MODELO ESTOCÁSTICO DE INVENTARIO MULTIARTÍCULO, CON RESTRICCIONES DE ESPACIO, PRESUPUESTO, FRECUENCIA DE PEDIDO Y NIVEL DE SERVICIO

SAID JAVIER ARRIETA PÉREZ

ADER LUIS VILLAR ORTEGA

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE INGENIERÍAS
PROGRAMA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
MONTERÍA CÓRDOBA
2013

MODELO ESTOCÁSTICO DE INVENTARIO MULTIARTÍCULO, CON RESTRICCIONES DE ESPACIO, PRESUPUESTO, FRECUENCIA DE PEDIDO Y NIVEL DE SERVICIO

SAID JAVIER ARRIETA PEREZ

ADER LUIS VILLAR ORTEGA

Proyecto de Grado presentado como requisito para optar al título de Ingeniero Industrial

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE INGENIERÍAS
PROGRAMA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
MONTERÍA CÓRDOBA
2013

NOTA DE ACEPTACIÓN

Ing. Luis Mercado Hoyos

JURADO 1

JURADO 2

Montería, febrero de 2013

AGRADECIMIENTOS

Damos gracias a Dios por permitir la realización del presente trabajo y por todo lo que somos, a nuestros padres por sus esfuerzos en nuestra educación, a nuestros hermanos y demás familiares por su apoyo incondicional.

Queremos expresar nuestro agradecimiento también a nuestro tutor, ing. Luis Mercado Hoyos por toda su guía y colaboración, al ing. Jorge Mario López por sus valiosos consejos y en general a todo el cuerpo de docentes que ayudaron en nuestra formación como profesionales

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Un inventario de acuerdo a Love [1], es una cantidad de bienes o materiales bajo el control de una empresa que se mantienen por un tiempo en forma improductiva esperando su venta o uso.

La razón fundamental para el control de inventarios se debe a que es poco frecuente que los bienes que se tienen sean justamente los que se demandan. No tener los materiales ni los suministros cuando se necesitan representa pérdidas económicas en el proceso productivo y genera además insatisfacción del cliente.

El estudio de la administración de inventarios es un campo del conocimiento que se ha examinado de manera científica hace ya varias décadas. Desde que fue propuesto el modelo de lote económico de Harris en 1913, muchos autores se han dado a la tarea de resolver múltiples problemas de inventarios. El principio fundamental de esta clase de modelos se orienta a determinar la política de abastecimiento a través de precisar la cantidad a pedir y el período de suministro para lograr el costo mínimo. En la actualidad, el estudio de los problemas de control de los inventarios es por tanto, una temática en constante evolución, a la vez que es atendida por una gran cantidad de investigadores mediante modelos cada vez más complejos.

Existen diversos modelos matemáticos utilizados para describir la gestión de inventarios, entre ellos existen modelos estocásticos y determinísticos, modelos de revisión continua y de revisión periódica, modelos con un único artículo y de múltiples artículos, modelos para artículos perecederos y para artículos no perecederos, etc. En el presente trabajo será considerado el modelo de inventarios conocido como el modelo (Q, r) por ser uno de los más usados en la actualidad, tanto por académicos como por grandes y pequeños empresarios. Este modelo usualmente se emplea cuando se requiere un control constante de las cantidades para saber el nivel exacto en cada momento, y básicamente se aplica en artículos de importancia estratégica para la empresa o artículos de alta rotación.

Muchos modelos de inventarios multi-articulo bajo la política (Q, r) han sido propuestos en la literatura revisada, sin embargo no se consideran simultáneamente restricciones en los siguientes recursos: capacidad de almacenamiento en bodega, valor máximo de la inversión, frecuencia de pedidos y nivel mínimo de servicio al cliente. En el presente trabajo se desarrolla un modelo matemático de inventarios que tendrá en cuenta las cuatro restricciones anteriormente mencionadas.

1. GENERALIDADES

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.1 Antecedentes

La gestión de inventarios es una de las actividades logísticas en donde se encuentran más posibilidades de reducir costos para las empresas por tal razón muchas organizaciones comerciales, han reaccionado a la realidad de que al mejorar sus inventarios mejoran todos sus movimientos económicos, internos y externos, y se encuentran en la búsqueda de soluciones para satisfacer sus necesidades, desde las más simples hasta las más complejas además de las de sus clientes, hablando en términos de cualquier movimiento que esta pueda realizar. Esta búsqueda constante ha permitido la actualización en sus métodos de trabajo, haciendo más eficientes sus sistemas de inventarios al notar los beneficios que esto produce; las empresas que no se han interesado en la búsqueda de estas mejoras, se están hundiendo en graves problemas en sus procesos de compra-venta y en consecuencia, incremento de sus costos y una gran caída de la clientela.

El problema de inventarios ha estado siempre presente en la historia humana. La adquisición y preservación de bienes para el consumo directo de la población o requeridos como materias primas para la elaboración de productos terminados, ha rondado la civilización desde que se hiciera evidente que el ser humano era capaz de producir en mayor cantidad que lo rigurosamente necesario para su consumo individual. Esta capacidad “productora” ocasiona el problema inmediato de la gestión de inventarios, esto es, que se debe hacer con el excedente de producción.

Los problemas de inventario en las empresas son muy antiguos, pero no fue sino hasta comienzos del siglo XIX cuando se comenzaron a hacer intentos por aplicar técnicas analíticas para su estudio sistemático, racionalización y adecuada resolución. En la medida en que se fueron desarrollando estas teorías y análisis, surgió la necesidad de emplear métodos matemáticos, debido principalmente al rápido crecimiento de las industrias manufactureras, al desarrollo de las distintas ramas de la ingeniería y a la implantación de nuevas técnicas de análisis, algunas de las cuales consideran a los sistemas de inventarios estrictamente ligados con la planificación de la producción. [2]

Mientras las formas de producción se mantuvieron en niveles artesanales y precarios, las decisiones sobre los inventarios estuvieron signadas por lo inmediato, más que por una visión de largo alcance que permitiera la planificación. Lee y Nahmias [3] reportan que los primeros trabajos sobre modelos de inventarios se deben a Ford Harris en 1913 al crear el modelo EOQ (Economic Order Quantity). Más tarde, muchos autores se preocuparon por formular modelos matemáticos para la gestión de inventarios e hicieron publicaciones al respecto, tal vez una de las de mayor incidencia fue la monografía publicada por Whitin en 1963 la cual fue una importante contribución a la administración de inventarios y al pensamiento de la economía clásica. De hecho, fue uno de los primeros tratamientos del modelo (Q, r) bajo incertidumbre, el cual más tarde se convirtió en la piedra angular para muchos sistemas de inventarios comerciales.

Durante e inmediatamente después de la Segunda Guerra Mundial y en el fructífero contexto de la Corporación RAND en Estados Unidos, se producen los avances más importantes e influyentes que sobre modelos de inventario se tengan hasta el presente. Los modelos de inventarios estocásticos tienen sus inicios en 1958, año en el que fue propuesto el primer modelo por Arroz, posteriormente en los sesentas se crearon variaciones del mismo adaptándose mejor a las necesidades de las empresas. En las últimas décadas se siguen haciendo pequeñas variaciones de éstos modelos, éstas se han registrado en publicaciones recientes. La introducción de la estadística, así como la “recursividad” que la programación dinámica aporta al estudio de los distintos eslabones en una cadena de suministros fueron algunas de las ideas que condujeron el tema hasta la actualidad [2].

En la actualidad la creciente necesidad de las empresas de reducir los costos en sus operaciones diarias e incrementar los beneficios para las mismas ha generado que vean a las actividades logísticas como un foco para alcanzar estos dos objetivos. Esta necesidad surge como respuesta a la alta competitividad del mercado actual, causada en gran parte por la globalización, que en muchos casos obliga a las empresas a ofrecer sus productos a menor precio, con mejores características de calidad y con un mayor nivel de servicio al cliente.[4]

Hoy día la gestión de los inventarios en las empresas depende de muchos factores tales como, su actividad comercial, las políticas de inventarios que maneja, recursos disponibles, entre otros.

1.1.2 Descripción del problema

En la actualidad la gran mayoría de las empresas, por pequeñas que éstas sean, presentan problemas de inventario con diversas características muy particulares unas de otras. Por esta razón a escala mundial, se han invertido grandes cantidades de dinero y tiempo en encontrar soluciones, que permitan minimizar estos problemas y racionalizar al máximo este importante aspecto, íntimamente relacionado con los costos de producción.

El inventario encapsula el dinero y una mala gestión del mismo puede afectar el estado financiero de las compañías. El tema de la gestión de inventarios es por excelencia uno de los temas más atendidos por los académicos, y de mayor interés para los industriales. Ganeshan y Harrison [5] señalan que el costo de los inventarios de una empresa puede estar entre el 20 y el 40% de su valor, razón por la cual su eficiente administración se vuelve un factor crítico.

En los inventarios existen dos aspectos de suma importancia que generan incertidumbre, como lo son la escasez de mercancía y el exceso de inventario, tener demasiado inventario es tan problemático como disponer de poco. Demasiado, implica costos adicionales relacionados con el almacenaje, seguros, impuestos y los correspondientes al deterioro u obsolescencia de los artículos que se mantienen en existencia, por otro lado tener poco inventario implica que se dejara de percibir ingresos por ventas y además se pondrá en riesgo el brindarle un buen servicio al cliente. Por la anterior razón las empresas deben mantener en la medida de lo posible un nivel de inventarios ideal de manera que las existencias se encuentren en los estantes justamente cuando se requieran, y pasen en los mismos en el menor tiempo posible.

Es claro que si el hombre tuviera certidumbre sobre el futuro se podría establecer inequívocamente la cantidad de bienes que debería almacenar (incluso, tal vez, ninguna cantidad) para cubrir sus necesidades futuras, sin embargo, esto sencillamente no es posible. Surge entonces el problema de determinar en qué cantidad abastecerse para alcanzar una protección adecuada. Esta cantidad, en general, deberá encontrarse entre un valor mínimo y otro máximo, “razonables” [6].

Desde que Harris desarrollo en 1913 el modelo del lote económico (EOQ) para la gestión de inventarios, los investigadores se han preocupado por diseñar modelos de inventarios que se ajusten más a la realidad de las empresas debido a que el modelo de la cantidad económica de pedido no tiene en cuenta muchas consideraciones de las empresas tales como: las limitaciones de los recursos, la incertidumbre de la demanda y los tiempos de entregas, entre otros.

El manejo de inventarios adecuados en la empresa posee implicaciones no solo económico-financieras, sino logísticas, de limitaciones de espacio físico e incluso de producción; de allí que en su determinación se empleen grandes esfuerzos, los cuales en caso de ser exitosos, redundan favorablemente en el desenvolvimiento integral de las empresas.

Entre mayor número de consideraciones se tengan en cuenta en los modelos de inventario, más se ajustara dicho modelo a la a la realidad empresarial y por ende se podrá hacer un manejo más eficiente de los inventarios, por tal razón las empresas se preocupan por desarrollar una política óptima de inventarios que minimice los costos asociados a los mismos, teniendo en cuenta aspectos tales como las limitaciones en los recursos y la incertidumbre de variables tales como: la demanda, los tiempos de entrega, entre otras.

1.1.3 Interrogantes y formulación del problema

¿Es posible formular un modelo matemático multiartículo de inventarios que minimice costos sujeto a cuatro restricciones como son: capacidad de bodega, número de pedidos, nivel mínimo de servicio y valor de inventario máximo?

Además del anterior interrogante, es posible plantear otros, los cuales se pretenden ir resolviendo a lo largo de nuestra investigación:

¿Cuáles son las limitaciones de recursos que más se presentan en los modelos multiarticulos?

¿Qué ventajas ofrece el modelo propuesto frente a otros modelos de inventario multiarticulos?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo general

Formular un modelo matemático que permita determinar la cantidad óptima a mantener en inventario teniendo como objetivo minimizar costos, sujeto a restricciones de nivel mínimo de servicio, capacidad de bodega, número de pedidos y valor de inventario máximo.

1.2.2 Objetivos específicos

- Realizar una revisión de literatura de los modelos matemáticos de inventarios formulados y a partir de dicha revisión establecer aspectos diferenciadores en el modelo propuesto.
- Formular una función de costo donde se penalice de dos formas distintas la condición de desabastecimiento del sistema
- Proponer una alternativa para medir la tasa de ocupación del sistema y el valor medio esperado de pedidos pendientes
- Expresar los parámetros del modelo para el caso específico de demanda Poisson con las aproximaciones propuestas

1.3 JUSTIFICACIÓN

Las empresas de tipo comercial tienen como principal objetivo obtener ganancias. Si suponemos un volumen constante en las ventas, una empresa de este tipo solo cuenta con tres opciones si desea incrementar estas ganancias: aumentar los precios de sus productos, disminuir sus costos o bien una combinación de ambas.

Debido a que el aumento de los precios de sus productos no resulta una opción practica ya que desembocaría en una pérdida de clientes debido a la amplia competitividad que existe hoy día, se deben buscar formas de realizar una eficiente gestión de inventarios teniendo como objetivo principal la reducción de los costos asociados a dichos inventarios.

Toda empresa comercial tiene algún tipo de inventario, realizar la gestión de dicho inventario constituye una de las actividades más complejas para las empresas, pero se vuelve aún más complicada cuando la demanda de los clientes hacia los productos que forman parte del inventario y el tiempo de entrega de los pedidos para abastecerlo no se pueden predecir con exactitud. Sin embargo, es necesario tomar en cuenta estas dos situaciones para realizar una gestión eficiente del inventario ya que son variables indispensables cuando se busca minimizar el costo de tener un inventario dentro de la empresa.

La razón fundamental para el control de inventarios se debe a que es poco frecuente que los bienes que se tienen sean justamente los que se demandan. No tener los materiales ni los suministros cuando se necesitan representa pérdidas económicas en el proceso productivo o perder al cliente. Por otra parte, si se tiene en abundancia para protegerse de faltantes, la inversión puede resultar muy grande por tener mucho capital paralizado. Otros motivos para mantener inventarios son: economía de escala, especulación y precaución, véase [7], [8]. Lo anterior justifica la elaboración de modelos matemáticos con el objeto de minimizar los costos de operación de los inventarios, sujetos a la restricción de satisfacer la demanda y que además den respuestas a las preguntas claves que se requieren para el control óptimo del inventario: Cuando se ordena y Cuanto se ordena.

El manejo inadecuado de los inventarios, al igual que la adquisición de productos en el momento y cantidad incorrecta, incurren siempre en el aumento de costos y la disminución de beneficios, necesitando incluso un mayor esfuerzo de parte del personal para obtener un incremento en la rentabilidad .

