que respondieron 4 preguntas correctamente. En el grupo GC1, se evidencia una mejora significativa en el porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente 2 y 4 preguntas, Por último, en el grupo GC2, se observa una tendencia positiva en el porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente 3 y 4 preguntas. En general, los grupos muestran un progreso en el rendimiento a medida que aumenta el número de preguntas contestadas correctamente en cada cuestionario.

Figura 17

Comparación de porcentaje de estudiantes según niveles de desempeño en cada cuestionario



Nota. El gráfico muestra la comparación porcentual de los niveles obtenidos por los estudiantes en la aplicación de los cuestionarios.

En la Figura 17, se muestran los resultados obtenidos en cuanto a niveles de desempeño (MEN 2019) alcanzado por los estudiantes en cada uno de los cuestionarios (ver Apéndice D).

Al analizar el número de estudiantes por niveles de desempeño en cada uno de los grupos y cuestionarios realizados, se pueden observar algunas tendencias. En el grupo GE1, en el pretest, se registraron 8 estudiantes en el nivel 1, 7 en el nivel 2, 7 en el nivel 3 y 3 en el nivel 4. En el posttest, ninguno alcanzó el nivel 1 o 2, pero 7 estudiantes lograron el nivel 3 y 18 alcanzaron el nivel 4. En el test de retención, tampoco hubo estudiantes en los niveles 1 y 2, pero 7 se ubicaron en el nivel 3 y 17 en el nivel 4. En el grupo GE2, en el pretest, se observaron 5 estudiantes en el nivel 1, 8 en el nivel 2, 7 en el nivel 3 y 4 en el nivel 4. En el posttest, ninguno alcanzó el nivel 1 o 2, 6 estudiantes lograron el nivel 3 y 18 alcanzaron el nivel 4. En el test de retención, no hubo estudiantes en el nivel 1, 3 se ubicaron en el nivel 2, 8 en el nivel 3 y 13 en el nivel 4. En el grupo GC1, en el pretest, se registraron 3 estudiantes en el nivel 1, 10 en el nivel 2, 8 en el nivel 3 y 3 en el nivel 4. En el posttest, 2 estudiantes alcanzaron el nivel 1, 6 el nivel 2, 8 el nivel 3 y 8 el nivel 4. En el test de retención, ninguno estuvo en el nivel 1, 12 se ubicaron en el nivel 2, 7 en el nivel 3 y 5 en el nivel 4. En el grupo GC2, en el pretest, no hubo estudiantes en ninguno de los niveles. En el posttest, 6 estudiantes alcanzaron el nivel 1, 10 el nivel 2, 6 el nivel 3 y 3 el nivel 4. En el test de retención, 2 estudiantes estuvieron en el nivel 1, 10 en el nivel 2, 7 en el nivel 3 y 6 en el nivel 4.

Al examinar los resultados porcentuales de pretest, se evidenció que los alumnos no lograban comprender el concepto de la derivada, sus propiedades y operaciones, de igual forma se manifestó deficiencia en la descripción de fenómenos en donde se usaban razones de cambio de una variable con relación a otra, así como predecir el comportamiento de una variable analizando la otra. Un alto porcentaje significativo de los estudiantes en cada uno de los cuatro

grupos se ubicaba en los niveles 1 y 2. Estos datos revelaron las deficiencias en los aprendizajes de los estudiantes en un escenario de transmisión del conocimiento, alejado de una perspectiva constructivista

En contraposición a lo mencionado anteriormente, al analizar los resultados del postest, se observó una mejora en los niveles de desempeño de los estudiantes, en especial en los grupos experimentales. Para el GE1 el 4% de los estudiantes se les dificultó retener los procesos de aprendizaje asociados a la noción de la derivada a lo largo del tiempo, de igual forma al 29% del GE2. Los resultados del test de retención evidencian disminución en el nivel 4 para el GC1, y para el GC2 un aumento significativo en este nivel del 12% al 24%. Sin embargo. Esto indica que, si bien hay una mayor comprensión del concepto de la derivada una vez se aplica la estrategia de enseñanza 5E a los grupos experimentales, en los grupos control, donde su escenario de aprendizaje es el convencional, los resultados muestran una estabilidad en los niveles de desempeño lo que podría deberse a las estrategias convencionales de la institución garantizan la estabilidad en los aprendizajes. Estos resultados muestran que la implementación híbrida de ambas estrategias potenciaría los resultados y además garantizaría una estabilidad en ellos a lo largo del tiempo.

Los datos de la Figura 17 revelan diferencias en el desempeño de los estudiantes en cada grupo y cuestionario. Algunos grupos mostraron mejoras significativas, como GE1 y GE2, donde hubo un aumento en el número de estudiantes que alcanzaron el nivel 4 en el postest y el test de retención. Por otro lado, GC1 mostró un aumento en los niveles 1 y 2 en el postest, pero también una disminución en el nivel 4. En el caso de GC2, se observó un progreso en el postest, pero una ligera disminución en el test de retención. También podemos mencionar que la realización del pretest en el GC1 predispuso a que los estudiantes ante una medición posterior por lo que se

evidencia que los resultados en el postest fueron mejores en comparación al GC2 el cual no se le realizó pretest. Pero es de notar que, si bien el GC2 disminuyó estudiantes en su nivel 1 permitiendo así una transición entre niveles y así poder alcanzar mayor porcentaje en el nivel 4, como se mencionó anteriormente.

Verificación de Hipótesis

En esta sección verificaremos la hipótesis a través de una prueba ANOVA para medidas repetidas con un factor intersujeto, que en nuestro caso es la estrategia de aprendizaje basada en el ciclo de enseñanza 5E (factor de estimulación cognitiva) para el ver el efecto de la condición temporal sobre el desempeño de la variable dependiente (Pensamiento numérico variacional asociado a la noción de la derivada) teniendo en cuenta las puntuaciones en cada cuestionario.

Para realizar las comparaciones múltiples post hoc para las medias observacionales se usa la prueba de Tukey para que; en caso de que haya diferencias entre los resultados de cada grupo, determinar entre que niveles hay dichas diferencias. También se usa el ajuste de intervalo de confianza de Bonferroni

Se analizarán los estadísticos descriptivos, los tamaños del efecto que nos dirán que proporción de las diferencias de las variables, en caso de que las haya, son explicadas por nuestras variables independientes. La potencia estadística, que nos habla de la confiabilidad de las medidas, o que no estamos cometiendo un error tipo 2.

La Tabla 17 muestra los estadísticos descriptivos para cada una de las mediciones intrasujetos, para el pretest, postest y test de retención, así como la división de los grupos; GE1, GE2, GC1, GC2. Como se mencionó anteriormente las puntuaciones en los grupos experimental son mayores que en los grupos control en el postest y test de retención.

Tabla 17

Resumen de estadísticos descriptivos para cada una de las pruebas aplicadas y grupos

	Grupos de Estudio	Media	Desviación típica	N
PRETEST	GE1	5,9600	2,24499	25
	GE2	6,2500	2,21163	24
	GC1	6,1667	2,09900	24
	GC2	,0000	,00000	25
	Total	4,5612	3,26514	98
POSTEST	GE1	9,2000	1,38444	25
	GE2	9,6667	1,40393	24
	GC1	7,3333	2,07818	24
	GC2	5,9600	2,05102	25
	Total	8,0306	2,29052	98
TESTRET	GE1	9,2400	1,73877	25
	GE2	8,7083	1,39811	24
	GC1	7,0833	1,52990	24
	GC2	6,7600	1,87705	25
	Total	7,9490	1,93914	98

Miremos que tan significativos son estos datos. Para ello evaluamos el requisito de esfericidad a través de la prueba de Mauchly, la cual se cumple el requisito de esfericidad ya que $p < 0.05$. Además, el valor de épsilon para Greenhouse-Geisser es de 0.705 un valor menor a 0.75, por lo que basaremos nuestros resultados en la prueba de Greenhouse-Geisser. (ver Tabla 18).

Tabla 18*Prueba de esfericidad de Mauchly*

Medida: Puntuación							
Efecto intrasujetos	W de Mauchly	Chi-cuadrado aprox.	gl	Sig.	Épsilon		
					Greenhouse-Geisser	Huynh-Feldt	Límite-inferior
Tiempo	,581	50,432	2	,000	,705	,735	,500
Contrasta la hipótesis nula de que la matriz de covarianza error de las variables dependientes transformadas es proporcional a una matriz identidad.							
a. Diseño: Intersección + GRUPOS Diseño intrasujetos: Tiempo							
b. Puede usarse para corregir los grados de libertad en las pruebas de significación promediadas. Las pruebas corregidas se muestran en la tabla Pruebas de los efectos intersujeto.							

La Tabla 19 de prueba de efectos dentro de sujetos con la corrección Greenhouse-Geisser nos muestra que hay diferencias estadísticamente significativas entre las diferentes puntuaciones del pretest, posttest y test de retención ya que el p valor fue menor a 0.05. Así mismo la prueba de eta parcial al cuadrado, que hace referencia al tamaño del efecto, nos indica que proporción de las diferencias entre los grupos se explica por la variable independiente, es decir, que tanto de esta diferencia que encontramos es debida al paso del tiempo y no a otros factores. Para este caso fue de 0.607, lo que indica que el 60.7% del cambio sobre las puntuaciones en los diferentes cuestionarios es debida a la implementación de la variable independiente. Así mismo, la potencia estadística de 1.00 que la prueba estadística utilizada tiene la capacidad máxima para detectar diferencias o efectos verdaderos en la población de estudio, por lo que existe una alta probabilidad de rechazar la hipótesis nula.