La política (Q, r) ha sido una de las políticas de gestión de inventario más usadas en el transcurso de los años debido a su gran aplicabilidad [9], en esta política en las existencias se revisan continuamente, y si el nivel de inventario está por debajo de un punto de reorden r, se coloca una orden de Q unidades del artículo. Una cuestión importante en sistemas de inventario (Q, r) es determinar los valores de r y Q para reducir al mínimo el costo del sistema. La mayoría de los estudios existentes sobre los sistemas de inventario (r, Q) son centrados en un solo artículo sin limitaciones de recursos. En la práctica, sin embargo, muchos sistemas de inventario actuales están diseñados para el almacenamiento de mercancías de diferentes artículos, por ejemplo el centro de distribución de una cadena de tiendas debe gestionar de inventarios para muchos artículos. Sistemas similares manejan los mayoristas, los centros logísticos como los grandes almacenes. [3]

Puesto que el tema del manejo de inventarios es muy amplio, ya que depende del tipo de empresa y de las condiciones del mercado, se hace necesario realizar estudios más específicos en cuanto al manejo de inventarios que incluyan los objetivos alcanzar por la empresa teniendo en cuenta las limitaciones de recursos que se presentan en dicha empresa.

Debido a que los recursos disponibles para la gestión de inventarios son limitados, se debe hacer un uso eficaz de los mismos, especialmente cuando en el sistema están presentes una gran variedad de artículos. Con el desarrollo de esta investigación, se busca proponer un modelo matemático utilizando la política (Q, r) para la gestión de inventarios en condiciones de incertidumbre, teniendo en cuenta 4 de las limitaciones más importantes que tienen las empresas: capacidad de bodega, frecuencia máxima de pedido, nivel mínimo de servicio, y valor máximo de inversión en inventario.

Puesto que el objetivo principal que se persigue en las empresas es minimizar los costos asociados al manejo de los inventarios y debido a que en la literatura no se encontró un modelo matemático que consideren conjuntamente las cuatro restricciones mencionadas anteriormente bajo condiciones de incertidumbre, se justifica la realización de dicho estudio

2 MARCO DE REFERENCIA TEÓRICO GENERAL

2.1 GENERALIDADES DE LOS SISTEMAS DE INVENTARIO

Los inventarios surgen de manera natural prácticamente en todas las empresas de cualquier sector económico, la razón de que esto suceda es simple, los inventarios permiten satisfacer de forma inmediata (o casi) la demanda de un artículo. Así, desde el punto de vista de un cliente siempre debe mantenerse inventario disponible del artículo en cuestión. Pero mantener inventario acarrea costos para las empresas, de hecho para algunas empresas los costos de mantener inventario representan la mayor proporción de sus costos de funcionamiento, por lo que en general para las empresas no es nada conveniente tener inventarios. Observe que la palabra cliente y empresa, se usan para caracterizar una amplia variedad de situaciones, es decir, al referirse a clientes no solo sería el usuario final de un producto dado, sino que puede ser por ejemplo un área específica dentro de la empresa misma que se abastece de un área anterior en la secuencia de producción. Por lo tanto, los inventarios pueden presentarse en cualquier parte de la cadena de suministros.

Queda claro entonces que los inventarios son una especie de mal necesario, los clientes esperan poder ser atendidos con la mayor prontitud posible, si un cliente llega y no encuentra atención a su demanda, es posible que la espera perjudique negocios futuros o incluso que el cliente decida no esperar y hacer negocios en otra parte, lo cual evidentemente no es conveniente. Existen, sin embargo, otras razones por las cuales una empresa u organización decide llevar inventarios; imaginemos un producto cuyo precio fluctúa por temporadas, parece buena idea entonces comprar una cantidad considerable de dicho producto cuando está a bajo precio, conservarlo y venderlo cuando llegue la temporada de precios altos, la misma idea aplica cuando la producción o compra de grandes cantidades de un producto trae consigo un menor costo unitario de producción o adquisición. Son muchas las razones por las cuales las organizaciones se esfuerzan por mantener niveles óptimos de inventarios, el fin de la administración del sistema es por lo tanto encontrar un balance óptimo entre los costos del inventario y los beneficios que éste ofrece.

2.2 ESTRUCTURA Y OBJETIVOS DE UN SISTEMA DE INVENTARIOS

Un sistema de inventario es el conjunto de políticas y controles que supervisa los niveles de inventario y determina cuales son los niveles que deben mantenerse, cuando hay que reabastecer el inventario y de qué tamaño debe ser el pedido, a su vez proporciona la estructura de organización y las políticas operativas para mantener y controlar los bienes en existencia. El sistema es responsable de pedir y recibir bienes: determinar el tiempo para colocar el pedido y seguir el rastro de lo que se ha pedido, de cuanto se ha pedido, y de quien lo ha pedido. El sistema también debe dar seguimiento, para responder a preguntas tales como: ¿Recibió el pedido el proveedor? ¿Ya se envió? ¿Están correctas las fechas? ¿Se han establecido los procedimientos para reordenar o devolver mercancía no deseada?

Para asistir al sistema en todas las preguntas que surgen se traducen al lenguaje matemático las distintas características del sistema, obteniéndose así un modelo matemático, el cual será la parte abstracta del sistema y se usará para la toma de decisiones y mejoramiento de la eficiencia del sistema. A grandes rasgos, el modelo deberá responder a dos preguntas: ¿cuánto se debe pedir?, ¿cuándo se debe pedir? El modelo dará respuesta a estos interrogantes en base a una doctrina de operación, el enfoque principal por supuesto es la minimización de los costos de llevar el inventario, sin embargo en algunos casos es más apropiado tratar de maximizar las utilidades que es el propósito de toda institución con ánimo de lucro. El último objetivo sería el ideal, pero es mucho más complejo, ya que las utilidades se ven afectadas no solo por el manejo de inventarios, sino que están en función del comportamiento global de las áreas de la empresa, así que habría que considerar las distintas relaciones entre los departamentos de la empresa en un modelo multiobjetivo.

2.3 CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE INVENTARIOS

Los sistemas de inventario pueden variar ampliamente de un caso a otro, son muchos los factores y las circunstancias que provocan tales variaciones. La naturaleza de los bienes en inventario, el comportamiento de la demanda y el sistema de información son apenas algunos de estos factores. Es prudente por lo tanto hacer una clasificación de los distintos tipos de modelos que surgen bajo algunas de estas condiciones. Pueden clasificarse por ejemplo, según el comportamiento de la demanda y el tiempo de reposición, en modelos determinísticos y estocásticos, obviamente los modelos determinísticos son aquellos que suponen certeza en el conocimiento de la demanda y el tiempo de reposición, y los estocásticos son los que consideran aleatoriedad en una o ambas variables. Los modelos estocásticos consideran que las variables son estacionarias, es decir que se pueden representar con una función de probabilidad que no cambia con el tiempo.

Según la manera de revisión de los niveles de inventario los modelos se pueden clasificar en modelos de revisión continua y de revisión periódica. Los de revisión continua son aquellos en los cuales se conoce el nivel de inventario en cualquier punto del tiempo, cualquier tipo de transacción que afecte el nivel de inventario, tal como compra o venta de un producto, se registra inmediatamente. Los de revisión periódica son aquellos en los cuales el nivel de inventario se conoce solo en puntos definidos de tiempo, es decir, cada cierto intervalo de tiempo se hace una revisión del sistema y en ese momento se conoce su estado.

Los nombres de los modelos pueden también hacerse en función de cualquier otra particularidad del sistema o del manejo de información, pueden incluso combinarse las clasificaciones y obtener nombres tales como: modelo estocástico de revisión continua o de revisión perpetua. Cabe anotar que en modelos determinísticos las políticas de revisión continua o revisión periódica ofrecen los mismos resultados, ya que en esencia se puede predecir el nivel de inventario en cualquier punto del tiempo. Por otra parte, en modelos estocásticos, si hay diferencias significativas en los resultados que ofrecen ambas políticas, donde por lo general el manejo del modelo en términos matemáticos suele ser más complejo cuando se usa revisión periódica del inventario, pero el sistema de revisión continua suele ser más costoso debido al monitoreo permanente del inventario o a la implementación de un sistema de información adecuado.

Algunos sistemas de inventarios tienen características muy especiales y los modelos resultantes se hacen bajo ciertas condiciones muy comunes en la literatura por lo que reciben una notación especial, a continuación se presenta una breve descripción de los más estudiados (todos éstos, son modelos estocásticos)

2.3.1 Modelo$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{r} \rangle$

En este modelo, la variable r es el punto de reorden, el nivel del inventario en elcual debe colocarse un pedido de un lote de Q unidades. Este modelo requiere que el sistema use una política de revisión continua, ya que se necesita conocer el momento exacto en el que el nivel del inventario alcanza el punto r para inmediatamente hacer un pedido de Q unidades. Además de eso, también debe suponerse que los artículos se venden (la demanda ocurre) uno a la vez, en caso de que la demanda pueda ocurrir por lotes (donde incluso el tamaño del lote de la demanda puede ser variable aleatoria) existe la posibilidad de que en una venta, el nivel del inventario quede por debajo del punto de reorden, por lo que para estos casos no es conveniente el modelo $\langle Q, r \rangle$. El tiempo de reposición o de llegada de los pedidos puede ser fijo o estar descrito por una función de probabilidad.

2.3.2 Modelo$\langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{r} \rangle$

El funcionamiento de este modelo es el siguiente: cuando el inventario alcanza un nivel igual o menor a r debe colocarse un pedido igual a la cantidad necesaria para alcanzar el nivel R. Éste modelo es adecuado para la última situación descrita en el modelo $\langle Q, r \rangle$. Igualmente se requiere un sistema de revisión continua. Observe que el modelo $\langle Q, r \rangle$ es un caso especial del modelo $\langle R, r \rangle$, que es mucho más complejo de manejar ya que la cantidad R es variable en tanto que Q es constante

2.3.3 Modelo$\langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{T} \rangle$

Este es un modelo de revisión periódica, T es el tiempo entre pedidos, es decir, en cada revisión del inventario se coloca un pedido de tal manera que el nivel del inventario llegue al valor R. La demanda puede ser por lotes o una a la vez, el tiempo de reposición o de llegada de la orden puede ser fijo o una variable aleatoria.

2.3.4 Modelo$\langle \boldsymbol{nQ}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{T} \rangle$

Éste modelo también es de revisión periódica, el inventario se revisa cada T unidades de tiempo, si el nivel del inventario en esa revisión es menor o igual a r entonces se procede a colocar un pedido nQ, donde n es el mayor entero que permite llevar el nivel de inventario al intervalo $(r, r + Q]$

Los modelos anteriores son solo algunos de los presentes en la literatura actual, por lo general la complejidad de estos aumenta en el mismo orden en que se presentaron. En cada uno de ellos se pueden hacer supuestos que desembocan en políticas distintas en el manejo del sistema de inventarios, lo cual hace de los modelos de inventarios una teoría bastante amplia y compleja, eso sin contar que no se han mencionado aspectos de gran importancia como los sistemas de múltiples escalones en los cuales se debe inventariar un artículo a través de varias locaciones.

2.4 COSTOS RELEVANTES

Habiendo fijado la doctrina de operación como la minimización de los costos de inventarios, es tiempo ahora de describir brevemente los costos que deben considerarse en la función de costo de un modelo de inventarios. La naturaleza de los costos de un sistema de inventarios es muy variada y difícil de cuantificar y por lo general es necesario estimar dichos costos haciendo consideraciones adecuadas. La idea de un modelo de inventario es minimizar el costo incurrido por el sistema en un intervalo dado de tiempo, o lo que es lo mismo minimizar el costo por unidad de tiempo. La unidad de tiempo más comúnmente usada es el año, así que la función de costo estará en función del costo anual de inventario, pero queda claro que cualquier intervalo de tiempo bien definido debe dar los mismos resultados siempre y cuando todos los costos sean dimensionalmente homogéneos. Hay que hacer énfasis en que solo deben considerarse aquellos costos que dependen de las variables del modelo, si bajo los supuestos del modelo un costo no depende de las variables de decisión entonces simplemente debe omitirse del análisis. Para hacer esto más claro veamos las siguientes descripciones de los costos del modelo

2.4.1 Costo de Adquisición

El costo de adquisición puede referirse al costo de la compra de los artículos cuando se trata de un proveedor externo, o puede ser el costo de producción cuando los artículos pedidos hacen parte de otra área de la empresa. Por lo general este costo es independiente de las variables del modelo, suponga que se trata de un modelo $\langle Q, r\rangle$, entonces si el costo unitario no depende de la cantidad pedida Q no es necesario incluirlo en la función de costo, el costo debe incluirse en caso por ejemplo de que existan descuentos por cantidad en la compra del producto, o cuando el sistema es responsable del transporte de los artículos y el costo de transporte dependa de la cantidad que se esté transportando, esta última situación sin embargo es poco probable.

2.4.2 Costo Fijo de Ordenar

Cada vez que se coloca una orden el sistema incurre en algunos costos de personal o gastos administrativos, o de papel, o quizás por tener que llamar al proveedor, mandar correos, etc. Éstos costos se representan por un costo fijo el cual debe cargarse al sistema cada vez que se pone una orden, entre más pequeño sea el lote (Q) que se pide en cada orden, mayor será el número de órdenes que deben colocarse en un intervalo de tiempo dado, aumentando así el costo fijo anual de ordenar

2.4.3 Costo de Mantener Inventario

El costo de mantenimiento involucra varios conceptos, algunos de los cuales son difíciles de medir y de cargar directamente al modelo. Se tiene por ejemplo el costo de arrendamiento de la bodega (en caso de que la bodega no sea propiedad del sistema de inventarios de la empresa), este costo puede variar con el espacio ocupado por los artículos, espacio que por supuesto depende del nivel del inventario físico. Mantener los artículos en óptimas condiciones también puede requerir de gastos en servicios tales como energía eléctrica y vigilancia, gastos que pueden variar de forma muy complicada con el nivel del inventario en la bodega y por lo tanto muy difíciles de expresar. Pero en general el costo más importante de tener inventario es el costo de oportunidad de tener una inversión ociosa en inventario cuando esa misma cantidad puede ofrecer una tasa de retorno en otra inversión. Lo que se hace entonces es asignar un costo de oportunidad a cada unidad que se tiene en inventario, que puede ser una fracción del costo o valor del artículo. El costo de mantenimiento es proporcional al tiempo que dure un artículo en inventario y se expresa en unidades monetarias por unidad física por unidad de tiempo.

2.4.4 Costo de Escasez

El costo de escasez es quizás el más difícil de medir en un sistema de inventarios. La escasez se produce cuando el nivel de inventario físico se reduce a cero y por tanto no puede satisfacerse una demanda apenas se presenta. Es difícil de medir sobre todo porque implica costos intangibles tales como pérdida de la buena voluntad del cliente o pérdida del buen nombre de la empresa. Para los costos de escasez hay que diferenciar el caso de pedidos pendientes y el de ventas perdidas. Un pedido pendiente surge cuando ocurre una demanda y no hay existencias, pero la demanda puede satisfacerse apenas haya existencias en inventario, es decir, en este caso el cliente está dispuesto a esperar a que el sistema tenga los recursos necesarios; el caso de ventas perdidas en sencillo, si el cliente llega y no hay como atender su demanda entonces la venta se pierde sin oportunidad de poder satisfacerla en un futuro. En términos generales se puede asociar un costo de penalización por cada unidad de demanda insatisfecha y un costo que sea proporcional al tiempo que se mantiene un pedido pendiente. En el caso de venta perdida no hay razón para tener costo proporcional al tiempo, solo tiene sentido un costo fijo por unidad de demanda insatisfecha. Para el caso de pedidos pendientes se maneja un costo proporcional al tiempo en que se tarda el sistema en suplir la demanda, pero pueden incluirse ambos, esta situación toma fuerza cuando imaginamos que el solo hecho de hacerle saber al cliente que no se puede satisfacer su demanda de forma inmediata hace que se pierda un poco de credibilidad en la empresa, lo cual debe penalizarse con un cargo cada vez que esto suceda, de aquí en adelante es natural que la penalización sea proporcional a la espera del cliente, por lo que el costo de pedido pendiente puede llevar un costo fijo por cada unidad y un costo por unidad proporcional al tiempo.

2.4.5 Otros Costos del Sistema Inventario

Sin duda los costos de un sistema de inventarios son de naturaleza variada, los descritos anteriormente son los que por lo general hacen parte de un análisis del sistema en un modelo matemático. Otros factores influyen en el costo del sistema en menor medida o se supone que no dependen de la doctrina de operación del sistema. El manejo de la información, o costo del procesamiento de datos en el sistema puede llegar a ser un costo considerable, pero se supone independiente de las variables del modelo, es decir, procesar la información no depende de cuánto se pide en cada orden o de cuándo se pide.

En resumen se tiene que los costos que se consideran en la función de costo del modelo son el costo fijo de pedir, el costo de mantenimiento, el costo de escasez (en caso de considerar pedidos pendientes o ventas perdidas), y el costo de compra para el caso de que se den descuentos por cantidad.

2.5 RESTRICCIONES

A menudo el sistema maneja recursos limitados, por lo tanto no es suficiente con representar la función de costo, sino que hay que agregar restricciones al modelo. A continuación describimos las más comunes

2.5.1 Capacidad de Almacenamiento

Todo sistema real tiene una capacidad limitada en la bodega donde se mantiene el inventario físico. Por lo tanto al momento de ordenar debe tenerse en cuenta que no puede excederse esta capacidad, ya que quedaría parte del inventario a la intemperie. Con el **propósito** de saber lo que ocupa un nivel de inventario dado, se asigna una medida de la ocupación espacial de cada unidad del producto y se calcula el espacio total que ocupa un lote completo. Dicha medida por lo general viene expresada en términos del área unitaria de cada artículo o del volumen. Otra forma es expresar la capacidad del almacén en términos de las unidades que puede almacenar, y garantizar que el nivel de inventario nunca exceda ese número. Todas estas formas de medir la capacidad son equivalentes y solo dependen de la manera en que se prefiera expresar la capacidad de almacenamiento.

2.5.2 Frecuencia de Pedidos

En ciertos casos el sistema no puede colocar más de un determinado número de pedidos en un cierto intervalo de tiempo, se habla entonces de un límite superior para el número de pedidos anuales del sistema o de la frecuencia de pedido. Dicha restricción puede darse por las relaciones entre la empresa y sus proveedores, en algunos casos el proveedor no puede suministrar más de una x cantidad de pedidos anuales, el modelo debe por lo tanto tener en cuenta esta situación

2.5.3 Presupuesto

La fluidez en caja es también una de las principales limitantes del sistema, en ocasiones la empresa no puede pedir tantas unidades como quisiera ya que simplemente no tiene la capacidad monetaria de hacer una compra tan grande. Para este caso se debe agregar una restricción al modelo que indique que el monto de la inversión máxima no debe superar una cantidad determinada.

2.6 MODELOS DETERMINÍSTICOS

Cuando se supone total conocimiento del comportamiento de la demanda y el tiempo de reposición, se da lugar a los modelos determinísticos. Estos modelos son simples y sencillos de manejar matemáticamente, pero su aplicabilidad se ve limitada por no tomar en cuenta la naturaleza variable de la demanda y/o el tiempo de reposición. El primer intento de modelar un sistema de inventarios data de 1913 cuando Harris propuso su modelo de cantidad económica de pedido o lote económico o modelo EOQ (Economic Order Quantity). A partir de ahí hubo varios intentos de generalización en los años venideros.

2.6.1 Modelo de Lote Económico

En este modelo el comportamiento del nivel de inventario es tal como se muestra en la figura 1. No se permiten faltantes en el sistema, el costo de la adquisición es independiente de la cantidad pedida (no hay descuentos por cantidad). La función de costo está formada por el costo fijo de ordenar y el costo de mantenimiento. El costo fijo en cada orden se denotará por A, el costo de mantenimiento por unidad por unidad de tiempo será h.

A ($/ciclo) h ($/unidad*año)

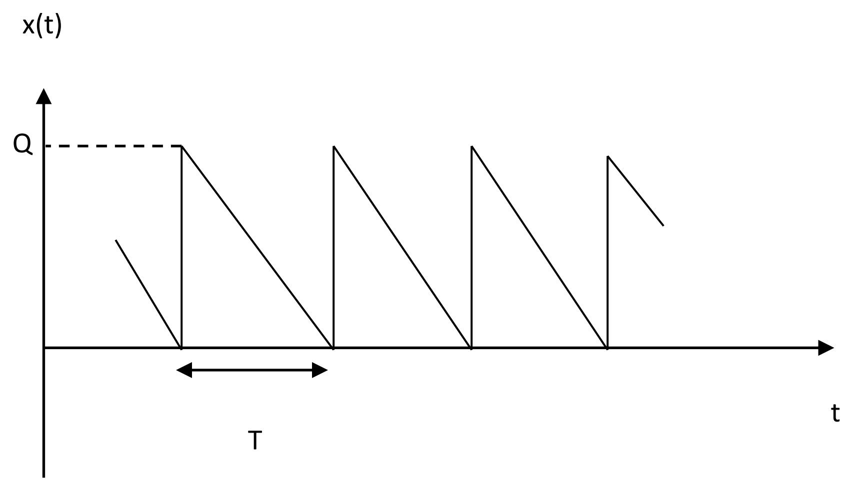


Figura 1

La demanda anual es bien conocida y se representa por D (unidad/año). Q Es la cantidad a ordenar cada vez que se hace un pedido, Q es la variable del modelo.

Para deducir la función de costo se puede proceder de varias maneras, una deducción formal requiere calcular el costo del sistema de inventario en un tiempo$T$, digamos $C(T)$ luego dividimos el costo entre el tiempo T y tomamos el límite cuando T tiende a infinito y así obtenemos la función de costo deseada

$$K(Q) = \lim_{T \to \infty} \frac{C(T)}{T}$$

Pero es mucho más simple aprovechar la estructura mostrada en la gráfica.

Observe que si T, es la duración de un ciclo (expresada en años), y D, es la tasa de demanda anual, entonces $DT = Q \Rightarrow T = Q/D$, el número de ciclos por año es

$\frac{1}{T} = D/Q$, en un ciclo se coloca exactamente una orden, por lo tanto el costo fijo por ciclo es A, así que el costo fijo de ordenar por año es

$$Costo\ anual\ de\ ordenar = \frac{D}{Q}A$$

Si en un tiempo t, contado a partir del momento en que llega el un pedido, el nivel del inventario es $x(t)$, entonces es claro que $x(t) = Q - Dt$, el costo de mantener este nivel de inventario en un tiempo dt es, $h * x(t)dt = h(Q - Dt)dt$, luego para obtener el costo de mantenimiento por ciclo integramos desde $t = 0$ hasta $t = T$, si al final multiplicamos por el número de ciclos obtenemos el costo anual de mantenimiento

$$Costo\ anual\ de\ mantenimiento = \frac{D}{Q}\int_0^T h(Q - Dt)dt$$

El nivel de inventario físico oscila entre su nivel máximo Q y cero, como el nivel decrece linealmente entonces el nivel medio que se mantiene de inventario es $Q/2$, el costo anual de mantenimiento es h por el nivel medio del inventario

$$Costo\ anual\ de\ mantenimiento = h\frac{Q}{2}$$

Este es el mismo resultado que se obtiene al evaluar la integral pero aún más fácil de deducir.

La función de costo anual es la suma el costo de ordenar e el costo de mantenimiento

$$K(Q) = \frac{D}{Q}A + h\frac{Q}{2}$$

Par hallar el valor que minimiza esta función derivamos e igualamos a cero

$$\frac{dK}{dQ} = \frac{h}{2} - \frac{D}{Q^2}A = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

Como

$$\frac{d^2K}{dQ^2} = \frac{2D}{Q^3}A > 0 \;\; \forall \, Q > 0$$

En efecto, se tiene que $Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$, da un valor mínimo para la función de costo considerada. La fórmula de Q, es la famosa fórmula de lote económico dada por Harris en 1913 en los primeros intentos de modelar un sistema de inventarios. Luego de esto, vinieron algunas generalizaciones, donde se empezaba a considerar situaciones donde se le permitía al sistema tener escasez, o donde la tasa de entrega de los pedidos era finita como se verá en los siguientes modelos

2.6.2 Modelo con Faltantes Planeados

El modelo de lote económico no considera faltantes, en ocasiones sin embargo es conveniente permitirle al sistema tener un nivel de escasez planeado. Para este caso pueden darse dos situaciones, la primera donde la demanda no atendida se mantiene como pedidos pendientes que deben ser satisfechos apenas halla inventario disponible, y la segunda donde la demanda que se presenta en el periodo de escasez se pierde definitivamente. Vamos aquí a suponer que la demanda en periodo de escasez es pedido pendiente. Q es la cantidad pedida en cada orden, y S es el nivel máximo de escasez permitido (Q, S son las variables del modelo). Además de los supuestos del modelo anterior vamos a asumir que existe un costo o penalización p_0 por cada unidad de pedido pendiente y un costo p por unidad de pedido pendiente por unidad de tiempo

p_0($/unidadPP) p($/unidadPP*año)

La gráfica 2 muestra el comportamiento característico del nivel de inventario en el sistema

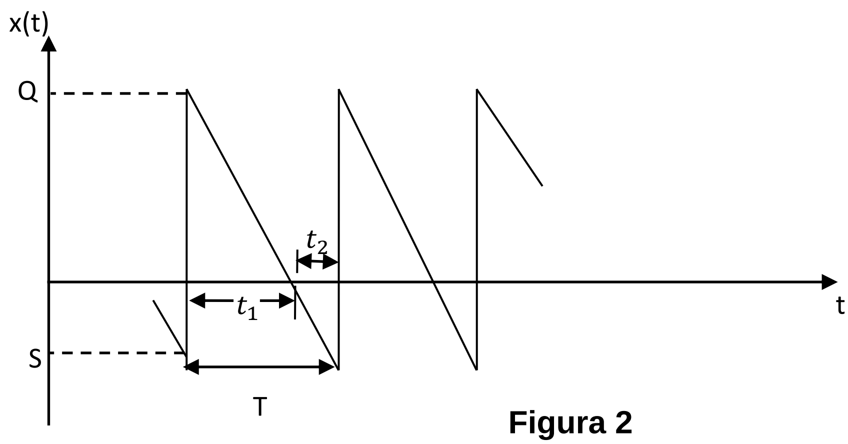


Figura 2

El número de ciclos por año sigue siendo D/Q

Por lo tanto

$$Costo\ anual\ de\ ordenar = \frac{D}{Q}A$$

Si t_1 es el tiempo durante el cual hay inventario disponible, entonces

$Dt_1 = Q - S$, y $t_1 = (Q - S)/D$

Si t_2 es el tiempo durante el cual hay escasez, entonces $Dt_2 = S$, y $t_2 = S/D$

Evidentemente $T = t_1 + t_2 = Q/D$

El costo de mantenimiento en un ciclo es h multiplicado por el valor del área A_1 sombreada en la figura 2. Pero

$$A_1 = \frac{t_1(Q - S)}{2} = \frac{(Q - S)^2}{2D}$$

Entonces el costo de mantenimiento por ciclo es

$$h\frac{(Q - S)^2}{2D}$$

Y de aquí que

$$Costo\ anual\ de\ mantenimiento = \frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

El costo por pedido pendiente en un ciclo es

$$p_0S + pA_2$$

$$= p_0S + \frac{pt_2S}{2}$$

$$= p_0S + \frac{pS^2}{2D}$$

Y de esta manera tenemos que

$$Costo\ anual\ de\ pedido\ pendiente = \frac{D}{Q}\left(p_0S + \frac{pS^2}{2D}\right) = \frac{p_0DS}{Q} + \frac{pS^2}{2Q}$$

Al sumar los costos considerados obtenemos la función de costo anual

$$K(Q,S) = \frac{D}{Q}A + h\frac{(Q-S)^2}{2Q} + \frac{p_0DS}{Q} + \frac{pS^2}{2Q}$$

Los valores óptimos se encuentran al resolver el sistema

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial K}{\partial S} = 0$$

Lo cual con un poco de manipulación algebraica nos conduce a:

$$Q = \sqrt{\frac{p+h}{p}\left(\frac{2AD}{h} - \frac{(p_0D)^2}{h(p+h)}\right)}$$

$$S = \frac{1}{p+h}\left(\sqrt{2ADh\left(1+\frac{h}{p}\right) - \frac{h(p_0D)^2}{p}} - p_0D\right)$$

Para completar el análisis es necesario estudiar el determinante de la matriz hessiana en los valores dados de Q y S, es decir, hay que probar que en realidad esos valores corresponden a un valor mínimo y que es además un mínimo global de la función $K(Q,S)$

Puede consultarse un estudio detallado de estos y muchos otros aspectos en [10].