Tabla 19*Prueba de Efectos intrasujetos*

Medida: Puntuación									
Origen		Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.	Eta al cuadrado parcial	Parámetro de no centralidad Parámetro	Potencia observada
Tiempo	Esfericidad asumida	755,262	2	377,631	145,035	,000	,607	290,070	1,000
	Greenhouse-Geisser	755,262	1,410	535,698	145,035	,000	,607	204,480	1,000
	Huynh-Feldt	755,262	1,471	513,560	145,035	,000	,607	213,294	1,000
	Límite-inferior	755,262	1,000	755,262	145,035	,000	,607	145,035	1,000
Tiempo * GRUPOS	Esfericidad asumida	258,175	6	43,029	16,526	,000	,345	99,156	1,000
	Greenhouse-Geisser	258,175	4,230	61,040	16,526	,000	,345	69,898	1,000
	Huynh-Feldt	258,175	4,412	58,518	16,526	,000	,345	72,911	1,000
	Límite-inferior	258,175	3,000	86,058	16,526	,000	,345	49,578	1,000
Error(Tiempo)	Esfericidad asumida	489,499	188	2,604					
	Greenhouse-Geisser	489,499	132,527	3,694					
	Huynh-Feldt	489,499	138,240	3,541					
	Límite-inferior	489,499	94,000	5,207					

a. Calculado con alfa = ,05

Para analizar en donde están estas diferencias analizamos las medidas de Bonferroni, es decir, las medias marginales en la tabla de comparación por parejas.

Tabla 20*Comparación por pares*

Medida: Puntuación						
(I)Tiempo	(J)Tiempo	Diferencia de medias (I-J)	Error típ.	Sig. ^b	Intervalo de confianza al 95 % para la diferencia	
					Límite inferior	Límite superior
1	2	-3,446*	,271	,000	-4,106	-2,786
	3	-3,354*	,259	,000	-3,986	-2,722
2	1	3,446*	,271	,000	2,786	4,106
	3	,092	,138	1,000	-,243	,428
3	1	3,354*	,259	,000	2,722	3,986
	2	-,092	,138	1,000	-,428	,243

Basadas en las medias marginales estimadas.

*. La diferencia de medias es significativa al nivel ,05.

b. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

Nota. 1: Pretest, 2: Postest, 3: Testret

Como notamos en la Tabla 20 la diferencia de medias entre el pretest y postest es negativo -3.446, es decir, que en el postest se obtuvieron puntuaciones más altas. Lo mismo ocurre al comparar las puntuaciones obtenidas en el pretest y test de retención. También al comparar la media de las puntuaciones del postest y test de retención vemos que las medias para el postest son mayores que para el test de retención. El p valor es menor que 0.05 en todos los casos a excepción de los valores para el postest y test de retención. Esto significa que hay diferencias estadísticamente significativas entre las puntuaciones alcanzadas en el pretest y postest, pero no entre el postest y test de retención ya que el valor de p es 1.0; mayor a 0.05.

Por otro lado, de la Tabla 19 observamos que hay interacción entre el tiempo y los grupos ya que el p valor es menor a 0.05. El tamaño del efecto nos muestra que dicha interacción tiene un efecto bajo; 34.5%; en otras palabras, el cambio en la variable de interés a lo largo del tiempo

es similar en todos los grupos. De igual manera, la potencia estadística es alta por lo que la prueba estadística utilizada tiene la capacidad máxima para detectar diferencias en la población de estudio como se mencionó anteriormente.

Tabla 21

Comparaciones múltiples

Medida: Puntuación						
DHS de Tukey						
(I) Grupos de Estudio	(J) Grupos de Estudio	Diferencia de medias (I-J)	Error típ.	Sig.	Intervalo de confianza 95%	
					Límite inferior	Límite superior
GE1	GE2	-,0750	,33729	,996	-,9572	,8072
	GC1	1,2722*	,33729	,002	,3900	2,1544
	GC2	3,8933*	,33383	,000	3,0202	4,7665
GE2	GE1	,0750	,33729	,996	-,8072	,9572
	GC1	1,3472*	,34071	,001	,4561	2,2384
	GC2	3,9683*	,33729	,000	3,0861	4,8505
GC1	GE1	-1,2722*	,33729	,002	-2,1544	-,3900
	GE2	-1,3472*	,34071	,001	-2,2384	-,4561
	GC2	2,6211*	,33729	,000	1,7389	3,5033
GC2	GE1	-3,8933*	,33383	,000	-4,7665	-3,0202
	GE2	-3,9683*	,33729	,000	-4,8505	-3,0861
	GC1	-2,6211*	,33729	,000	-3,5033	-1,7389

Basadas en las medias observadas.
El término de error es la media cuadrática (Error) = 1,393.

*. La diferencia de medias es significativa al nivel ,05.

La Tabla 21 muestra los resultados de la prueba de comparaciones múltiples de Tukey, que compara las diferencias de medias entre los grupos de estudio (GE1, GE2, GC1 y GC2). En general, se observa que las diferencias de medias entre los grupos son significativas, como se indica con el asterisco (*) en las celdas correspondientes. Al analizar las diferencias entre los grupos, se puede observar lo siguiente:

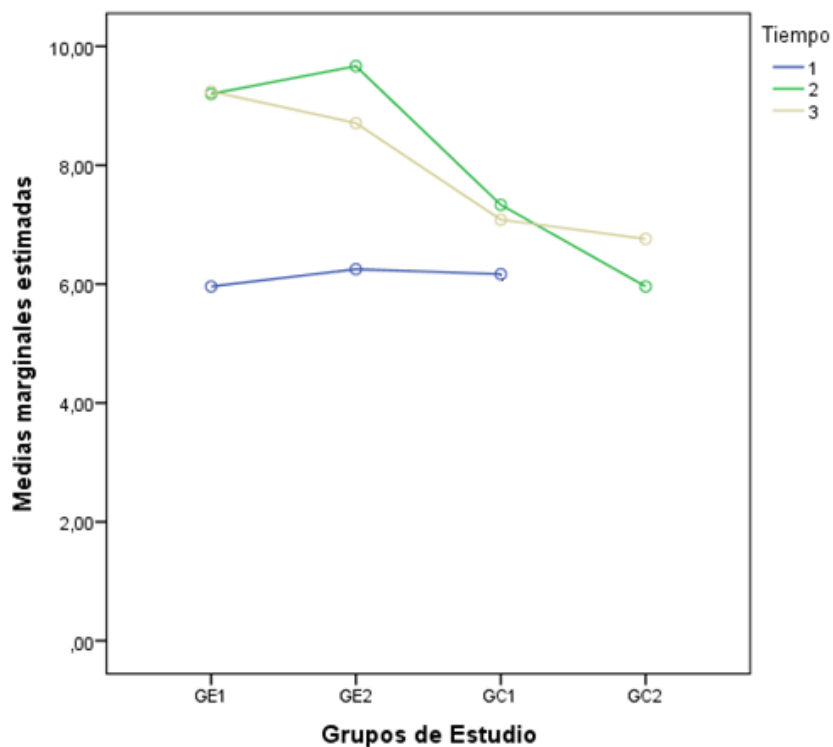
Entre GE1 y GE2 no se encontró una diferencia significativa en las puntuaciones. Entre GE1 y GC1, la diferencia de medias es de 1.2722 y es significativa. Las puntuaciones de GE1 son más altas que las de GC1. Entre GE1 y GC2, la diferencia de medias es de 3.8933 y es significativa. Las puntuaciones de GE1 son considerablemente más altas que las de GC2. Entre GE2 y GC1, la diferencia de medias es de 1.3472 y es significativa. Las puntuaciones de GE2 son más altas que las de GC1. Entre GE2 y GC2, la diferencia de medias es de 3.9683 y es significativa. Las puntuaciones de GE2 son considerablemente más altas que las de GC2. Entre GC1 y GC2, la diferencia de medias es de 2.6211 y es significativa. Las puntuaciones de GC1 son más altas que las de GC2.

Estos resultados evidencian que la estrategia basada en la indagación ciclo de enseñanza 5E tiene efectos positivos en el rendimiento de los estudiantes y por ende en el pensamiento numérico variacional asociado a la noción de la derivada, ya que los grupos que utilizaron esta estrategia (GE1 y GE2) obtuvieron puntuaciones más altas en comparación con los grupos de estudio GC1 y GC2.

El gráfico de interacción de hecho, Figura 18, nos muestra que la estrategia de indagación basada en el ciclo de enseñanza 5E tuvo un mayor efecto sobre los grupos experimentales, en especial para el posttest. Solamente para el caso del test de retención se obtuvo mayores puntuaciones en el GC2 en el test de retención en comparación con el posttest.

Figura 18

Medias marginales estimadas de Puntuación



Nota. 1 pretest, 2 postest, 3, testret.

Discusión de los Resultados

Encontramos diferencias estadísticamente significativas entre las medidas del pretest, postest y test de retención con un efecto grande $F(1.41)=145.04$, $p<.001$, $\eta^2 =.607$, $\beta-1=1$. Así mismo las puntuaciones para el pretest para cada grupo GE1(M=5.96, DE=2.24); GE2(M=6.25, DE=2.21); GC1(M=6.16, DE=2.10) fueron menores a las puntuaciones para para el postest; GE1(M=9.20, DE=1.38); GE2(M=9.67, DE=1.40); GC1(M=7.33, DE=2.08), con $p<.001$ en todos los casos con sus respectivos intervalos de confianza. (Ver Tabla 19)

Por otro lado, las puntuaciones para el postest para cada grupo GE1(M=9.20, DE=1.38); GE2(M=9.67, DE=1.40); GC1(M=7.33, DE=2.08); GC2(M=5.96, DE=2.05) fueron similares las puntuaciones para para el test de retención; GE1(M=9.24, DE=1.73); GE2(M=8.71, DE=1.40);

GC1(M=7.08, DE=1.52); GC2(M=6.76, DE=1.88), $p > .001$ en todos los casos con sus respectivos intervalos de confianza. (Ver Tabla 19).

Basado en los resultados obtenidos en el estudio, se rechaza la hipótesis nula (H_0) que planteaba que no existen diferencias significativas en los niveles del pensamiento numérico variacional en estudiantes de grado 11° en la asignatura de Análisis y Cálculo, que hicieron uso de la metodología de Aprendizaje Basado en la indagación (ciclo de enseñanza de las 5 E). Los datos recolectados y el análisis estadístico indicaron de manera concluyente que existe evidencia estadística para respaldar la hipótesis alternativa (H_1), la cual afirmaba que sí hay diferencias significativas en los niveles del pensamiento numérico variacional en los estudiantes que aplicaron la metodología mencionada. Estos resultados sugieren que la metodología de Aprendizaje Basado en la indagación tiene un impacto positivo en el desarrollo del pensamiento numérico variacional en los estudiantes de grado 11° en la asignatura de Análisis y Cálculo.