2.6.3 Otras Generalizaciones del Modelo EOQ

Existen muchos otros aspectos que se pueden incluir en un modelo de lote económico. Por ejemplo puede estudiarse el caso donde existen descuentos en la adquisición de la mercancía cuando se compran lotes grandes, o se puede suponer que la tasa de llegada de los pedidos es finita. Vamos a ver de manera breve el último caso. Observe que en los modelos anteriores se supone implícitamente que el lote o pedido llega todo a la vez. Si en vez de eso, suponemos que el pedido va llegando a una tasa de arribo a (unidades/unidad de tiempo) se obtendría un sistema de inventario cuyos niveles se verían como se muestra en la siguiente gráfica:

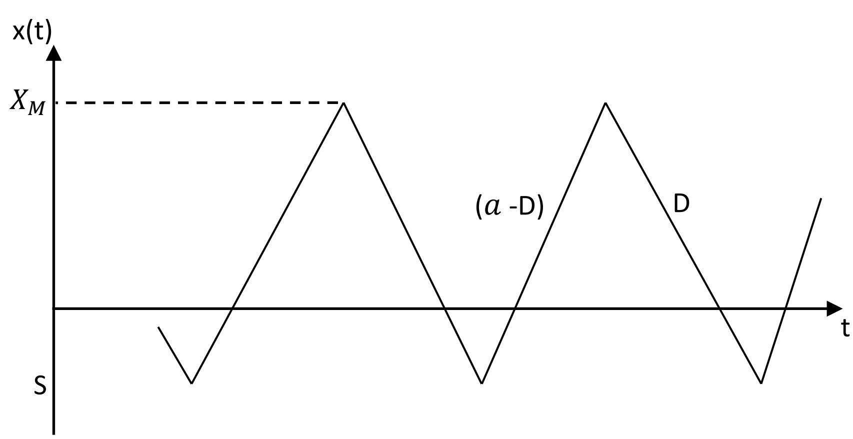


Figura 3

Debe estar claro que $a > D$, ya que las unidades deben llegar más rápido de lo que se despachan para que el nivel de inventario pueda subir

Los cálculos para este caso son algo más laboriosos pero siguen siendo sencillos y pueden resolverse por los métodos tradicionales del cálculo

Primero que todo notemos que en esencia, en cada ciclo se siguen demandando Q unidades, y D es la demanda anual, así que el número de ciclos por año es D/Q

A, es el costo fijo de ordenar en cada ciclo.

Es fácil ver que el nivel máximo de inventario es

$$X_M = Q\left(1 - \frac{D}{a}\right) - S$$

El costo de mantenimiento en un ciclo es

$$\frac{h\left[Q\left(1 - \frac{D}{a}\right) - S\right]^2}{2D\left(1 - \frac{D}{a}\right)}$$

Si solo consideramos un costo de pedido pendiente proporcional al tiempo ($p_0 = 0$), las cosas son un poco más sencillas y el costo de pedido pendiente en un ciclo es

$$\frac{pS^2}{2D\left(1 - \frac{D}{a}\right)}$$

Teniendo en cuenta que hay D/Q pedidos anuales, entonces el costo anual del sistema de inventario es

$$K(Q,S) = \frac{D}{Q}A + \frac{h\left[Q\left(1 - \frac{D}{a}\right) - S\right]^2}{2Q\left(1 - \frac{D}{a}\right)} + \frac{pS^2}{2Q\left(1 - \frac{D}{a}\right)}$$

Igualmente debe cumplirse que

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial K}{\partial S} = 0$$

Esto conduce a la solución única. Véase [10]

$$Q = \sqrt{\frac{2AD(p+h)}{ph(1-D/a)}}$$

$$S = \sqrt{\frac{2ADh(1-D/a)}{p(p+h)}}$$

Donde también debe sustentarse que esas soluciones corresponden al mínimo global de la función $K(Q,S)$.

Es un ejercicio interesante mostrar que estas soluciones se reducen, cuando a tiende a infinito, al caso donde se supone una tasa instantánea de arribo, es decir cuando el lote llega todo a la vez

Los modelos con tasa finita de arribo son bastante aplicables sobre todo cuando el sistema de inventario es abastecido por un área de producción, en este caso se habla de una tasa de producción. El área en cuestión abastece el sistema en la medida que va fabricando los artículos necesarios

2.6.4 Modelos con Múltiples Artículos y Restricciones

Con frecuencia un sistema de inventarios debe manejar simultáneamente varios tipos de artículos. Si no existe interrelación entre los artículos, entonces el sistema puede tratar cada artículo independientemente ya que el comportamiento de uno no afecta a ninguno de los otros. Si ese no es el caso entonces debe considerarse un modelo unificado que involucre a cada uno de los tipos de artículos inventariados. Hay necesidad de considerar un modelo multiartículo cuando los recursos del sistema son limitados y por lo tanto debe asignarse a cada tipo de artículo un parte de dicho recurso. Los distintos productos tienen demandas y características diferentes.

Suponga que se manejan n tipos de artículos, la tasa de arribo es instantánea y la demanda en periodo de escasez da lugar a pedidos pendientes. Para cada tipo de artículo i se tiene la función de costo

$$K(Q_i, S_i) = \frac{D_i}{Q_i} A_i + h_i \frac{(Q_i - S_i)^2}{2D_i} + \frac{p_{0i} D_i S_i}{Q_i} + \frac{p_{0i} {S_i}^2}{2Q_i}$$

D_i: Demanda anual del artículo i

A_i: Costo fijo de ordenar para el artículo i

h_i: Costo de mantener una unidad del artículo i por unidad de tiempo

p_{0i}: Costo de penalización por unidad de pedido pendiente del artículo i

p_i: Costo de penalización por unidad de pedido pendiente por unidad de tiempo del artículo i

Q_i, S_i son el tamaño del lote y el nivel de escasez para el artículo i respectivamente.

El costo total del sistema es la suma del costo de cada uno de los artículos

$$K(Q_1, \dots, Q_2, S_1, \dots, S_2) = \sum_{i=1}^{n} K(Q_i, S_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{D_i}{Q_i} A_i + h_i \frac{(Q_i - S_i)^2}{2D_i} + \frac{p_{0i} D_i S_i}{Q_i} + \frac{p_{0i} {S_i}^2}{2Q_i} \right)$$

Si la bodega tiene una capacidad máxima de almacenamiento, digamos E_0, y si e_i es el espacio en bodega requerido para almacenar una unidad del artículo i, entonces el espacio necesario para un lote del artículo i es $e_i Q_i$ y para todos los artículos se requiere un espacio de $\sum_i e_i Q_i$, este espacio no debe superar la capacidad máxima de la bodega

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i Q_i \ \leq E_0$$

Si c_i es el costo unitario de adquisición del artículo i, y si C_0 es la inversión máxima que puede hacer el sistema en cualquier pedido, entonces debe cumplirse que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i Q_i \leq C_0$$

Por último considérese el caso donde el sistema solo tiene permitido poner un número máximo, F_0 de pedidos anuales; para cada artículo se ponen D_i/Q_i pedidos anuales, por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{Q_i} \leq F_0$$

Con todo esto la estructura del modelo viene a ser

$$Min\, K(Q_1, \dots, Q_2, S_1, \dots, S_2) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{D_i}{Q_i} A_i + h_i \frac{(Q_i - S_i)^2}{2D_i} + \frac{p_{0i} D_i S_i}{Q_i} + \frac{p_{0i} {S_i}^2}{2Q_i} \right)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i Q_i \ \leq E_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i Q_i \leq C_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{Q_i} \leq F_0$$

El manejo de un modelo con restricciones es mucho más complejo. Bajo ciertas condiciones la teoría de multiplicadores de Lagrange es una herramienta poderosa para resolver este tipo de problemas

En los modelos anteriores no se tomó en cuenta en el análisis el tiempo de reposición, pero es sencillo introducir el tiempo de reposición en la política de inventario ya que se supone que dicho tiempo se conoce con certeza, solo es necesario poner el pedido en el momento justo para que el pedido llegue en el momento que se desea

2.7 MODELOS ESTOCÁSTICOS

Los modelos determinísticos son idealistas, ya que en la práctica la demanda de un producto o artículo es variable. En los modelos estocásticos se trata de incluir la naturaleza variable de la demanda, esto supone obtener un modelo más ajustado a la realidad a cambio de tener que manejar ecuaciones más complejas. Los obstáculos que se presentan en los modelos estocásticos a menudo son tan complejos que a veces es más satisfactorio rodear ciertas dificultades con algunas simplificaciones que resulten en un modelo más manejable a costa de perder un poco la exactitud del modelo. Tratemos un poco la teoría relativa a los modelos $\langle Q, r\rangle$.

2.7.1 Niveles de Inventario en el Sistema

Los modelos $\langle Q, r\rangle$ requieren un sistema de revisión continua, se supone que las unidades se demandan una a la vez y no por lotes, además la demanda, aunque variable, es estacionaria, es decir que puede representarse mediante una distribución de probabilidad que no cambia con el tiempo.

La política de funcionamiento es que el sistema debe ordenar un pedido de tamaño Q cada vez que el inventario alcanza el nivel r. Aquí surge el primer inconveniente, ya que al ser la demanda una variable aleatoria, es posible que en el tiempo de reposición halla una demanda lo suficientemente grande para provocar que al llegar un pedido de tamaño Q, éste no sea suficiente para elevar el nivel del inventario más allá del punto r, por lo que el sistema pasaría a acumular pedidos pendientes y no volvería a realizar un pedido. Por esta razón se definen los siguientes niveles de inventario:

$$Inventario\ neto = Inventario\ físico - Pedidos\ pendientes$$

$$Posición\ del\ inventario = Inventario\ neto + mQ$$

Donde m es el número de órdenes que no han llegado al sistema

El inventario físico está compuesto por las unidades existentes en bodega. Cuando el inventario neto es negativo quiere decir que esa cantidad es el número de pedidos pendientes del sistema. Hay que hacer énfasis en la diferencia de pedidos pendientes y ordenes pendientes, los pedidos pendientes son las unidades de demanda que el sistema no ha podido satisfacer por falta de disponibilidad del inventario, y las ordenes pendientes es la cantidad de órdenes de abastecimiento que aún no llegan del proveedor hacia el sistema de inventario.

La posición del inventario representa la cantidad real de la cual dispone (ahora y en un futuro próximo) el sistema para suplir su demanda. Observe que la posición del inventario goza de la propiedad de estar acotada por un nivel máximo y mínimo sin importar que tan grande pueda ser la demanda durante el tiempo de reposición, esta propiedad lo hace el nivel adecuado para expresar el punto r en el cual se debe poner un pedido. En algunos casos es conveniente suponer que la probabilidad de tener más de una orden pendiente es bastante pequeña, o similarmente se puede suponer que es poco probable que la demanda en el tiempo de reposición sea excesiva como vamos a ver en el apartado siguiente

2.7.2 Modelo $\langle Q, r\rangle$ aproximado con demanda y tiempo de reposición variables

En realidad cuando se trata de modelos estocásticos, ninguna función de costo es exacta en el sentido de que es poco probable que en un año dado los costos del sistema sean iguales a los costos asociados al modelo, debido precisamente a que la demanda es incierta y por lo tanto es imposible predecir con toda confianza el comportamiento del sistema en un periodo de tiempo cualquiera. Lo que se hace es trabajar con una función de costos esperados, es decir se expresa el modelo en términos de los costos esperados para el sistema anualmente, y por lo tanto se "espera" que el comportamiento real no se aleje demasiado de la abstracción. Los valores esperados deprenderán lógicamente de la naturaleza del proceso estocástico que defina la demanda y el tiempo de reposición. Cuando se habla de una función de costo exacta se trata entonces de una función que tiene todos los valores esperados bien definidos y que se calculan sobre todas las probabilidades de las variables; pero incluso en ocasiones se torna muy difícil calcular un valor esperado tal cual, así que se hacen suposiciones adicionales, y en este sentido se obtiene un modelo aproximado.

Veamos una función de costo aproximada para un modelo $\langle Q, r\rangle$. Q y r se tratarán como variables continuas, pero el caso puede extenderse fácilmente a variables discretas. Usaremos las siguientes variables y parámetros:

D: Demanda esperada anual, no varía ya que se supone una demanda estacionaria

T: Tiempo de reposición, es una variable aleatoria

X: Demanda durante el tiempo de reposición, es variable aleatoria

$\mu = E(X)$: Demanda esperada en el tiempo de reposición

$f(x|t) = P(X = x\ daddo\ que\ T = t)$: Distribución de probabilidad condicionada de la variable X dado $T = t$

$g(t) = P(T = t)$: Distribución marginal de la variable aleatoria T

$h(x) = P(X = x)$: Distribución marginal de la variable X

$H(x) = P(X \leq x)$: Distribución acumulada de X

A: Costo fijo de ordenar

h: Costo unitario de mantenimiento por unidad de tiempo

p_0: Costo de penalización por unidad de pedido pendiente

p: Costo de penalización por unidad de pedido pendiente por unidad de tiempo

Q: Cantidad a pedir en cada orden

r: Nivel de inventario en el que se debe colocar una orden

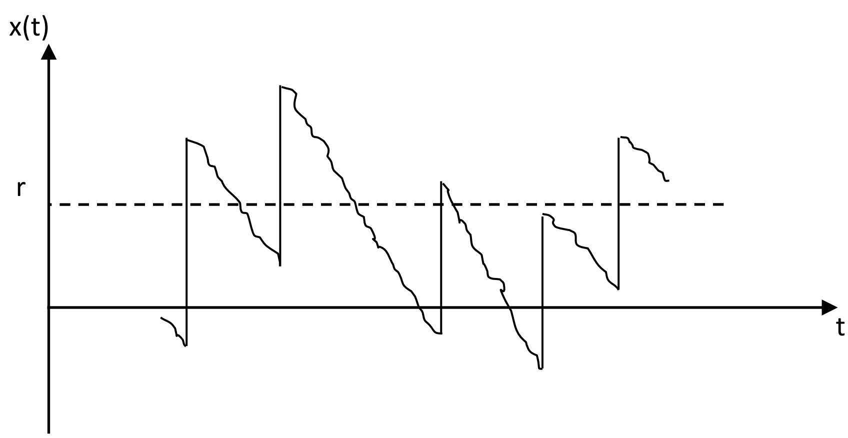


Figura 4

En cada ciclo la posición del inventario se mueve entre r y $Q + r$, es decir que se demandan Q unidades en cada ciclo, como la demanda anual esperada es D, entonces el número esperado de ciclos anuales es D/Q, por lo tanto el costo esperado anual de ordenar es

$$Costo\ esperado\ anual\ de\ ordenar = \frac{D}{Q}A$$

Supongamos que nunca hay más de una orden pendiente, al estar r expresado en función de la posición del inventario, esta suposición garantiza que en cada llegada de un lote el nivel de inventario neto se elevará por encima de r.

Tomemos dos órdenes sucesivas para definir un ciclo y en base a esto definamos también las siguientes variables aleatorias en ese ciclo

$B(x,r)$: Nivel de pedidos pendientes en el ciclo

$y_m(x,r)$: Nivel mínimo del inventario físico

$y_M(x,r)$: Nivel máximo del inventario físico

Si x es la demanda en el tiempo de reposición, entonces se tiene que

$$B(x,r) = \begin{cases} x - r & si\ x > r \\ 0 & si\ x \leq r \end{cases}$$

$$y_m(x,r) = \begin{cases} r - x & si\ x \leq r \\ 0 & si\ x > r \end{cases} \quad y_M(x,r) = \begin{cases} Q + y_m(x,r) & si\ x \leq r \\ Q - B(x,r) & si\ x > r \end{cases}$$

El valor esperado de cada una de estas variables es

$$E[B(x,r)] = \overline{B}(r) = \int_0^\infty B(x,r)h(x)dx = \int_0^\infty (x-r)h(x)dx = \int_r^\infty xh(x)dx - r\int_r^\infty h(x)dx$$

$$= \int_r^\infty xh(x)dx - r\widehat{H}(r)$$

$$E[y_m(x,r)] = \overline{y}_m(r) = \int_0^\infty y_m(x,r)h(x)dx = \int_0^r (r-x)h(x)dx$$

$$= r\int_0^r h(x)dx - \int_0^r xh(x)dx = rH(r) - \int_0^r xh(x)dx$$

$$E[y_M(x,r)] = \overline{y}_M(r) = \int_0^\infty y_M(x,r)h(x)dx$$

$$= \int_0^r [Q + y_m(x,r)]h(x)dx + \int_r^\infty [Q - B(x,r)]h(x)dx$$

$$= Q\int_0^r h(x)dx + \int_0^r y_m(x,r)h(x)dx + Q\int_r^\infty h(x)dx - \int_r^\infty B(x,r)h(x)dx$$

$$= Q\left\{\int_0^R h(x)dx + \int_r^\infty h(x)dx\right\} + \overline{y}_m(r) - \overline{B}(r) = Q + \overline{y}_m(r) - \overline{B}(r)$$

La fracción del tiempo durante la que existe desabastecimiento en el sistema será intuitivamente $\frac{\overline{B}(r)}{Q}$ y por lo tanto la fracción de tiempo durante el cual existe inventario físico será: $1 - \frac{\overline{B}(r)}{Q}$

Si suponemos que la tasa de demanda es constante, entonces también podemos suponer que el nivel esperado de inventario físico disminuirá linealmente desde el nivel máximo $\overline{y}_m(r)$, hasta su nivel mínimo $\overline{y}_m(r)$, por lo que el nivel medio esperado puede escribirse como:

$$\frac{\overline{y}_m(r) + y_m(r)}{2} = \frac{Q + \overline{y}_m(r) - \overline{B}(r) + \overline{y}_m(r)}{2} = \frac{Q - \overline{B}(r)}{2} + \overline{y}_m(r)$$

Si h es el costo anual de mantener una unidad y $1 - \frac{\overline{B}(r)}{Q}$ la fracción en la cual se espera que exista inventario físico, entonces el costo anual esperado de mantenimiento es:

$$h\left(1-\frac{\overline{B}(r)}{Q}\right)\left\{\frac{Q-\overline{B}(r)}{2}+\overline{y}_m(r)\right\}$$

p_0, es el costo por cada pedido pendiente por unidad de tiempo, $\overline{B}(r)$ es el número esperado de pedidos pendientes en el ciclo, y $\frac{D}{Q}$ es el número esperado de ciclos, entonces el costo anual esperado por pedido pendientes es:

$$p_0\,\frac{D}{Q}\overline{B}(r)$$

P, es el costo de pedido pendiente por unidad de tiempo, $\frac{\overline{B}(r)}{2}$ es el nivel medio de los pedidos pendiente en el ciclo, y $\frac{\overline{B}(r)}{Q}$ es la fracción del ciclo en la cual existen los pedidos pendientes.

Entonces el costo anual esperado por pedido pendiente que es proporcional al tiempo se puede escribir como:

$$P\,\frac{\overline{B}(r)}{2}*\frac{\overline{B}(r)}{Q}=\frac{P\left(\overline{B}(r)\right)^2}{2Q}$$

En resumidas cuentas tenemos que la función de costo esperado aproximado para el sistema de inventarios es:

$$K(Q,r)=\frac{D}{Q}A+h\left(1-\frac{\overline{B}(r)}{Q}\right)\left\{\frac{Q-\overline{B}(r)}{2}+\overline{y}_m(r)\right\}+p_0\,\frac{D}{Q}\overline{B}(r)+\frac{P\left(\overline{B}(r)\right)^2}{2Q}$$

Donde

$$\overline{B}(r) = \int_{r}^{\infty} xh(x)dx \quad - \quad r\widehat{H}(r)$$

$$\overline{y}_m = rH(r) - \int_{0}^{r} xh(x)dx$$

$$H(r) = \int_{0}^{r} h(x)dx \qquad \widehat{H}(r) = 1 - H(r) \qquad h(x) = \int_{0}^{\infty} f(x|t)g(t)dt$$

2.7.3 Tasa de ocupación del sistema y nivel de servicio

En modelos estocásticos existe una tendencia a medir la fracción o proporción del tiempo en el cual el sistema tiene inventario disponible, y lógicamente la fracción del tiempo en la que el sistema se encuentra desabastecido. La tasa de ocupación del sistema puede interpretarse como la probabilidad de que en cualquier punto del tiempo el sistema tenga inventario disponible, es decir, cuando un cliente llega, la tasa de ocupación nos dice la probabilidad de poder satisfacer esa demanda.

El nivel de servicio se usa para referirse al nivel de satisfacción de los clientes con el sistema de inventario, desde este punto de vista, la tasa de ocupación ofrece una medida razonable para el nivel de servicio, entre más posibilidad halla de atender una demanda en particular, se espera entonces que la satisfacción del cliente respecto al servicio también sea mayor.

El nivel de servicio es un indicador muy importante para el sistema, así que se vuelve imperativo calcular la tasa de ocupación para poder ejercer control sobre los niveles de servicio que ofrece el sistema

2.8 ESTADO DEL ARTE

Un sistema de control de inventarios responde básicamente a dos preguntas cuanto ordenar y cuando se debe hacer el pedido. En el transcurso de los años, cientos de artículos y libros han publicado modelos para el control de inventarios bajo diversas condiciones y supuestos [11]. Muchas variaciones del modelo del tamaño del lote económico han sido estudiados ampliamente desde que Harris (1913) presentó por primera vez la famosa formula de cantidad económica de pedido EOQ. En la literatura sobre la teoría de inventario encontramos mucha información que contiene los modelos básicos de EOQ con y sin escasez [12]. Puesto que el modelo EOQ se construye sobre la base de algunos supuestos y condiciones que limitan su aplicabilidad en situaciones del mundo real, muchos investigadores se han esforzado por desarrollar un modelo de inventario que se asemeje más a la realidad.

El modelo (Q, r) es una de las políticas de control más comunes de los modelos de inventario. Se define como un modelo de revisión de inventario permanente, de una orden de magnitud constante Q la cual se pone cada vez que la posición del inventario cae a un punto fijo de reorden r. Una cuestión importante en sistemas de inventario (Q, r) es determinar los valores de r y Q que reduzcan al mínimo los costes del sistema.

En 1963 Hadley and Whitin [10] derivaron formalmente la función de costo exacta para el caso en que la demanda fuera Poisson y el tiempo de reposición fuera fijo o tuviera una distribución normal. Sin embargo para optimizar analíticamente la función objetivo, debido a que la función de costo es compleja y no siempre convexa, hicieron algunas consideraciones, tal como suponer que la demanda durante el tiempo de reposición es menor que el punto de pedido, es decir, consideran sólo el caso para el cual no existen pedidos pendientes en el momento en que llega una nueva orden.

Desde que Hadley y Whitin proporcionaron funciones de costos aproximados y exactos para una política (Q, r), estos modelos han sido ampliamente utilizados para examinar diversos problemas de inventarios. Herron [13], Nahmias y Wang [14], y Moinzadeh Nahmias [15], Johansen y Thorstenson [16], Cakanyildirim et al. [17] son representativos de dicha literatura. En Zipkin [17] se obtienen algunas referencias adicionales. Desde que Zipkin demostró la convexidad conjunta de la función de costo (Q, r), muchos investigadores han estudiado la función del modelo de costo (Q, r). Federgruen y Zheng [18] proporcionan un algoritmo simple y eficiente para el cálculo de un óptimo (Q, r), Zheng [19] analiza el modelo correspondiente a demanda continua y proporciona muchas propiedades interesantes de los parámetros de control óptimo.

Hopp et al. [20] consideran un modelo de inventario multi-artículo (Q, r) con demanda Poisson, tiempo de reposición fijo y donde las ventas no satisfechas se consideran pedidos pendientes, la decisión que se considera como política de inventario es minimizar la inversión del inventario restringido a cierta frecuencia de pedido y cierto nivel de satisfacción. El modelo es analizado sólo para el caso en el que no existan pedidos pendientes en el momento en que llega una nueva orden. Para formular el modelo se desarrollan tres heurísticas, basadas en simplificaciones sobre el nivel de satisfacción, utilizan la teoría de multiplicadores de Lagrange para derivar expresiones simples para los valores de Q y r.

Para los sistemas de inventario (Q, r) se han estudiado muchos algoritmos para encontrar los valores óptimos. Por ejemplo, para los modelos con los pedidos pendientes, se propone un algoritmo eficiente para encontrar políticas óptimas de los sistemas de inventario discretos en Federgruen y Zheng [21]. Otro trabajo similar incluye Axsäter [22], Hadley y Whitin [10], Lau et al. [23], Sahin [24], Sivazlian [25], y Zheng [26]. Para los modelos con la pérdida de ventas, los estudios pueden ser referidos a Hill y Johansen [27] y las referencias que allí se encuentran. Zipkin [17] proporciona una introducción detallada a una gran variedad de modelos con políticas (Q, r).

Debido a que los recursos disponibles para la gestión del inventario son limitados, se debe utilizar los recursos con eficacia, especialmente cuando varios elementos se encuentran presentes. Por lo tanto, hay una necesidad de investigar sistemas de inventario con varios artículos y recursos limitados.

Muchos modelos tradicionales de inventarios multi-artículos con demanda independiente bajo ciertas limitaciones de recursos se discuten en la literatura [8, 10, 29]. Estos estudios se concentraron en la optimización de (Q, r) teniendo en cuenta el inventario promedio, los desabastecimientos, y otros criterios en función de Q y r, Por ejemplo, la demanda estocástica, el costo variable, el tiempo de entrega, pedidos pendientes , restricción de nivel de servicio (o tasa de llenado), las limitaciones de restricción presupuestaria, la restricción de espacio de almacenamiento, y otras restricciones las cuales han sido integradas en el sistema (Q, r) [29-33].

Otros modelos de sistemas continuos de inventarios respecto al modelo (Q, r), con demanda estocástica y escasez permisible se han estudiado. Véase, por ejemplo, Brown y Gerson [28], Hadley y Whitin [10], Parker [29], Tinarelli [30], Wagner [31], y Yano [33]. La mayoría de estos modelos no incluyen restricciones en presupuesto, almacenamiento y carga de orden de trabajo. Algunos de estos modelos manejan la escasez mediante la evaluación de una sanción por unidad, por ejemplo, Hadley y Whitin [10], mientras que otros incluyen escasez como limitaciones, por ejemplo, Yano [32].

También hay muchas clases de modelos estocásticos multi-productos con escasez que incluyen restricciones sobre inversión en el inventario, almacenamiento o carga de trabajo. Brown y Gerson [34] desarrollaron tres modelos para sistemas estocástico multi-articulo con restricciones presupuestarias. El modelo más general incluye una suma de los costos esperados y los costos de escasez en la función objetivo, pero no tiene en cuenta los costes de inventario de explotación. Brown y Gerson definieron la inversión total en inventario en una función determinística de cantidad de pedido y punto de reorden. Schrady y Choe [35] minimizaron el tiempo ponderado total con la escasez de presupuesto y restricciones de carga de trabajo. Las restricciones son determinísticas ya que los costos de pedidos se generan en el momento en que se hace un pedido. Schroeder [36] presenta un modelo limitado por orden total anual esperado y costos de mantenimiento con el objetivo de minimizar el número previsto de unidades pendientes de entrega por año. Los costos asociados con falta de existencias no se consideran en ninguno de estos modelos. En Holt et al. [20], el objetivo es minimizar el pedido total esperado, los costos de mantener y los costos de tiempo ponderado de escasez que satisface la restricción del inventario total esperado. El procedimiento de solución utiliza expansiones lineales de funciones no lineales sobre la base de diferencias finitas. La restricción en este modelo es deterministica y el procedimiento de solución no hace control directamente de los errores introducidos por expansiones lineales. Gardner [38] sugiere que los parámetros de los costos marginales son difíciles de medir con precisión. Se desarrolla un modelo para reducir al mínimo el número esperado de pedidos pendientes sujeto a las restricciones sobre la inversión agregada y la carga de trabajo. Las restricciones presupuestarias son deterministas

Uno de los aspectos más difíciles de la mayoría de las decisiones de inventario, es la multitud de productos involucrados. Otro es el conjunto de restricciones que se deben considerar; muy a menudo estos dos retos existen en el mismo tiempo. La gran mayoría de los trabajos realizados al respecto consideran sólo una restricción, dos excepciones son los enfoques propuestos por Maloney y Klein [38] y Guder and Zydiak [39] que manejan dos limitaciones de recursos. El problema crítico entonces, es asegurarse de que una restricción de recursos (por ejemplo, el presupuesto, almacén, espacio, etc.), no se viola cuando esta sucede. El enfoque habitual es determinar la cantidad de pedido para cada elemento; es decir la clásica cantidad económica de pedido (EOQ) y comprobar si la restricción de recursos se violará cuando todas las existencias alcancen su pico en el mismo tiempo para las cantidades a ordenar. En caso de que la restricción sea violada, las cantidades a ordenar deben ser reducidas. El método más frecuentemente sugerido es el uso de los multiplicadores de Lagrange para encontrar cantidades de orden que no violen la restricción de recursos. Este es el método que se sugiere para la solución del problema en muchos libros de texto incluyendo Holt et al. [7], Hadley y Whitin [10], Buchan y Koenigsberg [27], Johnson y Montgomery [8], Tersine [41], y Nahmias [3]. En otras publicaciones, Parsons [42] considera el problema tanto para el clásico modelo EOQ y el modelo EOQ de tamaño de lote EOQ. Usando Multiplicadores de Lagrange, Parsons desarrolló las fórmulas para la cantidad de pedido óptima para tipos específicos de restricciones, asumiendo sólo una restricción activa en un tiempo. Ziegler [43] propuso una aproximación algoritmo, que determina cotas superiores e inferiores de los multiplicadores de Lagrange. Maloney y Klein [44] desarrollaron un algoritmo que proporciona el valor óptimo los multiplicadores de Lagrange y los valores necesarios para optimizar el modelo de inventario multi-producto. En un artículo posterior, Maloney y Klein[44] desarrollaron un algoritmo para el problema con dos restricciones.