Los resultados obtenidos en este estudio indican la presencia de diferencias estadísticamente significativas entre las medidas del pretest, postest y test de retención. Estas diferencias fueron altamente significativas, con un efecto grande, lo que sugiere un impacto significativo de la intervención o tratamiento aplicado en el aprendizaje de los participantes. La variabilidad explicada por el tratamiento fue de 60.7%, lo que indica una influencia importante en las puntuaciones obtenidas en las diferentes etapas de evaluación.

En cuanto a las puntuaciones del pretest, se observó que los grupos GE1, GE2 y GC1 obtuvieron puntuaciones menores en comparación con las puntuaciones del postest. Esto sugiere que, después de la intervención, hubo un aumento significativo en el nivel de conocimiento o habilidades evaluadas en estos grupos. Estas diferencias fueron altamente significativas, con un valor de $p < 0.001$ en todos los casos.

Por otro lado, las puntuaciones obtenidas en el postest y test de retención no mostraron diferencias significativas entre los grupos. Esto indica que, después de la intervención, los participantes mantuvieron los niveles de conocimiento adquiridos a lo largo del tiempo, ya que no se observaron diferencias estadísticamente significativas en el test de retención en comparación con el postest. Estas similitudes en las puntuaciones fueron consistentes en todos los grupos y se encontraron p-valores mayores a 0.001.

Estos hallazgos sugieren que la intervención implementada tuvo un efecto positivo en el aprendizaje de los participantes, ya que se observó un aumento significativo en las puntuaciones del postest en comparación con el pretest. Además, la retención de los conocimientos adquiridos se mantuvo en el tiempo, ya que no se encontraron diferencias significativas entre el postest y el test de retención.

Estos resultados respaldan la efectividad de la intervención en el desarrollo de las habilidades evaluadas y sugieren que la estrategia utilizada podría ser beneficiosa para mejorar el aprendizaje en el contexto estudiado. Sin embargo, es importante considerar las limitaciones del estudio, como el tamaño de la muestra y el contexto específico en el que se llevó a cabo la investigación. Se recomienda realizar más estudios para confirmar y ampliar estos hallazgos en diferentes poblaciones y contextos educativos.

Conclusiones y Recomendaciones

En este capítulo, presentaremos las conclusiones y recomendaciones derivadas del estudio realizado, las cuales están respaldadas por el proceso de análisis y reflexión sobre los hallazgos del estudio. Asimismo, las recomendaciones ofrecidas están diseñadas para brindar orientación práctica a los responsables de la toma de decisiones y a aquellos interesados en mejorar en el área de estudio. Es importante destacar que estas conclusiones y recomendaciones se basan en la información disponible y pueden requerir actualizaciones periódicas a medida que surja nueva información y avances en el tema. Las siguientes son las conclusiones encontradas:

1. La implementación de estrategias de aprendizaje basadas en la indagación permite estructurar de manera clara actividades contextualizadas, alineadas a las necesidades de los estudiantes, donde cada etapa proporciona: motivación, interés, aprendizaje autónomo, investigación, transferencia de conocimiento, y la comprensión profunda de los contenidos y la capacidad de aplicar lo aprendido.
2. Dada la efectividad de la estrategia de aprendizaje basada de indagación, el diseño de un ambiente de aprendizaje diferente al tradicional tiene incidencia en la adquisición y retención de conocimientos por parte de los estudiantes.
3. Los resultados del estudio respaldan de manera contundente la eficacia de la metodología de Aprendizaje Basado en la indagación (ciclo de enseñanza de las 5 E) en el desarrollo del pensamiento numérico variacional. La evidencia estadística obtenida ha permitido rechazar la hipótesis nula y respaldar la hipótesis alternativa planteada, lo que indica que existen diferencias significativas en los niveles de pensamiento numérico variacional entre los estudiantes que utilizaron esta metodología.

Este hallazgo es de gran relevancia, ya que demuestran que el enfoque constructivista y la participación de los estudiantes a través de las etapas de Engage, Explore, Explain, Elaborate y Evaluate contribuyen de manera positiva al desarrollo de habilidades cognitivas superiores en el ámbito numérico. Los estudiantes que experimentaron esta metodología mostraron una mayor capacidad para comprender y manipular conceptos numéricos de manera variacional, lo que implica una comprensión más profunda y un mejor dominio.

4. No se encontraron diferencias significativas en las puntuaciones del posttest y del test de retención entre los grupos. Por lo que los estudiantes fueron capaces de mantener los niveles de conocimiento adquiridos a lo largo del tiempo, lo cual es un resultado positivo.
5. El estudio revela un aumento significativo en las puntuaciones del posttest en comparación con las puntuaciones del pretest en los grupos GE1 y GE2. Estas diferencias fueron altamente significativas, lo que indica que la intervención implementada tuvo un impacto positivo en el nivel de conocimiento o habilidades evaluadas en estos grupos.
Hallazgos que respaldan la efectividad de la intervención en el mejoramiento del aprendizaje.
6. A pesar de que las puntuaciones de la media entre el posttest y test de retención es levemente menor, estadísticamente no mostraron diferencias significativas entre los grupos. Esto indica que, después de la intervención, los participantes mantuvieron los niveles de conocimiento adquiridos a lo largo del tiempo.
7. La inclusión de la competencia de indagación como una de las competencias propias en el área de Matemáticas garantiza, no sólo la apropiación conceptual sino también la retención de conocimiento a lo largo del tiempo.

Basándonos en los resultados obtenidos y las conclusiones alcanzadas en este estudio, se presentan las siguientes recomendaciones para futuras investigaciones y acciones dentro del mismo campo investigativo:

1. Realizar investigaciones adicionales para explorar en mayor profundidad los efectos a largo plazo de la estrategia de aprendizaje basada en la indagación en el pensamiento numérico variacional y la comprensión de la derivada. Esto puede implicar un seguimiento a largo plazo de los estudiantes que han sido expuestos a esta estrategia para evaluar su desempeño posterior y su capacidad para aplicar los conceptos aprendidos en contextos más avanzados.
2. Investigar la transferencia de los conocimientos adquiridos mediante la estrategia de aprendizaje basada en la indagación a otras áreas de las matemáticas y a situaciones del mundo real. Esto permitiría evaluar si los estudiantes son capaces de aplicar los conceptos y habilidades desarrollados en el estudio, en contextos más amplios y complejos.
3. Explorar el impacto de la estrategia de aprendizaje basada en la indagación en diferentes grupos de estudiantes, considerando variables como el nivel académico, el género, el contexto socioeconómico y el interés por las matemáticas. Esto permitiría analizar posibles diferencias en los resultados y adaptar la implementación de la estrategia a las necesidades específicas de cada grupo.
4. Evaluar el impacto de la estrategia de aprendizaje basada en la indagación en la motivación y la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas. Esto permitiría analizar cómo esta metodología puede influir en el interés y la percepción de los estudiantes hacia

la asignatura, lo cual puede tener implicaciones importantes en su rendimiento y desarrollo académico.

5. Realizar investigaciones comparativas entre la estrategia de aprendizaje basada en la indagación y otras metodologías utilizadas en la enseñanza de las matemáticas, para analizar sus fortalezas y debilidades en términos de promover el pensamiento numérico variacional y la comprensión de la derivada. Esto proporcionaría una visión más amplia de las diferentes opciones pedagógicas disponibles y sus respectivos impactos.
6. Incluir análisis cualitativos en cuanto a la percepción de los estudiantes frente a nuevas estrategia de aprendizaje, así como análisis procedimental y verificación de conocimiento de manera escrita, para poder realizar triangulación de datos numéricos y cualitativos y así eliminar el sesgo en la memoria de las respuestas del posttest.

Referencias

- Alomá Bello, M., Crespo Díaz, L., González Hernández, K., & Estévez Pérez, N. (23 de Septiembre de 2022). Fundamentos cognitivos y pedagógicos del aprendizaje activo. *Mendive. Revista de Educación*, 20(4), 1353-1368.
http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-76962022000401353&lng=es&tlng=es.
- Aramendi Jauregui, P., Arburua Goienetxe, R. M., & Buján Vidales, K. (2018). El aprendizaje basado en la indagación en la enseñanza secundaria. *Revista de investigación Educativa*, 36(1), 109-124. <https://doi.org/https://doi.org/10.6018/rie.36.1.278991>
- Atkin, J. M., & Karplus, R. (1962). Discovery or Invention? *National Science Teachers Association*, 29(5), 45-49. <https://www.jstor.org/stable/24146536>
- Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (2 ed.). México: Trillas.
- Badillo Jiménez, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia: "la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física"*. Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Barcelona. <http://hdl.handle.net/10803/4702>
- Barrientos, P. A. (2014). *Libro-Taller para la enseñanza del concepto de derivada en el grado 11° (un enfoque geométrico)*. Bogotá. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21646>
- Búa, M. T. (Abril de 2014). *Electricidad*.
https://www.edu.xunta.gal/centros/iesblancoamorculledo/aulavirtual/pluginfile.php/20814/mod_resource/content/0/10_paquetes/Paquetes_web/6_enectricidad/index.html

- Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A., & Landes, N. (2006). *The BSCS 5E Instructional Model: Origins and Effectiveness*. Colorado Springs: BSCS. https://media.bsccs.org/bsccsmw/5es/bsccs_5e_full_report.pdf
- Camacho Oviedo, M. (2012). Estrategias para promover la indagación y el razonamiento lógico en la educación primaria desde la didáctica de la Matemática. *Revista Electrónica Educare*, 16(2), 95-111. <https://www.redalyc.org/pdf/1941/194124286007.pdf>
- Camacho, H., Casilla, D., & Finol de Franco, M. (2008). La Indagación: Una estrategia innovadora para el aprendizaje de procesos de investigación. *Revista de Educación Laurus*, 14(28), 284-306. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=76111491014>
- Carbajal, J. &. (2016). *Análisis de los conocimientos previos de los estudiantes de bachillerato sobre el concepto de derivada*. (Vol. 47). Revista Iberoamericana de Educación Matemática.
- Comisión Europea. (2006). *Competencias claves para el aprendizaje permanente*. Luxemburgo: Oficina de publicaciones de las comunidades Europeas. <https://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:es:PDF>
- Congreso de la República de Colombia. (1994). *Ley N° 115*. Santa Fe de Bogotá, Colombia. http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf.
- Duran, M., & Dökme, İ. (22 de July de 2016). The Effect Of The Inquiry-Based Learning Approach On Student's Critical Thinking Skills. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(12), 2887-2908. <https://doi.org/https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.02311a>
- García García, F. J., Quesada Armenteros, A., Romero Ariza, M., & Abril Gallego, A. (2019). Promover la indagación en matemáticas y ciencias: desarrollo profesional docente en