Bretthauer et al. [45] centro su estudio en un modelo de programación entera en general para el problema única restricción y desarrollado una heurística y método de solución por medio del algoritmo Branch and Bound. Los autores identificaron varios otros problemas de la gestión de las operaciones y estadísticas con la misma estructura que puede ser resuelto por la heurística. La principal desventaja del método de Lagrange es que en muchos casos los Multiplicadores de Lagrange no se pueden obtener directamente y estos deben ser estimados por ensayo y error, al aplicar el método Lagrangiano en problemas con más de una restricción este se vuelve más difícil y muchas veces no se puede dar el resultado preciso.

Rabinowitz et al. [46], analizo un modelo de inventario (Q, r), donde se permite un número máximo de pedidos pendientes b, durante el periodo de desabastecimiento las primeras b unidades de demanda entrante son pedidos pendientes y las unidades restantes se considera ventas perdidas. Bajo el supuesto de demanda poisson y considerando cuando mucho un pedido pendiente, ellos derivaron la función de costo esperado anual y emplearon un exhaustivo método de búsqueda para encontrar los valores óptimos de Q, r y b. Chu et al [47] generalizo el modelo anterior dividiendo el tiempo de espera en dos segmentos y utilizando dos límites de control de pedidos pendientes, uno para cada segmento de tiempo.

Moon y Gallego [48], introducen los procedimientos de libre distribución en el análisis de modelos de inventarios estocásticos. Ellos resuelven tanto el modelo de revisión continua como el modelo de revisión periódica ambos con una mezcla de pedidos pendientes y ventas perdidas, usando el enfoque de distribución libre. El tratamiento del modelo de revisión periódica es heurístico.

Guoqiang Peter Zhang Y Ching-Wu Chu [49], desarrollaron un modelo de inventario hibrido entre ordenes de emergencias (ventas perdidas) y pedidos pendientes para el manejo de la escasez, ellos asumieron la demanda poisson y los tiempos de entrega constante. En la etapa temprana del tiempo de espera, la escasez es cubierta por las órdenes de emergencia y como el tiempo de reposición es aproximado, las órdenes de emergencia se sustituyen por pedidos pendientes. El sistema tradicional de pedidos pendientes y ordenes de emergencia son un caso especial de este sistema hibrido.

Babak Ghalebsaz-Jeddi, Bruce C. Shultes, Rasoul Haji [50], propusieron un modelo de inventarios (Q ,r) en el cual agregaron una restricción presupuestaria o de almacenamiento para el modelo estocástico sin restricciones descritos en Hadley y Whitin [10] para un sistema de inventarios multiproducto con pedidos pendientes. El nuevo modelo supone que los costos de compra se pagan cuando los productos llegan y limita la probabilidad de que la inversión máxima en inventario total supere un determinado valor. El problema fue resuelto mediante el método de los multiplicadores de lagrange.

Zhao et al [51], desarrollo un modelo (Q, r) con una restricción de almacenamiento-espacio para el modelo de inventario, el problema de optimización es resuelto y se halla la política óptima. Otra restricción que puede ser considerada en el modelo es la inversión de capital tal como lo describe Minner y Silver [52] estudiaron el modelo multiproducto con restricciones de espacio/presupuestó e inversión de capital con tiempo de entrega cero y sin permitir pedidos pendientes. Ellos mostraron que bajo demanda poisson el problema puede ser formulado como un proceso de decisión markoviano y puede encontrarse el óptimo para problemas de pequeño tamaño. En el artículo de Betts y Johnston [53] se hace una discusión similar del modelo propuesto. Jeddi, B.G., Shultes, B.C., Haji, R [54], estudiaron un modelo multiproducto de revisión continua con demanda aleatoria sujeto a una restricción presupuestaria cuando el pago se realiza cuando llega la orden.

Hopp and Spearman [55], desarrollaron un modelo multiproducto (Q, r) con pedidos pendientes y utilizaron un algoritmo de optimización que estimaba las políticas de inventario en un único centro de distribución con demanda poisson y asumieron tiempo de entrega fijo.

Moncer A. Hariga [56], abordo el modelo estocástico de revisión continua (Q, R) de un solo elemento en presencia de una restricción de espacio. El modelo desarrollado supone que la cantidad sobreordenada puede ser devuelta al proveedor, a un costo determinado. Posteriormente el autor amplió el modelo cuando la cantidad sobreordenada se almacena en un depósito alquilado.

Pasandideh and Niaki [57], desarrollaron un modelo EOQ multiproducto, en el cual se limita el espacio en almacén y los pedidos se entregan de forma discreta por medio de varias paletas, Bajo estas condiciones se formuló el problema como programación entera no lineal (NIP) y propusieron un algoritmo genético para resolverlo.

Das et al. [58] desarrolló un modelo de inventario multi-elemento con demanda constante y reposición infinito bajo las restricciones de área de almacenamiento, el costo total promedio escasez y el costo total promedio de inventario inversión.

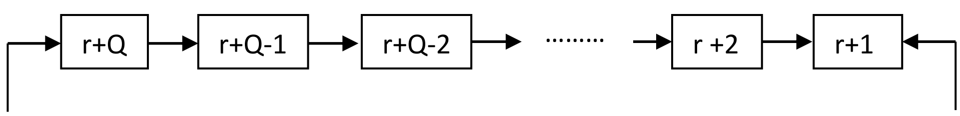
Ben-Daya y Raouf [59] desarrollaron un modelo multiarticulo para un solo período, donde la demanda de productos sigue una distribución de probabilidad uniforme sujeto a las restricciones de espacio disponible y presupuesto

3 METODOLOGÍA

3.1 NIVEL DE INVENTARIO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDO

Los niveles de inventario en el sistema (inventario físico, inventario neto, posición del inventario) se comportan de forma distinta. La posición del inventario ofrece la posibilidad de trabajar con un nivel que este acotado, pero cuando se especifica la posición del inventario en el sistema no queda especificada de manera única la cantidad de inventario disponible o pedidos pendientes ya que estas dependerán del número de órdenes que no hayan llegado al sistema.

Cuando se trata las variables Q, r como variables discretas la posición del inventario varía entre r+1 y r + Q. Si la demanda ocurre una a la vez entonces el sistema pasara por cada uno de esos estados como se muestra en el siguiente diagrama:



La transición de un estado a otro se da al ocurrir una demanda, cuando la posición del inventario se encuentra en el estado r+1 y ocurre una demanda, entonces se llega al estado r, pero inmediatamente se coloca una orden la cual eleva la posición del nivel de inventario al estado r + Q. Entonces si K denota la posición del estado del inventario, tenemos:

$$K = r + 1, r + 2, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, r + Q - 1, r + Q$$

$$r + 1 \leq k \leq r + Q$$

Necesitamos por lo tanto hallar la probabilidad asociada de cada estado y basar el cálculo de los valores esperados de los costos en función de estas probabilidades que describen los estados del sistema.

En general es muy complicado hallar la distribución de probabilidad de cada uno de los estados del sistema. Aquí vamos a suponer que la demanda se da una a la vez y que esta descrita con un proceso de Poisson, bajo tales suposiciones la posición del inventario esta uniformemente distribuida entre sus Q posibles valores

$$r+1, r+2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, r+Q-1, r+Q.$$

Para una demostración formal de este hecho, ver [17].

Para tener una idea intuitiva de esto supongamos que se observa la posición de inventario en un punto aleatorio del tiempo, si tenemos en cuenta que la demanda se da una por una, que la tasa esperada de demanda se mantiene constante, y que cada vez que ocurre una demanda el nivel cambia de estado, entonces ¿habrá razón alguna para pensar que uno de los estados es más probable que los demás?

Si k denota el estado en el cual se encuentra la posición del inventario en un punto arbitrario del tiempo, entonces:

$$P(posicion\ del\ inventario = k) = P(k) = \frac{1}{Q} \qquad k = r+1, r+2, \dots\dots\dots\dots. r+Q$$

3.2 MODELO $\langle Q, r\rangle$ CON TIEMPO DE REPOSICIÓN FIJO

Usaremos la siguiente notación para describir la función de costo de un modelo $\langle Q, r\rangle$, donde el tiempo de reposición es fijo

D: Demanda anual esperada

T: Tiempo de reposición (fijo)

X: demanda durante el tiempo de reposición, es variable aleatoria

$\mu_x = E(x)$: Valor esperado de la demanda durante el tiempo de reposición

$\mathrm{g}\,(\mathrm{x}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x})$: Distribución de probabilidad de la variable aleatoria X

$\mathrm{G}(\mathrm{x}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x})$: Distribución acumulada de probabilidad de la variable aleatoria X

A: Costo fijo de ordenar

h: Costo anual de mantenimiento por unidad en bodega

p_0: Costo de penalización por unidad de pedido pendiente

p: Costo anual de penalización por unidad de pedido pendiente

Q: Cantidad a pedir en cada orden (variable de decisión)

r: Nivel de inventario en el que se debe colocar una orden (variable de decisión)

$\mathrm{S}(Q, r)$: Tasa de ocupación del sistema de inventario

$\bar{B}(Q, r)$: Número promedio de pedidos pendientes en el sistema

$\bar{y}(Q, r)$: Valor esperado de unidades disponibles.

Q y r serán variables discretas. Partiremos del hecho que la demanda se da una a la vez y la posición del inventario esta uniformemente distribuida, pero no consideraremos ninguna distribución de probabilidad especial para la demanda.

El comportamiento del sistema es como se muestra en la siguiente gráfica:

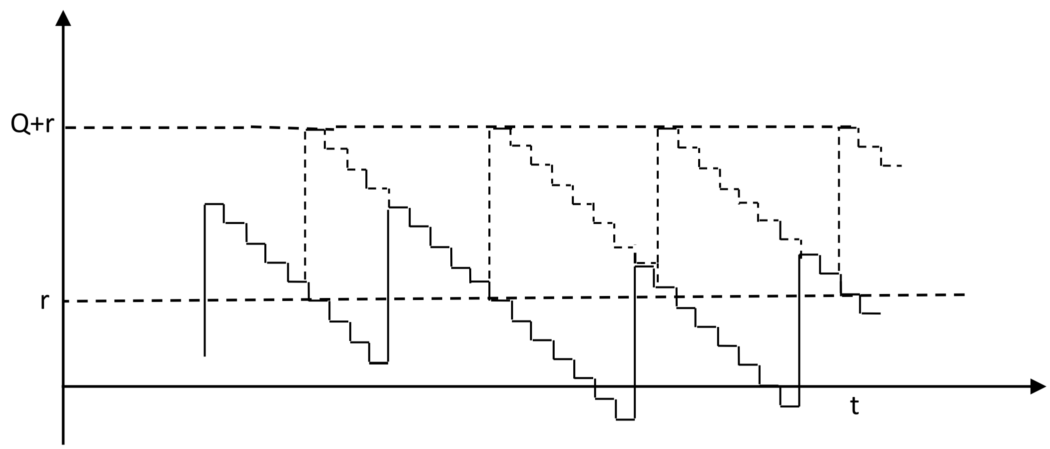


Figura 5

Suponga que observamos el sistema en un tiempo arbitrario t, la probabilidad que la posición del inventario este en el estado K es:

$$p(k) = \frac{1}{Q} \qquad\qquad K = r + 1, r + 2, \dots \dots \dots r + Q$$

Ahora veamos que sucede en el tiempo t +T, donde T es el tiempo de reposición

Nótese que en el transcurso de un tiempo T habrán llegado todas las ordenes que estaban pendientes, además toda orden puesta entre t y t +T de seguro que no habrá llegado aún, por lo tanto podemos decir que en el tiempo t + T el inventario neto será igual a la posición del inventario en el tiempo t menos las unidades demandas entre t y t + T, es decir **X**. El nivel de inventario neto es más favorable para evaluar la cantidad de pedidos pendientes e inventario físico. Entre el tiempo t y t + T se demanda **X** unidades. La probabilidad de que en t + T halla escasez dado que la posición de inventario en t era k, es la probabilidad de que la demanda **X** sea mayor o igual a k, es decir:

P (escasez en t + T, dada una posición k del inventario en t)

$$=P(x \geq k) = 1 - p(x < k) = 1 - P(x \leq k-1)$$

$$= 1 - G(k-1)$$

La probabilidad de que el sistema se encuentre en escasez en t + T es por lo tanto (una probabilidad total)

P (escasez en t+ T) $=\sum_x p(k)P(x \geq k)$

$$= \sum_{k=r+1}^{r+Q} \frac{1}{Q}[(1 - G(k-1)]$$

$$=\frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q}[(1 - G(k-1)] \qquad (3.1)$$

El complemento de la probabilidad anterior es:

$$1 - \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q}\frac{1}{Q}[(1 - G(k-1)] = \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q}(1) - \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q}[(1 - G(k-1)]$$

$$= \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q} G(k-1)$$

Y representa la probabilidad de que el sistema no se encuentre en escasez en el tiempo t +T, es decir la tasa de ocupación del sistema.

$$\Rightarrow \quad S(Q,r) = \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q} G(k-1) \qquad (3.2)$$

De forma similar tenemos que el número esperado de pedidos pendientes, dado que la posición del inventario es k, es:

$$B(k) = \sum_{x=k}^{\infty} (x-k)g(x)$$

Por lo tanto el número esperado de pedidos pendientes es:

$$\bar{B}(Q,r) = \sum_{k} p(k)B(k)$$

$$\bar{B}(Q,r) = \sum_{k=r+1}^{r+Q} \frac{1}{Q}.B(k) = \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q}\left(\sum_{x=k}^{\infty}(x-k).g(x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{B}(Q,r) = \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q} B(k) \qquad (3.3)$$