- primaria y secundaria. *Educación XXI*, 22(2), 335-359.
<https://doi.org/10.5944/educXXI.23513>
- Geddis, N. M., & Yeany, M. H. (2002). The Impact of Inquiry-Based Science Curriculum on Student Motivation in a Seventh-Grade Life Science Class. *Journal of Science Education and Technology*.
- González, A., & Díaz, A. M. (2018). *Formación docente y desarrollo profesional situado para la enseñanza del Lenguaje y Matemáticas en Colombia*. Politecnico Gran Colombiano . Colombia: Panorama. <https://www.redalyc.org/journal/3439/343968243002/>
- González, M. (2015). *Creencias y Concepciones de los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza- aprendizaje*. Tesis de Maestría, Ciencias Sociales, Univerisdad De Huelva.
- Guillén Guerrero, M. G. (2016). *Del paradigma de la enseñanza al paradigma del aprendizaje: un programa de capacitación docente, su influencia en los profesores y en el aprendizaje de los estudiantes de la Universidad del Azuay (Cuenca, Ecuador)*. Valencia.
<https://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/57088/Tesis%20completa%20Gabriela%20Guill%C3%A9n%20202.pdf?sequence=1>
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). México D.F: McGraw-Hill. <https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf>
- Hernández, F. (2004). Los Fines de la Educación. Invitación a conocer la filosofía de Alfred North Whitehead. *Revista Digital Universitaria*, 5(1), 6-10.
https://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art5/ene_art5.pdf

- ICFES. (2014). *Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal*. Bogotá D.C: MEN.
https://www.atlantico.gov.co/images/stories/adjuntos/educacion/lineamientos_muestral_censal_saber359_2014.pdf
- ICFES. (2020). *Informe Nacional de Resultados para Colombia - PISA 2018*. Bogotá D.C.
https://www.icfes.gov.co/documents/39286/1125661/Informe_nacional_resultados_PISA_2018
- Icfes. (2022). *Guía de orientación Saber 11.º 2023-1*. Bogotá.
https://www2.icfes.gov.co/documents/39286/2507397/Guía+de+orientación+Saber+11.º+2023-1_v3.pdf
- Irma, R. S., & Yoshisuke, K. (2011). Inquiry Based Learning Implementation In Indonesia: What Is The Impact To Middle School Student's Achivement in Physics? *Federal Science Library*, 26(8), 19-22.
- Lee, R. E. (2012). Inquiry-based learning and problem-based learning in engineering education.
- Mauricio Batista Ballén, F. L. (2011). *Hipertexto Física 1*. Bogotá: Santillana.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares en Ciencias Naturales y Educación Ambiental*. Bogotá. https://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf5.pdf
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá. https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá.
- MEN. (2017). *Mallas de aprendizaje. Documento para la implementación de los DBA*. Bogotá.
- MEN. (2019). *Marco de referencia para la evaluación, ICFES*. Bogotá.

- Muñoz Muñoz, F. L., Bravo Montenegro, M. J., & Blanco Álvarez, H. (2015). *Estudio sobre los Factores que Influyen en la Pérdida de Interés Hacia las Matemáticas*. Universidad del Atlántico, Atlántico. Barranquilla: Revista Amauta.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5440957>
- Ortiz Revilla, J., & Greca, I. (2017). Diseño, aplicación y evaluación de una propuesta de enseñanza de electricidad y magnetismo mediante indagación para la escuela primaria. *Revista de Enseñanza de la Física*, 29(1), 25-39.
- Oxford University Press. (2007). *The Calculus Controversy: A Historical and Mathematical Investigation*. Oxford.
- Pimienta, J., & Enríquez, A. (2009). *Educación basada en competencias. Guía para la aplicación del enfoque*. México: Pearson.
- Pineda Ruiz, C. E. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria*. Bogotá. D.C.
<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/75064/01186769.2013.pdf?sequence=1>
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.
- Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.
- Pulido, J. P. (2022). Anova de medidas repetidas con factor intersujeto en SPSS.
https://www.youtube.com/watch?v=xNXt7x_aLBY
- Qutián Galvis, M. (2018). *Fortalecimiento del componente numérico-variacional a través de la resolución de problemas en grado tercero*. Trabajo de grado- Maestría, Universidad

- Externado de Colombia, Bogotá D.C.
<https://doi.org/https://doi.org/10.57998/bdigital.handle.001.1146>
- Ramos, E., Flóres, P., & Da Ponte, J. (2015). *Desarrollo profesional del docente de matemáticas a través de sus tareas para el aula propuestas en un curso de formación*. Bolema.
- Rodríguez Arocho, W. C. (1999). El legado de Vygotski y de Piaget a la educación. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 31(3), 477-489.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=80531304>
- Russo, M. (2011). Development of a Multidisciplinary Middle School Mathematics Infusion Model. *Middle Grades Research Journal*, 6(2), 113-128.
<https://eric.ed.gov/?id=EJ947804>
- Rutherford, F. J. (1964). The role of inquiry in science teaching. *Journal of Research in Science Teaching*, 2, 80-84.
- Sastry, S. S. (s.f.). *The Newton-Leibniz controversy over the invention of the calculus*.
<https://pages.cs.wisc.edu/~sastry/hs323/calculus.pdf>
- Savater, F. (1997). *“El valor de educar”*. México: Instituto de Estudios Educativos y Sindicales.
- Schwartz, R., Lederman, N., & Crawford, B. (2004). Developing views of nature of science in an authentic context: An explicit approach to bridging the gap between nature of science and scientific inquiry. *Science Education*, 88, 610-645.
- Şenyiğit, Ç., Önder, F., & Silay, İ. (2021). An Inquiry-Based Learning Approach for Effective Concept Teaching. *i.e.: inquiry in education*, 13(1), Art 10. <https://digitalcommons.nl.edu/ie/vol13/iss1/10/>
- Silva, P. C. (2005). *Física 1*. Bogotá: Norma.
- Stewart, J. (2015). *Cálculo: Trascendentes tempranas (8a edición)*. Cengage Learning.

- Suavita Ramírez, M. A., & Gómez Esquinas, M. I. (2016). *Metodologías ensoñadas Vs. Metodologías implementadas. Un estudio sobre los imaginarios de los docentes hacia la enseñanza de las matemáticas*. Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid. Madrid: Libro de Actas del XVI Congreso Nacional y VII Congreso Iberoamericano. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6404998>
- Tobón Jiménez, O. (2014). *Propuesta Metodológica de enseñanza y aprendizaje para desarrollar la competencia de indagación en óptica geométrica con aplicación pedagógica de TIC en la Institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Sede Medellín, Antioquia, Medellín. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/44239>
- Tobón, S., Pimienta, J., & García, J. (2010). *Bases teóricas y filosóficas de la formación de las competencias. Secuencias Didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. México: PEARSON EDUCACIÓN . <http://alejandria.ufps.edu.co/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=18238>
- Torres Mesías, Á., Mora Guerrero, E., Garzón Velásquez, F., & Ceballos Botina, N. E. (2013). Desarrollo de competencias científicas a través de la aplicación de estrategias didácticas alternativas. Un enfoque a través de la enseñanza de las ciencias naturales. *Revista de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas*, XIV(1), 187-215. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4453237>
- UNESCO. (2019). *El estudio ERCE 2019 y los niveles de aprendizaje en Ciencias*. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000382746>
- Valbuena, H. M., & Suárez Ruíz, D. d. (2021). *Física I*. Bogotá: Norma.
- Valero, M. (1995). *Física fundamental I*. Bogotá: Norma.

Vinner, S. (1991). *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*.

https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Wagnet, T. (2010). *Overcoming The Global Achievement Gap*. *Universidad de Harvard*.

Wieman, C. (2002). *Phet* . Simulaciones interactivas de ciencias y matemáticas:

<https://phet.colorado.edu/es/>

Wilhelm , P., & Beishuizen, J. J. (2003). Efectos de contenido en el aprendizaje inductivo

autodirigido. *Aprendizaje e Instrucción*. (13), 381-402. <https://doi.org/10.1016/S0959->

[4752\(02\)00013-0](https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00013-0)

Apéndice A Pretest



COLEGIO LA SALLE MONTERIA PRE-TEST

NOMBRE: _____

1. La tabla presenta la información sobre la posición y el tiempo de un automóvil cuando atraviesa 3 sensores.

Sensor	Tiempo t (s)	Posición X (m)
1	200	8.000
2	280	10.400
3	250	9.500

Tabla

La función que representa la posición del automóvil X , en metros, en función del tiempo t , es

- A. $X(m) = 40 t$
 B. $X(m) = 30 t + 2.000$
 C. $X(m) = 10 t$
 D. $X(m) = 40 t - 800$

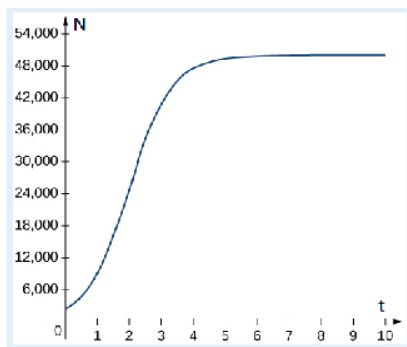
2. La función potencia está definida por la expresión general $f(t) = a t^n$. La derivada de dicha función resulta de Multiplicar el exponente n por la base t elevada al exponente menos 1, es decir:

$$f'(t) = a n t^{n-1}.$$

Por ejemplo: Si $f(t) = 2 t^5$ entonces su derivada es $f'(t) = 2 \cdot 5 t^{5-1} = 10 t^4$. Teniendo en cuenta lo anterior ¿Cuál es la derivada de

$$f(t) = 3 t^{-2} ?$$

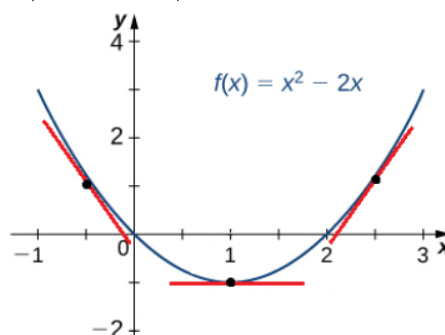
- A. $f'(t) = -6 t^{-3}$
 B. $f'(t) = 1 t^{-1}$
 C. $f'(t) = 6 t^3$
 D. $f'(t) = -1 t^1$
3. La siguiente gráfica modela el número de personas $N(t)$ que han contraído una gripe t semanas después de su brote inicial en una ciudad con una población de 50.000 habitantes.



De la anterior gráfica podemos inferir que:

- A. La velocidad de contagio crece exponencialmente hasta la semana 10
 B. La tasa de contagio aumenta bruscamente hasta la tercera semana, momento en el que se ralentiza y luego se vuelve constante
 C. La velocidad a la que se contagian las personas decrece considerablemente al transcurrir las semanas
 D. La velocidad a la que la cantidad de personas ha contraído la gripe se mantiene constante al transcurrir las semanas

4. La siguiente gráfica representa una función cuadrática y en ella están tres rectas tangentes a la gráfica en un punto. Si la **pendiente de la recta tangente** a una curva en un punto es igual a la derivada de la función en dicho punto. Se puede afirmar que la derivada en $x=1$ es:



- A. Cero porque la recta tangente no tiene inclinación
 B. Positiva debido a que el valor de x es positivo
 C. Negativa porque en $x=1$ la gráfica tiene un vértice
 D. No se puede determinar ya que la función es cuadrática

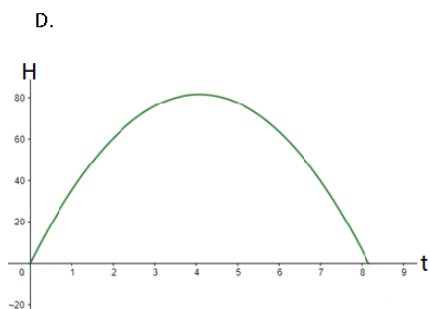
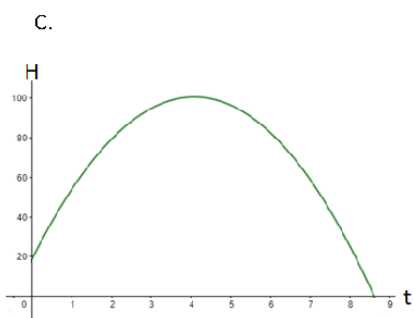
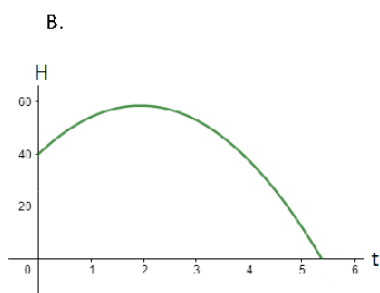
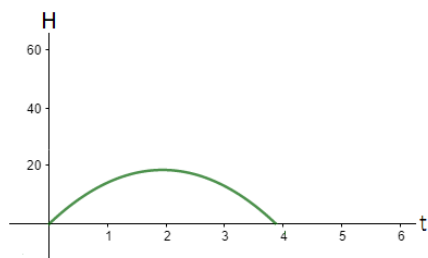
RESPONDA LAS PREGUNTAS 5 A 8 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Desde la terraza de un edificio con una altura (h_0) de 40 metros, se lanza un balón verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial (V_0) de 19m/s. La altura H que alcanza el balón en un tiempo t (en segundos) se puede calcular con la expresión. $H = -4,9t^2 + V_0 t + h_0$

5. Teniendo en cuenta que la altura H está medida en metros y tiempo en segundos ¿Cuáles son las unidades del valor $-4,9$?

- A. m/s^2 B. m/s C. m D. $m s^2$

6. La gráfica que mejor representa la situación es



7. La función potencia está definida por la expresión general $f(t) = a t^n$. La derivada de dicha función resulta de Multiplicar el exponente n por la base t elevada al exponente menos 1, es decir:

$$f'(t) = a n t^{n-1}$$

Si la derivada de la función $H = -4,9t^2 + V_0 t + h_0$ representa la velocidad se puede afirmar que la velocidad:

- A. Es una función cuadrática decreciente
B. Es una función lineal creciente
C. Es una función constante
D. Es una función lineal decreciente

8. El valor de h_0 en la ecuación $H = -4,9t^2 + V_0 t + h_0$ indica lo siguiente

- A. El tiempo que tarda el balón en el aire
B. El balón es lanzado con una velocidad positiva
C. La altura máxima alcanzada por el balón
D. El balón es lanzado desde una altura diferente de cero

9. Si se sabe que la mejor forma para que un satélite de señal televisa lleve su señal a todo el territorio de un país es que se mueva según la función

$$x = 2(-t^2 + 10),$$

donde t es el tiempo en órbita y x es la distancia respecto a la línea del ecuador, y los valores negativos de x representan distancias hacia el sur y los valores positivos de x representan distancias hacia el norte, ¿cuál es la distancia máxima hacia el norte a la que estará el satélite de la línea del ecuador?

- A. -10
B. -20
C. 20
D. 10

10. Unos estudiantes determinan que para obtener la velocidad instantánea de un auto se requiere tomar datos de la posición en intervalos de tiempo pequeño. De acuerdo con la información anterior, ¿cuál de las siguientes tablas reúne la información que requieren los estudiantes?

A.

T(s)	1	1.5	2	2.5
X(m)	3	5.25	8	11.25

B.

T(s)	1	2	3	4
X(m)	3	8	15	24

C.

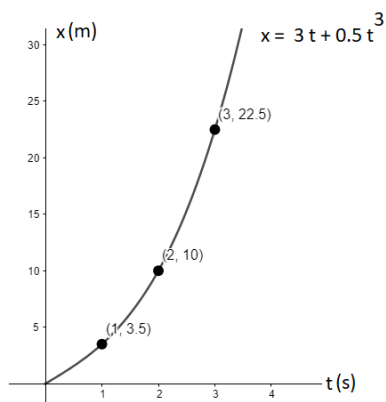
T(s)	1	1.01	1.02	1.03
X(m)	3	3.0401	3.0804	3.1209

D.

T(s)	1	1.1	1.2	1.3
X(m)	3	3.41	3.84	4.29

RESPONDA LAS PREGUNTAS 11 A 12 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

La posición de una automovil está dada por
 $x = 3t + 0.5t^3$



Si la velocidad media es la razón entre el desplazamiento y el tiempo transcurrido $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

11. La velocidad media entre 1 s y 3 s es
- 9.5 m/s
 - 6.5 m/s
 - 12.5 m/s
 - 9.0 m/s
12. La velocidad instantánea es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, entonces la velocidad instantánea en 2 s es
- 9.5 m/s
 - 6.5 m/s
 - 9.0 m/s
 - 12.5 m/s

Apéndice B Postest



COLEGIO LA SALLE MONTERIA POST-TEST

NOMBRE: _____

1. La tabla presenta la información sobre la posición y el tiempo de un automóvil cuando atraviesa 3 sensores.

Tiempo t (s)	Posición X (m)
0	3.000
80	1.400
120	600

Tabla

La función que representa la posición del automóvil X , en metros, en función del tiempo t , es

- A. $X(t) = 20t + 3.000$
 B. $X(t) = -5t$
 C. $X(t) = 3.000 - 20t$
 D. $X(t) = 30t$

2. La función potencia está definida por la expresión general $f(t) = a t^n$. La derivada de dicha función resulta de Multiplicar el exponente n por la base t elevada al exponente menos 1, es decir:

$$f'(t) = a n t^{n-1}.$$

Por ejemplo: Si $f(t) = 6 t^3 + 2 t + 5$ entonces su derivada es

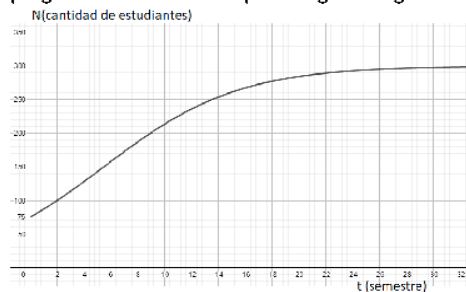
$$f'(t) = 6 \cdot 3 t^{3-1} + 2 \cdot 1 t^{1-1} + 0$$

$f'(t) = 18 t^2 + 2 t^0 = 18 t^2 + 2$. Teniendo en cuenta lo anterior ¿Cuál es la derivada de

$$f(t) = 5 t^2 + 3 t - 2 ?$$

- A. $f'(t) = 10 t + 3$
 B. $f'(t) = 7 t + 3$
 C. $f'(t) = 10 t^2 - 1 t$
 D. $f'(t) = 10 t^2 + 3 t$

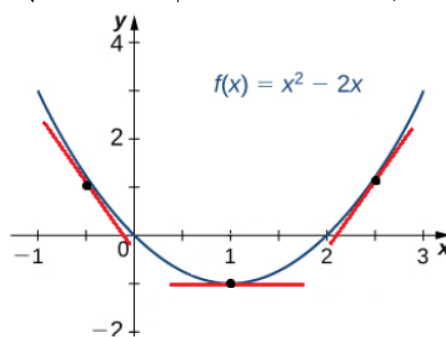
3. Las estadísticas de la facultad de medicina de una Universidad muestran que a partir del año 2019 la población de estudiantes admitidos a iniciar el pregrado está modelada por la siguiente gráfica



Si t es el número de semestres transcurridos a partir de la fecha. De la gráfica es incorrecto afirmar:

- A. El número de personas admitidas en enero de 2019 es 75
 B. A partir del año 2027 la tasa de cambio de los estudiantes admitidos es máxima
 C. Entre los años 2019 y 2021 la tasa de cambio de la población de admitidos es creciente
 D. A comienzos del 2020, al programa de Medicina fueron admitidos aproximadamente 100 estudiantes

4. La siguiente gráfica representa una función cuadrática y en ella están tres rectas tangentes a la gráfica en un punto. Si la **pendiente de la recta tangente** a una curva en un punto es igual a la derivada de la función en dicho punto. Se puede afirmar que la derivada en $x = -1/2$ es:



- A. Cero porque la recta tangente no tiene inclinación
 B. Negativa porque en $x = -1/2$ la recta es decreciente
 C. Cero porque la recta tangente está a la izquierda
 D. Positiva debido a que está por encima del eje x

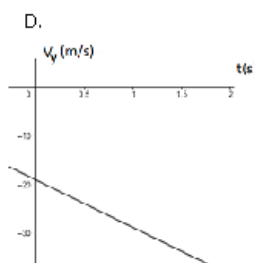
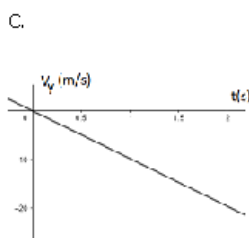
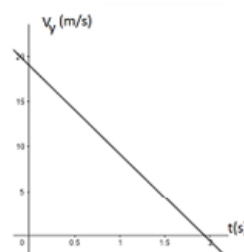
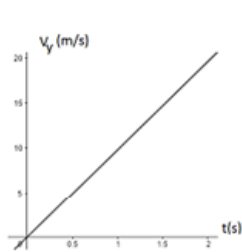
RESPONDA LAS PREGUNTAS 5 A 8 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Desde la terraza de un edificio con una altura (h_0) de 40 metros, se lanza un balón verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial (V_0) de 19m/s. La velocidad que alcanza el balón en un tiempo t (en segundos) se determina por la expresión $V_y = -9,8t + V_0$.

5. Teniendo en cuenta que la velocidad V_y está medida en metros por segundo y tiempo en segundos ¿Cuáles son las unidades del valor $-9,8$?

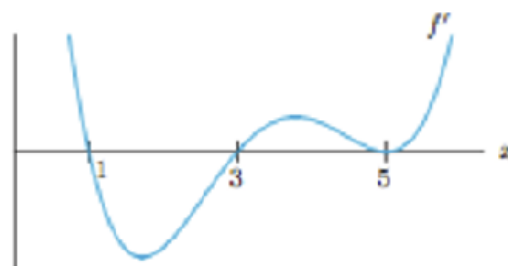
- A. m/s^2 B. m/s C. m D. m/s^2

6. La derivada de la expresión $Vy = -9,8t + Vo$ representa
- Rapidez inicial
 - Altura inicial
 - Aceleración
 - Altura máxima
7. La gráfica de la expresión $Vy = -9,8t + Vo$ es
- -



8. El valor de la derivada de la expresión $Vy = -9,8t + Vo$ en $t=1$ segundo es
- $11,14 \text{ m/s}^2$
 - $-9,8 \text{ m/s}^2$
 - $-10,3 \text{ m/s}^2$
 - $28,8 \text{ m/s}^2$
9. La derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Los puntos de la función en los cuales la derivada es cero se conocen como puntos críticos. Estos puntos críticos pueden ser máximos o mínimos, dependiendo del valor de la derivada. Si el valor en la derivada cambia de un valor positivo a negativo, se tiene un máximo. Si ocurre lo contrario, es decir, el valor de la derivada cambia de negativo a positivo, la función posee un mínimo.

Teniendo en cuenta la información y con base a la gráfica de la **derivada de una función**.



Se puede afirmar que en $x=1$

- La función tiene un mínimo, porque la derivada cambia de valor negativo a un valor positivo
 - La función es decreciente debido al comportamiento de la gráfica
 - La función vale cero porque en la gráfica pasa por el eje x
 - La función un máximo, porque la derivada cambia de valor positivo a uno negativo
10. Teniendo en cuenta la gráfica del punto anterior, se puede afirmar que en $x=3$
- La función tiene un máximo, porque la derivada cambia de valor positivo a un valor negativo
 - La función tiene un mínimo, porque la derivada cambia de valor negativo a uno positivo
 - La función vale cero porque en la gráfica pasa por el eje x
 - La función es decreciente debido al comportamiento de la gráfica

RESPONDA LAS PREGUNTAS 11 A 12 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Un auto describe un movimiento de acuerdo con la siguiente ecuación. $F(t) = 2t(4-t)$. Esta función representa la distancia recorrida por el auto hasta que se detiene completamente.



11. La función que determina la velocidad del auto en función del tiempo es (Recuerde que la derivada de la función posición es la velocidad)
- $V(t) = 8 - 4t$
 - $V(t) = 4t$
 - $V(t) = 8t + 4$
 - $V(t) = 6t - 2$

Apéndice C Resultados pretest, postest y test de retención

Tabla 22

Datos de cada cuestionario pretest, postest y test de retención

Estudiante	pretest												postest												Test-retención																				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12									
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1			
2	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0		
3	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
4	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1		
5	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
6	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
7	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	
8	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1		
9	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
10	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	
11	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	
13	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
14	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1		
17	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	
18	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		
19	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
20	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	
21	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
22	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0		

23	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1			
24	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
25	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
26	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1		
27	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0		
28	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1		
29	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1		
30	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1		
31	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0		
32	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1		
33	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
34	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	
35	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	
36	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	
37	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	
38	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	
39	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1		
40	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	
41	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	
42	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	
43	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
44	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	
45	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	
46	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	
47	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
48	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	
49	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	
50	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	
51	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0

Apéndice D Resultados en cada cuestionario por niveles

Tabla 23

Resumen de número de estudiantes por niveles de desempeño en cada grupo y cuestionario

Grupos	Cuestionario	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
GE1	pretest	8	7	7	3
	posttest	0	0	7	18
	testret	0	1	7	17
GE2	pretest	5	8	7	4
	posttest	0	0	6	18
	testret	0	3	8	13
GC1	pretest	3	10	8	3
	posttest	2	6	8	8
	testret	0	12	7	5
GC2	pretest	0	0	0	0
	posttest	6	10	6	3
	testret	2	10	7	6

Nota. Datos para la elaboración de la Figura 17

Apéndice E Resultados de cada estudiante por competencias

Tabla 24

Resultados por competencias del área de matemáticas

Grupos	Cuestionario	Comunicación, representación y modelación	Razonamiento y argumentación	Resolución de problemas
1	1	3	4	1
1	1	2	4	0
1	1	2	1	2
1	1	3	1	2
1	1	1	2	1
1	1	2	1	2
1	1	3	1	3
1	1	3	0	3
1	1	3	2	2
1	1	2	3	1
1	1	2	0	1
1	1	1	1	1
1	1	1	3	3
1	1	3	0	1
1	1	1	3	3
1	1	3	4	4
1	1	1	0	3
1	1	1	1	1
1	1	3	4	3
1	1	1	1	1
1	1	2	2	3
1	1	3	4	3
1	1	1	0	3
1	1	1	3	2
1	1	3	1	3
2	1	3	3	3
2	1	0	2	1
2	1	2	2	2
2	1	1	2	2
2	1	4	2	4
2	1	3	3	4
2	1	3	2	2
2	1	3	1	1

2	1	3	2	1
2	1	1	3	4
2	1	2	1	1
2	1	2	0	1
2	1	4	3	1
2	1	4	1	2
2	1	4	2	3
2	1	2	1	0
2	1	2	2	2
2	1	1	1	1
2	1	2	1	2
2	1	2	3	3
2	1	3	1	3
2	1	2	1	2
2	1	2	1	2
2	1	4	2	2
3	1	2	1	2
3	1	3	3	3
3	1	2	1	2
3	1	2	1	2
3	1	2	4	3
3	1	2	1	1
3	1	3	2	3
3	1	2	3	1
3	1	1	1	1
3	1	1	1	3
3	1	2	3	2
3	1	1	2	2
3	1	2	2	1
3	1	3	3	1
3	1	2	3	2
3	1	1	4	2
3	1	3	2	2
3	1	1	2	2
3	1	2	2	1
3	1	1	3	2
3	1	3	2	2
3	1	2	0	0
3	1	4	4	4
3	1	0	4	3
4	1	0	0	0

4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
4	1	0	0	0
1	2	2	4	3
1	2	3	2	3
1	2	4	4	4
1	2	2	4	3
1	2	4	2	4
1	2	3	1	3
1	2	2	2	4
1	2	4	2	3
1	2	4	3	3
1	2	3	2	2
1	2	4	3	3
1	2	4	2	3
1	2	3	4	3
1	2	3	3	3
1	2	3	2	3
1	2	2	4	3
1	2	2	3	2

1	2	3	4	2
1	2	4	4	4
1	2	4	4	3
1	2	3	4	3
1	2	2	4	3
1	2	3	4	2
1	2	3	4	4
1	2	2	3	3
2	2	4	4	3
2	2	3	2	2
2	2	3	2	4
2	2	4	4	2
2	2	3	3	1
2	2	3	2	4
2	2	3	3	3
2	2	4	4	3
2	2	3	1	4
2	2	2	4	2
2	2	3	4	2
2	2	4	3	2
2	2	4	3	4
2	2	3	3	3
2	2	4	2	3
2	2	4	4	3
2	2	4	3	4
2	2	3	4	4
2	2	3	4	4
2	2	4	4	4
2	2	4	3	4
2	2	3	4	4
2	2	3	3	2
2	2	3	2	2
3	2	2	2	2
3	2	2	3	2
3	2	3	3	2
3	2	3	2	3
3	2	3	2	1
3	2	4	2	4
3	2	2	3	2
3	2	4	1	4
3	2	3	3	4