Para calcular el nivel medio de inventario físico, $\bar{y}(\mathrm{Q,r})$ denotemos por $y(k)$ el nivel de inventario físico esperado en el tiempo t +T, dado que K es la posición del inventario en t, entonces:

$$y(k) = \sum_{x=0}^{k-1} (k-x)g(x)$$

Es conveniente expresar $y(k)$ en función de $B(k)$, observe que:

$$\sum_{x=0}^{\infty}(x-k)g(x) = \sum_{x=0}^{\infty} xg(x) - k\sum_{x=0}^{\infty} g(x)$$

$$= \mu_x - k(1) = \mu_x - k \qquad (3.4)$$

De igual manera:

$$\sum_{x=0}^{\infty}(x-k)g(x) = \sum_{x=0}^{k-1}(x-k)g(x) + \sum_{x=k}^{\infty}(x-k)g(x)$$

$$= -\sum_{x=0}^{k-1}(k-x)g(x) + \sum_{x=k}^{\infty}(x-k)g(x)$$

$$= -\,y(k) + \,B(k)$$

Y comparando con 3.4 tenemos que:

$$\mu_x - K = -\,y(k) + \,B(k)$$

$$\Rightarrow \;\; y(k) = K + \,B(k) - \,\mu_x$$

Ponderando sobre los posibles valores de k obtenemos:

$$\bar{y}(Q,r) = \,\sum_{k} p(k).\,y(k) = \sum_{k=r+1}^{r+Q}\left(\frac{1}{Q}\right)(k + B(k) - \,\mu_x)$$

$$= \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q}[k - \,\mu_x + B(k)]$$

$$= \frac{1}{Q}\left\{\sum_{k=r+1}^{r+Q} k - \mu_x \sum_{k=r+1}^{r+Q}(1) + \sum_{k=r+1}^{r+Q} B(k)\right\}$$

$$= \frac{1}{Q}\left\{\frac{(Q+1)Q}{2} + Qr - \mu_x Q + Q\,\overline{B}(Q,r)\right\}$$

$$\Rightarrow \;\; \overline{y}(Q,r) = \frac{(Q+1)}{2} + r - \mu_x + \,\overline{B}(Q,r) \qquad (3.5)$$

- El costo esperado anual por ordenar es $\frac{D}{Q}\,A$
- El costo esperado anual de mantenimiento es $h\,\overline{y}(Q,r)$
- El costo esperado anual por pedido pendiente proporcional al tiempo es $p\overline{B}(Q,r)$

La cantidad de la demanda insatisfecha que se espera es de $D[1 - s(Q,r)]$, asi que el costo esperado por la demanda insatisfecha es:

$$p_0\, D[1 - s(Q,r)]$$

Teniendo esto en cuenta, y las ecuaciones (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5) la función de costo esperado es:

$$K(Q,r) = \tfrac{D}{Q}\, A + h\bar{y}(Q,r) + \ p_0\, D[1 - s(Q,r)] + p\,\bar{B}(Q,r) \qquad (3.6)$$

Donde:

$$\bar{y}(Q,r) = \frac{(Q+1)}{2} + r - \mu_x + \ \bar{B}(Q,r)$$

$$\bar{B}(Q,r) = \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q} B(k)$$

$$S(Q,r) = \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q} G(k-1)$$

3.3 CASO CON DEMANDA POISSON

Vamos ahora a reducir las ecuaciones de (3.6) al caso donde la demanda se describe mediante un proceso de Poisson:

$$\Rightarrow g(x) = \frac{e^{-u}u^x}{x!} \qquad u, es\ la\ demanda\ media\ durante\ el\ tiempo\ de\ reposición$$

La tasa de ocupación del sistema es

$$S(Q,r) = \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q} G(k-1) = \frac{1}{Q}\{G(r) + G(r+1) + \cdots \ldots \ldots G(r+Q-1)\}$$

En general es difícil manipular esta ecuación en el modelo muchos autores optan por una aproximación. Quizás la más recurrida de todas es

$$S(Q,r) \approx G(r)$$

Que suele llamarse nivel de servicio tipo I ver [56]. El principal inconveniente de esta aproximación es que $G(r)$ subestima a $S(Q,r)$. $G(k)$Es una función creciente así que en la suma

$$\frac{G(r) + G(r+1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + G(r+Q-1)}{Q}$$

$G(r)$ Es el menor de los Q términos, por lo que en efcto G(r) subestima a $S(Q,r)$. La ventaja principal de este enfoque a $G(r)$ solo es función de una de las variables por lo que la hace bastante más cómoda para trabajar.

Como puede verse en [55]

La tasa de servicio puede reescribirse como

$$S(Q,r) = 1 - \frac{1}{Q}[B(r) - B(r+Q)]$$

Siendo $B(k) = \sum_{x=k}^{\infty}(x-k)g(x)$

Si se hace $S(Q,r) \approx 1 - \frac{B(r)}{Q}$, se tiene el nivel de servicio tipo II. Igualmente para este caso la aproximación subestima el valor real de $S\,(Q,r)$.

Para tratar de mitigar un poco este efecto, en este trabajo se propone trabajar con un promedio aritmético de los valores mínimos y máximo en la ecuación:

$$S(Q,r) = \frac{1}{Q}\{G(r) + G(r+1) + \ldots\ldots\ldots\ldots.. + G(r+Q-1)\}$$

Con lo que tendríamos:

$$S(Q,r) \approx \hat{S}(Q,r) = \frac{G(r) + G(r+Q-1)}{2} \qquad (3.7)$$

$\hat{S}(Q,r)$ es función de ambas variables, pero su forma es más simple que la fórmula exacta

$$S(Q,r) = 1 - \frac{1}{Q}[B(r) - B(r+Q)]$$

Además como promedio, se centraliza y no tiende a subestimar como el caso en que $S(Q,r) \approx G(r)$

Para la ecuación (3.3):

$$\bar{B}(Q,r) = \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q} B(k) = \frac{1}{Q}\{B(r+1) + \dots\dots\dots\dots + B(r+Q)\}$$

Se propone una alternativa similar, haciendo

$$\bar{B}(Q,r) \approx \hat{B}(Q,r) = \frac{B(r+1) + B(r+Q)}{2} \qquad (3.8)$$

Con lo que la tasa de ocupación, y el valor medio esperado de pedidos pendientes quedarían aproximados por:

$$S(Q,r) \approx \hat{S}(Q,r) = \frac{G(r) + G(r+Q-1)}{2}$$

$$\bar{B}(Q,r) \approx \hat{B}(Q,r) = \frac{B(r+1) + B(r+Q)}{2}$$

Siendo $B(k) = \sum_{x=k}^{\infty}(x-k)g(x)$ la función de pérdida

Si $g(x)$ es la distribución de poisson $B(k)$ puede escribirse como se ve en [55], de la siguiente forma:

$$B(k) = \sum_{x=0}^{\infty}(x-k)g(x) = \mu\, g(x) + (\mu - k)[1 - G(k)]$$

Y lógicamente

$$G(k) = \sum_{x=0}^{k} g(x) = \sum_{x=0}^{k} \frac{e^{-u} u^{x}}{x!}$$

Bajo estas consideraciones, la función de costo (3.6), teniendo en cuenta (3.7) y (3.8) puede rescribirse como:

$$K(Q,r) = \frac{D}{Q} A + h\,\hat{y}(Q,r) + p_0\,D[1 - \hat{s}(Q,r)] + p\hat{B}(Q,r)$$

Donde: (3.9)

$$\hat{y}(Q,r) = \frac{(Q+1)}{2} + r - \mu + \hat{B}(Q,r)$$

$$\hat{B}(Q,r) = \frac{1}{2}[B(r+1) + B(r+Q)]$$

$$\hat{S}(Q,r) = \tfrac{1}{2}[G(r) + G(r+Q-1)]$$

$$B(k) = \mu\, g(K) + (\mu - k)[1 - G(k)]$$

$$G(k) = \sum_{x=0}^{k} \frac{e^{-u} u^{x}}{x!}$$

μ es la media de la distribución de Poisson (la demanda esperada durante el tiempo de reposición)

3.4 MÚLTIPLESARTÍCULOS Y RESTRICCIONES

Solo falta ahora extender la función de costo en (3.9) al caso donde se consideran múltiples artículos y donde los recursos del sistema son limitados.

La función de costo para cuando hay N artículos es:

$\sum_{i=1}^{N} K(Q_i, r_i)$, donde cada $K(Q_i, r_i)$

Tiene la forma dada en (3.9)

Los modelos tradicionales consideran una o dos de las restricciones agregadas en este trabajo, en la parte de modelos determinísticos se vio la lógica usada para agregar restricciones, solo falta considerar el nivel de servicio o satisfacción que agregamos a continuación:

Empecemos con la frecuencia de pedidos en el sistema.

Si F_0 es el número máximo de pedidos que se puede hacer en el sistema anualmente y como para cada articulo i se tienen $\frac{D_i}{Q_i}$ pedidos anuales entonces la suma de los pedidos de todos los artículos no debe superar F_0

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{D_i}{Q_i} \leq F_0 \qquad (3.10)$$

De igual manera, si e_i es el espacio en bodega que ocupa cada unidad del artículo i, entonces el espacio requerido para almacenar un lote completo del artículo i es $e_i Q_i$

El espacio total para almacenar un lote completo de todos los artículos no debe ser mayor a E_0 que es el espacio máximo que hay en bodega:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} e_i Q_i \leq E_0 \qquad (3.11)$$

La forma matemática para la restricción de inversión máxima es idéntica a la restricción de espacio de almacenamiento.

Si c_i es el precio unitario del artículo i y si C_0 es la inversión máxima que se puede hacer en el sistema, entonces para los N artículos se debe cumplir:

$$\sum_{i=1}^{N} c_i Q_i \leq C_0 \tag{3.12}$$

Por último vamos a considerar el nivel de satisfacción del cliente o nivel de servicio. Suponga que el sistema está enfocado a una política de satisfacción al cliente, como ya se ha anotado, tal satisfacción se mide en probabilidad de satisfacer una demanda cualquiera o tasa de ocupación del sistema. Si el objetivo del sistema es mantener un nivel de servicio medio superior a S_0, entonces se hace necesaria una medida que represente el nivel de servicio del sistema teniendo en cuenta que hay N artículos diferentes. Si el nivel de servicio del artículo i es $S(Q_i, r_i)$ entonces una medida razonable para el nivel de servicio medio es:

$$\frac{1}{D_T}\sum_{i=1}^{N} D_i S(Q_i, r_i) \qquad donde, \quad D_T = D_1 + D_2 + \cdots + D_N$$

Haciendo uso de la aproximación propuesta en este trabajo se tiene que para cada artículo $i,\ S(Q_i, r_i) \approx \hat{S}(Q_i, r_i)$ donde cada $\hat{S}(Q_i, r_i)$ esta dado por 3.7

El valor aproximado del nivel medio de servicio es entonces:

$$\frac{1}{D_T}\sum_{i=1}^{N} D_i \hat{S}(Q_i, r_i)$$

De acuerdo a las políticas de satisfacción al cliente propuestas por el sistema, este nivel de servicio no debe ser inferior a S_0, por lo tanto

$$\frac{1}{D_T}\sum_{i=1}^{N} D_i \hat{S}(Q_i, r_i) \ \geq\ S_0$$

Tomando las ecuaciones (3.9), (3.10). (3.11), (3.12) y (3.13) tenemos que el modelo propuesto bajo las aproximaciones recomendadas es:

Minimizar $\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{D_i}{Q_i}A_i + h_i\hat{y}(Q_i,r_i) + p_{0i}\,D_i\left[1-\hat{S}(Q_i,r_i)\right] + p_i\,\overline{B}(Q_i,r_i)\right\}$ (3.14)

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{D_i}{Q_i} \leq F_0$$

$$\sum_{i=1}^{N} e_iQ_i \leq E_0$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_iQ_i \leq C_0$$

$$\frac{1}{D_T}\sum_{i=1}^{N} D_i\hat{S}(Q_i,r_i) \geq S_0$$

$$Q_i, r_i\text{: } enteros\ no\ negativos \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

Donde:

$$\hat{y}(Q_i,r_i) = \frac{(Q_i+1)}{2} + r_i - \mu_i + \hat{B}(Q_i,r_i)$$

$$\hat{B}(Q_i,r_i) = \frac{1}{2}[B(r_i+1) + B(r_i+Q_i)]$$

$$\hat{S}(Q_i,r_i) = \tfrac{1}{2}[G(r_i) + G(r_i+Q_i-1)]$$

$$B(k_i) = \mu_i g(x) + (\mu_i - k_i)[1-G(k_i)] \qquad G(k_i) = \sum_{x=0}^{k}\frac{e^{-u_i}{\mu_i}^x}{x!}$$

4 CONCLUSIONES, DISCUSIÓN DEL MODELO Y TRABAJO FUTURO

Desde el comienzo de este trabajo ha quedado claro que los modelos matemáticos resultantes en teoría de inventarios son variados y complejos, tanto la función objetivo como las restricciones por lo general son no lineales, lo cual dificulta enormemente la tarea de resolverlos.

En el presente trabajo se propuso un modelo tratando de encontrar un balance entre la aplicabilidad y la complejidad de dicho modelo. Se han considerado simultáneamente 4 restricciones para el sistema, 3 de ellas por limitación de los recursos: espacio de almacenamiento limitado, capacidad máxima de inversión y número máximo de pedidos; y una de ellas que supone una política de satisfacción al cliente que el sistema debe cumplir: nivel mínimo de servicio.

Se ha propuesto una medida para el nivel de servicio que requiere un poco más de cálculo que el conocido nivel de servicio tipo 1, pero a cambio ofrece un concepto más cercano al valor exacto.

De igual manera la expresión de pedidos pendientes ha sido simplificada en aras de reducir la complejidad del modelo.

La función objetivo por su parte es más compleja de lo que en general presenta un modelo de inventarios. Se han asociado dos tipos de penalizaciones para casos de escasez en inventario, uno de ellos penaliza el sistema cada vez que tiene que decir que no puede satisfacer una demanda, y el otro es un cargo proporcional al tiempo que tarde el sistema en satisfacer dicha demanda, lo cual junto con una política establecida de nivel de servicio hacen que el modelo esté más enfocado en la satisfacción del cliente.

Se ha usado un proceso de Poisson para describir la demanda, esta situación es algo ventajosa ya que la distribución de Poisson solo depende de un parámetro, y su fórmula es relativamente sencilla de manipular. Aun así el modelo en (3.14) es bastante formidable a la hora de resolverlo, teniendo que recurrir no a métodos exactos sino más bien a métodos eficientes.

Debido a que el trabajo corresponde a una investigación teórica, una de las principales recomendaciones de los autores es constatar la aplicabilidad del modelo a un sistema real. El trabajo puede extenderse aplicando un método heurístico, o una meta heurística que busque los valores óptimos de las variables para el sistema propuesto. Otra alternativa es reducir la función objetivo y tratar Q y r como variables continuas para aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange. Bajo ciertas circunstancias el método de multiplicadores de Lagrange ofrece los valores óptimos exactos a costa de perder precisión en el modelo

APÉNDICE

ESPACIO MUESTRAL: Se define como el conjunto de todos los resultados de un experimento estadístico y se representa por el símbolo S.

EVENTO: Un evento es un subconjunto del espacio muestral.

El complemento de un evento A con respecto a S es el conjunto de todos los elementos de S que no están en A. Denotamos el complemento de A por el símbolo A'.

La intersección de dos eventos A y B, que se representan por el símbolo A n b, es el evento que contiene a todos los elementos comunes a A y a B.

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si A B =

La unión de dos eventos A y B, que se representa por el símbolo A U B, es el evento que contiene a todos los elementos que pertenecen a A o B, o a ambos.