3	2	4	3	2
3	2	4	4	1
3	2	3	3	3
3	2	3	2	3
3	2	3	1	3
3	2	4	3	3
3	2	2	3	3
3	2	4	2	2
3	2	0	1	1
3	2	1	3	2
3	2	3	0	0
3	2	4	2	3
3	2	1	2	3
3	2	2	2	1
3	2	2	2	2
4	2	3	2	4
4	2	3	2	3
4	2	2	0	3
4	2	2	0	0
4	2	2	2	4
4	2	3	3	0
4	2	2	2	2
4	2	3	3	3
4	2	3	3	4
4	2	1	2	3
4	2	1	3	2
4	2	1	1	2
4	2	1	0	1
4	2	1	3	1
4	2	3	2	3
4	2	0	2	2
4	2	0	1	3
4	2	1	2	1
4	2	2	2	2
4	2	1	2	2
4	2	2	2	3
4	2	3	2	2
4	2	1	3	3
4	2	2	1	3
4	2	0	3	2
1	3	4	4	3

1	3	4	3	3
1	3	4	4	4
1	3	2	3	3
1	3	4	3	4
1	3	4	1	4
1	3	3	2	4
1	3	3	4	4
1	3	4	1	3
1	3	4	3	2
1	3	2	3	4
1	3	3	2	4
1	3	4	3	3
1	3	3	3	3
1	3	3	3	3
1	3	4	4	2
1	3	3	1	4
1	3	1	4	2
1	3	4	4	4
1	3	4	4	3
1	3	1	3	3
1	3	0	3	3
1	3	2	4	1
1	3	4	4	4
1	3	2	2	3
2	3	4	3	3
2	3	3	2	1
2	3	2	2	4
2	3	4	2	3
2	3	3	3	2
2	3	2	1	3
2	3	2	3	4
2	3	4	4	4
2	3	2	4	3
2	3	2	3	3
2	3	3	2	3
2	3	4	2	2
2	3	2	4	4
2	3	1	3	4
2	3	4	3	2
2	3	4	2	3
2	3	3	2	2

2	3	3	4	4
2	3	2	4	4
2	3	4	3	2
2	3	3	3	4
2	3	2	3	4
2	3	3	3	2
2	3	3	2	1
3	3	2	2	2
3	3	2	3	2
3	3	4	3	2
3	3	2	3	1
3	3	3	1	2
3	3	2	1	4
3	3	2	2	2
3	3	3	2	2
3	3	2	4	3
3	3	1	2	3
3	3	2	3	1
3	3	3	3	4
3	3	2	2	2
3	3	3	2	2
3	3	4	3	3
3	3	1	3	1
3	3	4	2	2
3	3	0	2	3
3	3	1	3	2
3	3	3	1	1
3	3	4	2	3
3	3	1	2	4
3	3	2	2	2
3	3	4	2	2
4	3	4	2	4
4	3	3	3	3
4	3	2	1	3
4	3	2	0	1
4	3	3	2	4
4	3	3	3	0
4	3	2	2	3
4	3	3	3	3
4	3	3	3	4
4	3	1	2	3

4	3	2	3	2
4	3	1	2	2
4	3	3	0	1
4	3	1	3	1
4	3	4	2	3
4	3	0	2	3
4	3	0	2	3
4	3	2	2	1
4	3	3	2	2
4	3	2	2	2
4	3	3	2	3
4	3	3	2	2
4	3	1	4	3
4	3	2	1	4
4	3	1	3	2

Nota. Grupos: 1 GE1, 2 GE2, 3 GC1, 4 GC2. Cuestionario: 1 Pretest, 2, posttest, 3 test de retención. Datos para la elaboración de la Figura 14, Figura 15 y Figura 16

Apéndice E Puntuaciones de cada estudiante y cuestionarios

Tabla 25

Resultados por puntuación en cada uno de los grupos y cuestionarios

Grupos	Pretest	Posttest	Testret
1	8	9	11
1	6	8	10
1	5	12	12
1	6	9	8
1	4	10	11
1	5	7	9
1	7	8	9
1	6	9	11
1	7	10	8
1	6	7	9
1	3	10	9
1	3	9	9
1	7	10	10
1	4	9	9
1	7	8	9
1	11	9	10
1	4	7	8
1	3	9	7
1	10	12	12
1	3	11	11
1	7	10	7
1	10	9	6
1	4	9	7
1	6	11	12
1	7	8	7
2	9	11	10
2	3	7	6
2	6	9	8
2	5	10	9
2	10	7	8
2	10	9	6
2	7	9	9
2	5	11	12
2	6	8	9
2	8	8	8

2	4	9	8
2	3	9	8
2	8	11	10
2	7	9	8
2	9	9	9
2	3	11	9
2	6	11	7
2	3	11	11
2	5	11	10
2	8	12	9
2	7	11	10
2	5	11	9
2	5	8	8
2	8	7	6
3	5	6	6
3	9	7	7
3	5	8	9
3	5	8	6
3	9	6	6
3	4	10	7
3	8	7	6
3	6	9	7
3	3	10	9
3	5	9	6
3	7	9	6
3	5	9	10
3	5	8	6
3	7	7	7
3	7	10	10
3	7	8	5
3	7	8	8
3	5	2	5
3	5	6	6
3	6	3	5
3	7	9	9
3	2	6	7
3	12	5	6
3	7	6	8
4		9	10
4		8	9
4		5	6

4		2	3
4		8	9
4		6	6
4		6	7
4		9	9
4		10	10
4		6	6
4		6	7
4		4	5
4		2	4
4		5	5
4		8	9
4		4	5
4		4	5
4		4	5
4		6	7
4		5	6
4		7	8
4		7	7
4		7	8
4		6	7
4		5	6

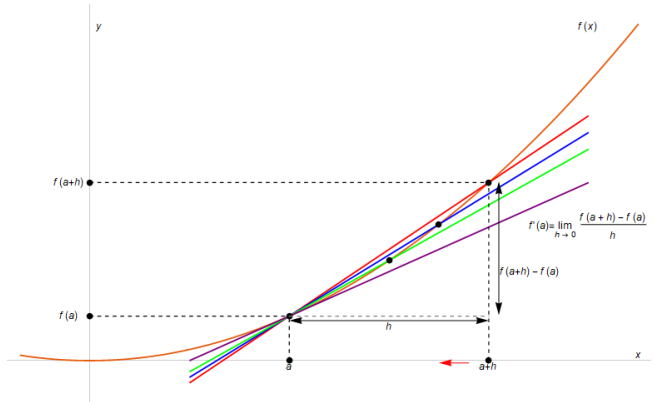
Nota. Grupos: 1 GE1, 2 GE2, 3 GC1, 4 GC2. Cuestionario: 1 Pretest, 2, posttest, 3 test de retención. Datos para la elaboración de la Figura 11.

Apéndice F Secuencia de aprendizaje basada en indagación

Tabla 26

Secuencia de aprendizaje basado en la indagación, ciclo de enseñanza 5E

Etapa	Actividad	Descripción
Engage	<p>Presentación del desafío</p> <p>Actividad: Presentación del desafío</p> <p>Descripción: Inicia la clase presentando a los estudiantes un problema desafiante relacionado con la derivada. Por ejemplo, puedes plantear la siguiente situación: "Imagina que estás diseñando una montaña rusa y necesitas calcular la velocidad y la aceleración instantánea en diferentes puntos del recorrido para asegurarte de que los pasajeros tengan una experiencia emocionante pero segura. ¿Cómo podrías determinar estos valores?"</p> <p>Motiva a los estudiantes a reflexionar sobre la importancia de calcular la tasa de cambio instantánea en diversos contextos y cómo la derivada puede ayudarles a resolver problemas reales.</p>	<p>Presenta a los estudiantes un problema desafiante relacionado con la derivada y su aplicación en un contexto real. Esto ayudará a captar su atención y despertar su curiosidad sobre el tema.</p>
Explore	<p>Investigación de gráficas</p> <p>Actividad: Investigación de gráficas</p> <p>Descripción: Proporciona a los estudiantes una serie de gráficas de funciones y pide que analicen las características y los patrones presentes en cada una de ellas. Por ejemplo, muestra una gráfica de una función lineal, una cuadrática y una exponencial.</p>	<p>Proporciona a los estudiantes diferentes gráficas de funciones y les pide que analicen las características y los patrones presentes en cada una de ellas. Esta actividad fomenta la observación y la exploración de las funciones antes de introducir formalmente el concepto de derivada.</p>
Explore	<p>Muestra una gráfica de una función logarítmica, una función cúbica</p> <p>Pregunta a los estudiantes: "¿Qué observan en cada una de estas gráficas? ¿Cómo cambia la pendiente en diferentes puntos? ¿Hay alguna relación entre la forma de la gráfica y la tasa de cambio instantánea?" Fomenta la exploración y el análisis de las funciones antes de introducir formalmente el concepto de derivada.</p>	<p>Presenta a los estudiantes casos de problemas reales donde se requiere calcular la tasa de cambio instantánea o encontrar máximos y mínimos. Los estudiantes deben identificar los posibles puntos críticos y proponer estrategias</p>

		para resolver los problemas.
Explain	<p>Introducción al concepto de derivada</p> <p>En educación media, la derivada se introduce como una medida de la tasa de cambio instantánea de una función en un punto dado. Matemáticamente, la derivada de una función $f(x)$ en un punto $x=a$ se denota como $f'(a)$ o $\left. \frac{df}{dx} \right _{(x=a)}$, y se define de la siguiente manera:</p> $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ <p>donde "lim" representa el límite, "h" es un valor infinitesimal que se aproxima a cero, y $f(a)$ y $f(a+h)$ son los valores de la función en los puntos a y $a+h$ respectivamente.</p> <p>Desde el punto de vista gráfico, la derivada de una función en un punto se interpreta geoméricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese punto. Es decir, la derivada representa la inclinación de la recta que mejor se ajusta a la curva en un punto específico.</p> 	<p>Ofrece una explicación clara y concisa del concepto de derivada, utilizando ejemplos visuales y analogías que ayuden a los estudiantes a comprender cómo se calcula y qué representa. Puedes utilizar la definición formal, la interpretación geométrica y la relación con la tasa de cambio instantánea.</p>
Explain	<p>Demostración de reglas de derivación</p> <p>Regla de la derivada constante: Si tenemos una función $f(x) = c$, donde c es una constante, la derivada de esta función es siempre cero. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $f(x) = 5$, entonces $f'(x) = 0$. • Si $g(x) = -3$, entonces $g'(x) = 0$. <p>Regla de la potencia: Si tenemos una función $f(x) = x^n$, donde n es un número real, la derivada de esta función se obtiene multiplicando el exponente por el coeficiente y disminuyendo el exponente en uno. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$. • Si $g(x) = 2x^5$, entonces $g'(x) = 10x^4$. 	<p>Presenta a los estudiantes las reglas básicas de derivación y cómo se aplican en diferentes tipos de funciones. Puedes utilizar ejemplos numéricos y gráficos para ilustrar la aplicación de cada regla y cómo afectan a la forma de la función.</p>