VARIABLE ALEATORIA: Es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral.

Se clasifican en:

DISCRETAS: Cuando se puede contar su conjunto de resultados posibles.

CONTINUAS: Cuando la variable puede tomar valores en una escala continúa.

PROBABILIDAD CONDICIONAL: Probabilidad de que un evento B se dé cuando se sabe que algún otro evento A se ha presentado, se escribe P$(B|A)$.

REGLAS ADITIVAS Y MULTIPLICATIVAS

Si a y b son dos eventos cualquiera, entonces

P (A U B) = P(A) + P (B) – P(A ∩B)

Si A y B son mutuamente excluyentes: P(A U B) = P(A) + P (B)

Si en un experimento pueden ocurrir los eventos A y B, entonces:

P(A ∩ B) = P(A) P (B/A)

Dos eventos A y B son independientes si y solo si:

P (A∩ B) = P (A) P (B)

DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD

El conjunto de pares ordenados (x, f(x)) es una distribución de probabilidad de la variable aleatoria X si para cada resultado posible de x se cumple que:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

Algunas distribuciones discretas de probabilidad:

Distribución uniforme: $\mathrm{f(x{:}\,k)} = \frac{1}{\mathrm{k}} \qquad \mathrm{x} = \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \dots \dots \dots \mathrm{x}_\mathrm{k}$

Distribución binomial: La distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial X, es:

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \qquad x = 0,1,2, \dots \dots .., n$$

La media y la varianza de la distribución binomial está dada por:$\mu = np \ y \ \sigma^2 = npq$

Distribución geométrica: $g(x; p) = pq^{x-1}, \qquad x = 1,2,3 \dots \dots ., n$

La media y la varianza de la distribución geométrica está dada por: $\mu = \frac{1}{p}\ y\ \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Distribución Poisson: $p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}}{x}, \quad x = 0,1,2, \dots \dots \dots \dots \dots,$

La media y la varianza de la distribución poisson tienen ambas el valor de λt

DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD: La función de probabilidad f(x) es una distribución de probabilidad para la variable aleatoria continua X, definida en el conjunto de los números reales si se cumple que:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a < (x < b) = \int_a^b f(x)dx$

DISTRIBUCIÓN NORMAL: $n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} \ , \ x > 0 \\ 0 \ \ en\ otro\ caso \end{cases}$

DISTRIBUCIÓN GAMMA: $\begin{cases} \frac{1}{\beta^{\propto}\ T\,(\propto)} x^{\propto -1} e^{-\frac{\propto}{\beta}} \ , \ x > 0 \\ 0\ , \qquad en\ otro\ caso \end{cases}$

DISTRIBUCIÓN CONJUNTA DE PROBABILIDAD

La función f (x, y) es una distribución de probabilidad conjunta de las variables **discretas** X y Y si,

1. $f(x, y) \geq 0 \; para \; toda \; (x, y)$
2. $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$
3. $P(X = x, Y = y) = f(x, y)$

Para cualquier región A en el plano x y, $P[(X, Y) \in A] = \sum \sum_A f(x, y)$

La función f (x, y) es una distribución de probabilidad conjunta de las variables **continuas** X y Y si,

1. $f(x, y) \geq 0 \; para \; toda \; (x, y)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$
3. $P[(X, Y) \in A] =$

Para cualquier región A en el plano x y, $P[(X, Y) \in A] = \sum \sum_A f(x, y)$

DISTRIBUCIONES MARGINALES

Si las variables aleatorias X y Y son discretas, sus distribuciones marginales están dadas por:

$$g(x) = \sum_y f(x, y) \qquad y \qquad h(y) = \sum_x f(x, y)$$

Si las variables aleatorias X y Y son continuas, sus distribuciones marginales están dadas por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \qquad y \qquad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

INDEPENDENCIA: Dos variables X y Y, discretas o continuas, con distribución de probabilidad conjunta f(x, y) y distribuciones marginales g(x) y h(y), son independientes estadísticamente si y solo si:

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

Para toda (x, y) dentro de su rango.

ESPERANZA MATEMÁTICA:

Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad f(x). El valor esperado de X es:

$$\mu = E(x) = \sum_{x} xf(x)$$

Si X es discreta y:

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Si x es continua.

Sea X una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad f(x). La media o valor esperado de la variable aleatoria g(X) está dada por:

$$\mu_{g(x)} = E[g(x)] = \sum g(x)f(x)$$

Si X es discreta y:

$$\mu_{g(x)} = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\ dx$$

Si X es continua.

Sean X, Y variables aleatoria discreta con distribución de probabilidad conjunta f(x, y). La media o valor esperado de la variable aleatoria g (X, Y) es:

$$\mu_{g(x,y)} = E[g(X,Y)] = \sum_{x}\sum_{y} g(x,y)f(x,y)$$

Si X y Y son discretas, y

$$\mu_{g(x,y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dx\,dy$$

Si X y Y son continuas.

VARIANZA: Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad f(x) y media μ. La variancia de X se define como:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x), \quad \text{si X es discreta, y:}$$

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx\ , \quad \text{si X es continua.}$$

Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad. La varianza de la variable aleatoria g(X) está dada por:

$$\sigma^2{}_{g(X)} = E\left\{\left[g(X) - \mu_{g(X)}\right]^2\right\} = \sum_x \left[g(x) - \mu_{g(X)}\right]^2 f(x), \quad \text{si X es discreta, y:}$$

$$\sigma^2{}_{g(X)} = E\left\{\left[g(X) - \mu_{g(X)}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(x) - \mu_{g(X)}\right]^2 f(x)dx\ , \quad \text{si X es continua.}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Stephen F. Love, 1989. Inventory control. McGraw-Hill, pág. 3.
2. James R. y Lambert, Douglas M.1995 Stock, Pág. 232.
3. Nahmias, S., 1993. Production and Operations Analysis. Irwin, Homewood, IL.
4. *Óscar Parada Gutiérrez (2009).*Un enfoque multicriterio para la toma de decisiones en la gestión de inventarios. Facultad de Ciencias Económicasy Empresariales de la Universidad de Oriente.
5. Ganeshan, Ram y Harrison, Terry. P. (1995). "An Introduction to Supply Chain Management". Department of Management Science and Information System. Pen state university.
6. Ponsot B., Ernesto. El estudio de inventarios en la cadena de suministros: Una mirada desde el subdesarrollo Actualidad Contable FACES Año 11 Nº 17, Julio-Diciembre 2008. Mérida. Venezuela. (82-94)
7. Holt, C.C., Modigliani, F., Muth, J.F., Simon, H.A., 1960.Planning Production, Inventories, and Work Force. Prentice- Hall, Englewood Cliffs, NJ
8. Johnson, L.A., Montgomery, D.C., 1974. Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control. Wiley, New York.
9. *Óscar Parada Gutiérrez (2009).*Un enfoque multicriterio para la toma de decisiones en la gestión de inventarios. Facultad de Ciencias Económicasy Empresariales de la Universidad de Oriente.
10. Hadley, G., Whitin, T.M., 1963, Analysis of Inventory Systems, Prentice-Hall, Inc., Englewood.
11. Pentico, Drake, & Toews, 2009.The deterministic EPQ with partial backordering: A new approach., pp. 624–636. Omega, 37
12. Cardenas-Barron, 2001. The economic production quantity (EPQ) with shortage derived algebraically. pp. 289–29, International Journal of Production Economics, 70.
13. Herron, D.P., 1967. Inventory management for minimum cost. Management Science 14, 219–235.

14. Nahmias, S., Wang, S.S., 1979. A heuristic lot size reorder point model for decaying inventories. Management Science 25, 90–97
15. Moinzadeh, K., Nahmias, S., 1988. A continuous review model for an inventory system with two supply modes. Management Science 34, 761–773.
16. Johansen, S.G., Thorstenson, A., 1998. An inventory model with Poisson demands and emergency orders. International Journal of Production Economics 56/57, 275–289.
17. Zipkin PH. Foundations of inventory management. McGraw-Hill, New York (2000)
18. Federgruen, A., Zheng, Y., 1992. An efficient algorithm for computing an optimal (Q,r) policy in continuous review stochastic inventory systems. Operations Research 40 (4), 808–813
19. Zheng Y-S . On properties of stochastic inventory systems. Management Science, 38 (1) (1992), pp. 87–103
20. Hopp, W.J., Zhang, R.Q., Spearman, M.L., 1999, Easily implementable inventory control policies, Operations Research; May/Jun 1997; 45, 3; ABI/INFORM Global, págs. 327-340
21. Federgruen A, Zheng Y. An efficient algorithm for computing an optimal(r, Q) policy in continuous review stochastic inventory systems. Operations Research 1992;40(4):808–13.
22. Axs¨ater S. Inventory control. Boston: Kluwer Academic Publishers; 2000.
23. LauAH-L,LauH-S, Robinson L W. Convenient expressions for computing the exact annual cost of a continuous-review (Q, R) system with backordering. Journal of the Operational Research Society 2002;53(6):655–63.
24. Sahin I. On the stationary analysis of continuous review (*s*, *S*) inventory system with constant lead times. Operations Research, 27 (4) (1979), pp. 717–728
25. Sivazlian BD.A continuous-review (*s*, *S*) inventory system with arbitrary interarrival distribution between unit demands. Operations Research, 22 (1) (1974), pp. 65–71

26. Zheng Y-S . On properties of stochastic inventory systems. Management Science, 38 (1) (1992), pp. 87–103.
27. Buchan, J., Koenigsberg, E., 1963. Scientific Inventory Management. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
28. R.G. Brown, G. Gerson, Decision Rules for Inventory Management, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967.
29. L.L. Parker, Economical reorder quantities and reorder points with uncertain demand, Naval Research Logistics Quarterly 11 (4) (1964) 351–358.
30. G.U. Tinarelli, Inventory control: Models and problems, European Journal of Operational Research 14 (1983) 1–12.
31. H.M.Wagner, Research portfolio for inventory management and production planning systems, Operations Research 28 (3) (1980) 445–475.
32. C.A. Yano, New algorithms for (Q, r) system with complete backordering using a fill-rate criterion, Naval Research Logistics Quarterly 32 (1985) 675–688.
33. R.G. Schrady, U.C. Choe, Models for multi-item continuous review inventory policies subject to constraints, Naval Research Logistics Quarterly 18 (4) (1971) 451–464.
34. R.G. Brown, G. Gerson, Decision Rules for Inventory Management, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967
35. D.A. Schrady, U.C. Choe, Models for multi-item continuous review inventory policies subject to constraints, Naval Research Logistics Quarterly 18 (4) (1971) 451–464.
36. R.G. Schroeder, Managerial inventory formulations with stockout objectives and fiscal constraints, Naval Research Logistics Quarterly 21 (1974) 375–38
37. E.S. Gardner Jr., Approximate decision rules for continuous review inventory systems, Naval Research Logistics Quarterly 30 (1983) 59–68
38. Maloney, B.M., Klein, C.M., 1997. A multi-linear constraint inventory system. International Journal of Operations and Quantitative Management 3 (1), 27–40

39. Guder, F., Zydiak, J.L., 1999. Ordering policies for multi-item inventory systems subject to multiple resource constraints. Computers and Operations Research 26, 583–597.
40. Tersine, R.J., 1976. Material Management and Inventory Systems. Elsevier, New York.
41. Parsons, J.A., 1966. Multi-product lot size determination when certain restrictions are active. Journal of Industrial Engineering 17 (7), 360–365.
42. Ziegler, H., 1982. Solving certain singly constrained convex optimization problems in production planning. Operations Research Letters 1 (6), 246–252
43. Maloney, B.M., Klein, C.M., 1993. Constrained multi-item inventory systems: An implicit approach. Computers and Operations Research 20 (6), 639–649
44. Maloney, B.M., Klein, C.M., 1997. A multi-linear constraint inventory system. International Journal of Operations and Quantitative Management 3 (1), 27–40.
45. Bretthauer, K., Shetty, B.S.S., White, S., 1994. A model for resource constrained production and inventory management. Decision Sciences 25 (4), 561–580
46. Rabinowit7. G.. Mehre7. A, Chu. C.W. and Patuwo. B.E. (1995) A partial backorder control for continuous review (j-. 0inventory system with Poisson demand and constant lead time. Computers & Operations Researeh, 22. 689-700.
47. Chu. C.W.. Patuwo. B.E.. Mehre/. A. and Rabinowitz, G. (2001) A dynamic two-segment partial backorder control of(r *Q)* inventory systems. *Computers & Operations Research,* 25. 935 953
48. Moon. I. and Gallego, G. (1994) Distribution free procedures for some inventory models. *Journal of the Operational Re.scarch Sociciv,* 45. 651-658.
49. Guoqiang Peter Zhang Y Ching-Wu Chu. (2003) A hybrid inventory system with a time limit on backorders.IIe transactions 35, 679-687.
50. Babak Ghalebsaz-Jeddi, Bruce C. Shultes, Rasoul Haji (2004). A multi-product continuous review inventory system with stochastic demand, backorders, and a

budget constraint. European Journal of Operational Research 158 (2004) 456–469.

51. ZhaoX,FanF,LiuX,XieJ. Storage-space capacitated inventory system with (r, Q) policies.OperationsResearch2007;55(5):854–65.
52. MINNER S, SILVER EA. MULTI-PRODUCT BATCH REPLENISHMENT STRATEGIES UNDER STOCHASTIC DEMAND IN A JOINT CAPACITY CONSTRAINT. IIE TRANSACTIONS 2005; 37(5): 469–79.
53. BettsJM,JohnstonRB.Determining the optimal constrained multi-item(Q,r) inventory policy by maximizing grisk-adjusted profit. IM A Journal of Management Mathematics2005; 16(4):317–38.
54. Jeddi, B.G., Shultes, B.C., Haji, R., 2004. A multi-product continuous review inventory system with stochastic demand, backorder, and a budget constraint
55. Hopp, W.J., Spearman, M.L., 2001. Factory Physics, second ed. McGraw-Hill, New York
56. Moncer A. Hariga (2010). A single-item continuous review inventory problem with space restriction. Int. J. Production Economics 128 (2010) 153–158.
57. Pasandideh, S. H. R., & Niaki, S. T. A. (2008). A genetic algorithm approach to optimize a multi- products EPQ model with discrete delivery orders and constrained space. Applied Mathematics and Computation, 195, 506–514.
58. K. Das, T.K. Roy, M. Maiti, Multi-item inventory model with quantity-dependent inventory costs and demand-dependent unit cost under imprecise objective and restrictions: a geometric programming approach, Prod. Plan. Control 11 (2000) 781–788.
59. M. Ben-Daya, and A. Raouf, On the constrained multi-item single-period inventory problem, *International journal of Production Management* ,Vol. 13, pp.104-112, 1993.