	<p>Regla de la suma y la resta: Si tenemos una función $f(x)$ que es la suma o resta de dos funciones $g(x)$ y $h(x)$, la derivada de $f(x)$ es la suma o resta de las derivadas de $g(x)$ y $h(x)$, respectivamente. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$, entonces $f'(x) = 6x + 4$. • Si $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$, entonces $g'(x) = 3x^2 - 4x + 5$. <p>Regla del producto: Si tenemos una función $f(x)$ que es el producto de dos funciones $g(x)$ y $h(x)$, la derivada de $f(x)$ se calcula utilizando la regla del producto, que establece que $f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $f(x) = (2x + 1)(3x^2 - 5x)$, entonces $f'(x) = (2)(3x^2 - 5x) + (2x + 1)(6x - 5)$. <p>Regla del cociente: Si tenemos una función $f(x)$ que es el cociente de dos funciones $g(x)$ y $h(x)$, la derivada de $f(x)$ se calcula utilizando la regla del cociente, que establece que $f'(x) = (g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)) / h(x)^2$. Por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $f(x) = (2x^2 + 5x + 1) / (3x - 2)$, entonces $f'(x) = [(2)(3x - 2) - (2x^2 + 5x + 1)(3)] / (3x - 2)^2$. 	
Elaborate	<p>Resolución de problemas</p> <p>Problema: La función $C(x)$ representa el costo de producción (en dólares) de x unidades de un artículo. La función se define como $C(x) = 0.5x^2 + 50x + 1000$. Encuentra el punto crítico de la función $C(x)$ y determina su significado en el contexto del problema.</p>	<p>Proporciona a los estudiantes una serie de problemas que requieren el cálculo de derivadas. Estos problemas deben involucrar situaciones de la vida real y desafiar a los estudiantes a aplicar los conceptos y las reglas aprendidas para resolverlos.</p>
Evaluate	<p>Evaluación de conocimientos y habilidades aplicación de postest y test de retención.</p>	<p>Administra una evaluación que incluya preguntas teóricas y problemas prácticos relacionados con el cálculo de derivadas. Esto permitirá medir el nivel de comprensión y aplicación de los</p>

		conceptos adquiridos por los estudiantes.
Evaluate	Retroalimentación y discusión de soluciones	Revisa y discute las respuestas de los estudiantes a las evaluaciones. Proporciona retroalimentación individualizada y facilita una discusión grupal para aclarar conceptos erróneos o dudas que puedan haber surgido durante la evaluación.

Apéndice G Plan de Asignatura y Malla Curricular Análisis y Cálculo 11°

PLAN DE ASIGNATURA ANÁLISIS Y CÁLCULO GRADO 11°

OBJETIVO GENERAL:

Construir en forma activa herramientas básicas para diferentes tipos de cálculo, en especial el diferencial y el integral, que permitan la solución de problemas en cualquier campo.

CONCEPTO TEMÁTICO 1: Números reales e inecuaciones

TIEMPO PROBABLE: 38 horas.

ESTANDAR: Pensamiento variaciones y sistemas algebraicos y analíticos.

Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.

Competencia: Interpretación, resolución de problemas y argumentación.

Temas:

1. Sistema de los números reales y sus propiedades
2. Orden en los números reales
3. Intervalos de números reales
4. Inecuaciones lineales y con valor absoluto.
5. Inecuaciones cuadráticas y racionales.
6. Inecuaciones lineales con dos variables Introducción a la Programación Lineal

Indicadores de desempeño:

1. Aplica las propiedades de los números reales en la solución de problemas.
2. Identifica las clases de intervalos, realiza operaciones con ellos y las representa gráficamente.
3. Soluciona inecuaciones de primer grado y con valor absoluto.
4. Resuelve inecuaciones cuadráticas y racionales con una variable.
5. Plantea y resuelve problemas de programación lineal, usando el método gráfico.
6. Participa con interés en el aprendizaje de los números reales, los intervalos y las inecuaciones.
7. Muestra voluntad en el cumplimiento de sus trabajos y tareas sobre los números reales, los intervalos y las inecuaciones.

CONCEPTO TEMÁTICO 2: Funciones, límites y continuidad

Tiempo probable: 36 horas.

ESTANDAR: Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.

Competencia: Interpretación, resolución de problemas y argumentación.

Temas:

1. Concepto de función. Dominio y rango
2. Clasificación de funciones reales.
3. Operaciones con funciones.
4. Función compuesta.
5. Límite de funciones.

6. Límite de funciones constantes, lineal y de cualquier orden.
7. Álgebra de límites.
8. Límites indeterminados.
9. Límites al infinito.
10. Límites especiales.
11. Funciones continuas.

Indicadores de desempeño:

1. Reconoce el concepto de límite y aplica las propiedades aditivas y multiplicativas en la solución de problemas.
2. Reconoce y analiza las propiedades de funciones reales a partir de su gráfica y calcula el límite de funciones algebraicas, trigonométricas, racionales, límites infinitos y al infinito.
3. Determina la continuidad de funciones en un punto, en un intervalo abierto y en uno cerrado.

CONCEPTO TEMÁTICO 3: Derivada y aplicaciones

Tiempo probable: 40 horas.

ESTANDAR: Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y variación de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.

Competencia: Interpretación, resolución de problemas y argumentación.

Temas:

1. Incremento de una función.
2. Concepto de derivada, interpretación geométrica.
3. Derivada de una función, regla de los 5 pasos.
4. Teoremas para el cálculo de derivadas: suma, resta, producto y cociente.
5. Regla de la cadena.
6. Derivación implícita.
7. Derivada de las funciones trigonométricas.
8. Derivada de las funciones exponencial y logarítmica.
9. Aplicaciones de la derivada en el trazado de gráficas.
10. Máximos y mínimos de una función.
11. Problemas de aplicación.

Indicadores de desempeño

Halla la derivada de funciones polinómicas, trascendentales y especiales, a través de reglas y/o teoremas básicos y las utiliza para resolver problemas de aplicación.

CONCEPTO TEMÁTICO 4: Cálculo integral

Tiempo probable: 36 horas.

ESTANDAR: Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y variación de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.

Competencia: Interpretación, resolución de problemas y argumentación.

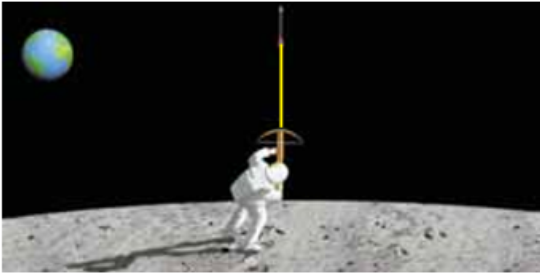
Temas:

1. Derivada y antiderivada.
2. Integral indefinida de una función.
3. Integración por sustitución, ejercicios.
4. Integrales exponenciales y logarítmicas.
5. Integración por partes, ejercicios.
6. Integral definida, propiedades.
7. Teorema fundamental del cálculo.
8. Determinación de áreas.
9. Volumen de rotación.

Indicadores de desempeño

Calcula las integrales indefinidas y definidas de funciones polinómicas, trascendentales y especiales, a través de teoremas básicos para solucionar problemas de aplicación.

**MALLA CURRICULAR PERIODO 3
ANÁLISIS Y CÁLCULO GRADO 11°**

PERIODO III.		CONCEPTO TEMATICO 3: DERIVADA Y APLICACIONES.		
SITUACIÓN PROBLÉMICA	ÁMBITOS CONCEPTUALES	COMPETENCIA(S): interpretación y representación; formulación y ejecución; y argumentación.		
		COGNITIVA(S)	PROCEDIMENTAL(ES)	ACTITUDINAL(ES)
<p>Velocidad en la Luna Si una flecha es disparada hacia arriba en la Luna con una velocidad de 58 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 58t - 0.83t^2$.</p> <p>(a) Encuentre la velocidad instantánea de la flecha después de un segundo.</p> <p>(b) Encuentre la velocidad instantánea de la flecha cuando $t = a$.</p> <p>(c) ¿En qué tiempo t regresará la flecha a la Luna?</p> <p>(d) ¿Con qué velocidad llegará la flecha a la Luna?</p> 	<p>Concepto de derivada, interpretación geométrica.</p> <p>Derivada de una función, regla de los 5 pasos.</p> <p>Derivada de la: adición, sustracción, producto y cociente de funciones</p> <p>Regla de la cadena. Regla de la potencia</p> <p>Derivada de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.</p> <p>Derivada implícita y de orden superior.</p> <p>Aplicaciones de la derivada: Crecimiento y concavidad. Máximos y mínimos. Criterio de la segunda derivada. Trazado de curvas con derivada de segundo orden,</p> <p>Razones de cambio</p> <p>Regla de L'Hopital</p>	<p>Identifica las características que debe tener una función para exista la derivada, cuando la variable independiente, se mueva alrededor de cierto valor real.</p>	<p>Desarrolla procesos algorítmicos para determinar la derivada de una función, utilizando propiedades.</p>	<p>Demuestra interés, disciplina y responsabilidad en su proceso personal y social.</p>

Apéndice H Datos confiabilidad pretest y postest

Tabla 27

Datos para determinar la confiabilidad del pretest

Sujeto	Ítem											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
2	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
3	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
5	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
6	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
7	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
8	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

Nota. La tabla presenta las respuestas escogidas por los estudiantes en la prueba piloto, opción correcta: 1, opción incorrecta: 0.

Tabla 28

Datos para determinar la confiabilidad postest

Sujeto	Ítem											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
2	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
3	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
4	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
5	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
6	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
7	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Nota. La tabla presenta las respuestas escogidas por los estudiantes en la prueba piloto, opción correcta: 1, opción incorrecta: 0